

SZEREG CZASOWY

Y – zjawisko badane w różnych okresach lub momentach czasu.

Dynamika zjawiska to zmiana zjawiska w czasie.

Przykład.

Y – średni kurs akcji firmy OPTIMUS na giełdzie

Okresy: notowania od 1.03.2010 do 15.05.2010;

jednostka: notowanie.

Wartości zjawiska tworzą **szereg czasowy**:

t_i	t_1	t_2		t_n
y_i	y_1	y_2		y_n

t_i – chwile lub okresy (przedziały powinny być jednakowe)

Uwaga: niekiedy stosuje się zapis: $t_0, t_1, \dots, t_n$.

Średni poziom badanego zjawiska w szeregu czasowym okresów liczymy za pomocą **średniej arytmetycznej** natomiast w szeregu czasowym momentów za pomocą **średniej chronologicznej**:

$$\bar{Y}_{ch} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{n-1}$$

Przykład.

Liczbę pracowników pewnego banku wg stanu na koniec poszczególnych kwartałów roku podano w tabeli:

Kwartał	I	II	III	IV
Liczba pracowników	724	712	696	666

średnia chronologiczna jest równa

$$\bar{Y}_{ch} = \frac{724 / 2 + 712 + 696 + 666 / 2}{3} = 701$$

Tendencja rozwojowa (trend) - określa ogólny kierunek rozwoju zjawiska w czasie.

Metody określania tendencji rozwojowej:

- a) metoda średnich ruchomych
- b) metoda analityczna (omówiona przy zagadnieniu regresji).

Np. średnia ruchoma trzyokresowa ($k = 3$) ma postać:

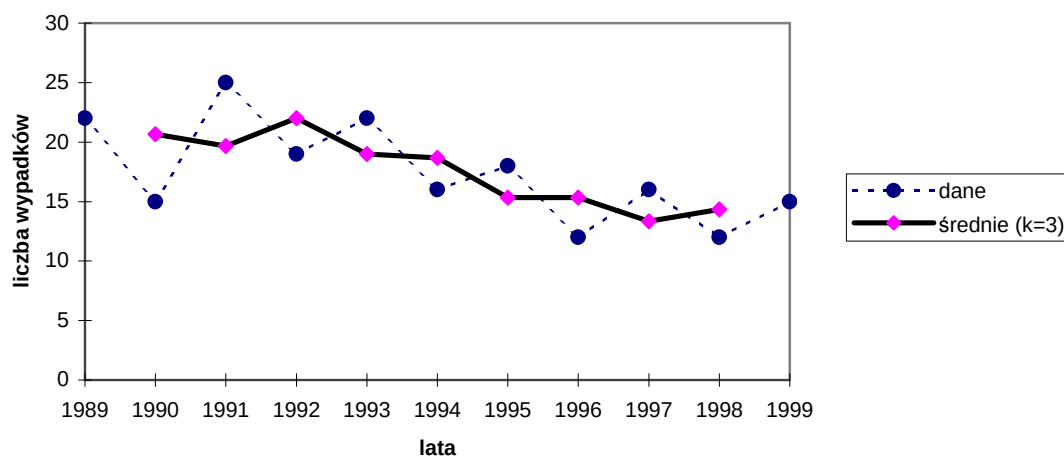
$$\bar{Y}_2 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad \bar{Y}_3 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}, \quad \dots, \quad \bar{Y}_{n-1} = \frac{y_{n-2} + y_{n-1} + y_n}{3}$$

Przykład.

Liczba wypadków w pewnej firmie w kolejnych latach wynosiła:

Rok	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Liczba wypadków	22	15	25	19	22	16	18	12	16	12	15
Średnie (k=3)		20,7	19,7	22,0	19,0	18,7	15,3	15,3	13,3	14,3	

Efekt wygładzania średnimi ruchomymi ($k = 3$)
przedstawiono na wykresie:



PRZYROSTY

Przyrosty absolutne (bezwzględne)

a) ciąg przyrostów bezwzględnych (o stałej podstawie):

$$y_1 - y_0, y_2 - y_0, y_3 - y_0, \dots, y_n - y_0$$

y_0 – stała podstawa (dowolna spośród $y_1, \dots, y_n$).

**b) ciąg przyrostów bezwzględnych
łańcuchowych (o zmiennej podstawie):**

$$y_2 - y_1, y_3 - y_2, y_4 - y_3, \dots, y_n - y_{n-1}$$

Są to wielkości mianowane więc nie nadają się do porównań zmian dla różnych zjawisk.

Do porównań bardziej nadają się wielkości względne:

**Przyrosty względne (wskaźniki tempa
dynamiki)** (często wyrażane w procentach)

**a) ciąg przyrostów względnych o stałej
podstawie y_0 :**

$$\frac{y_1 - y_0}{y_0}, \frac{y_2 - y_0}{y_0}, \dots, \frac{y_n - y_0}{y_0}$$

b) ciąg przyrostów łańcuchowych:

$$\frac{y_2 - y_1}{y_1}, \frac{y_3 - y_2}{y_2}, \dots, \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n-1}}$$

Przykład.

Y – liczba zarejestrowanych samochodów osobowych w
pewnym mieście (stan na 31.12)

Lata	y_t (szt.)	przyrosty absolutne		przyrosty względne	
		stała podstawa $y_0 = 1995$	łańcuchowe	stała podstawa $y_0 = 1995$	łańcuchowe
1995	5261	0	x	0	x
1996	6112	851	851	0,162	0,162
1997	6505	1244	393	0,236	0,064
1998	6771	1510	266	0,287	0,041
1999	7153	1892	382	0,360	0,056

INDEKSY (wskaźniki dynamiki).

Indeksy dzielimy na:

- indeksy **indywidualne** (proste),
- indeksy **zespołowe** (agregatowe).

Indeksy indywidualne.

a) ciąg indeksów o stałej podstawie:

$$I_{1/0}, I_{2/0}, I_{3/0}, \dots, I_{n/0}$$

y_0 – stała podstawa (dowolna spośród $y_1, \dots, y_n$).

gdzie

$$I_{t/0} = \frac{y_t}{y_0} \quad t = 1, 2, \dots, n$$

b) **ciąg indeksów łańcuchowych:**

$$I_{2/1}, I_{3/2}, I_{4/3}, \dots, I_{n/n-1}$$

gdzie

$$I_{t/t-1} = \frac{y_t}{y_{t-1}} \quad t = 2, 3, \dots, n$$

Uwaga.

$$\frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} + 1 = \frac{y_t}{y_{t-1}} - \frac{y_{t-1}}{y_{t-1}} + 1 = \frac{y_t}{y_{t-1}} = I_{t/t-1} \quad t=2, 3, \dots, n$$

zatem mamy zależność:

$\begin{aligned} &\textit{indeks łańcuchowy} = \\ &= \textit{przyrost względny łańcuchowy} + 1 \end{aligned}$

Przykład.

Y – liczba wypadków drogowych w ciągu roku.

Rok	t	liczba wypadków y_t	$I_{t/0} = \frac{y_t}{y_0}$ $y_0 = 1995$	$I_{t/t-1} = \frac{y_t}{y_{t-1}}$
1995	1	39779		
1996	2	40373		
1997	3	43755		
1998	4	38832		
1999	5	40454		

Przykład.

Y – liczba wypadków drogowych w ciągu roku.

Rok	t	liczba wypadków y_t	$I_{t/0} = \frac{y_t}{y_0}$ $y_0 = 1995$	$I_{t/t-1} = \frac{y_t}{y_{t-1}}$
1995	1	39779	1,000	X
1996	2	40373	1,015	1,015
1997	3	43755	1,100	1,084
1998	4	38832	0,976	0,887
1999	5	40454	1,017	1,042

Średnie tempo dynamiki to średnie tempo zmian przypadające na jednostkę czasu.

Zagadnienie.

Wyznaczyć liczb $\bar{g}$ taką, że gdyby wszystkie indeksy łańcuchowe były sobie równe i miały wartość $\bar{g}$ to wartość zjawiska w okresie t_n byłaby równa y_n (taka sama jak przy różnych indeksach łańcuchowych).

Liczbę $\bar{g}$ nazywamy **średnim tempem dynamiki** lub **średnim tempem zmian** lub **średnim indeksem łańcuchowym**.

Zauważmy, że

$$(*) \quad y_n = I_{n/n-1} \cdot \dots \cdot I_{2/1} \cdot y_1$$

gdyby wszystkie indeksy były równe to

$$(**) \quad y_n = \bar{g}^{n-1} \cdot y_1$$

Porównując (*) i (**) mamy

$$\boxed{\bar{g} = \sqrt[n-1]{I_{n/n-1} \cdot \dots \cdot I_{2/1}}}$$

(średnia geometryczna)

Własność:

$$\boxed{\bar{g} = \sqrt[n-1]{I_{n/1}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}}$$

Uwaga

Średnie tempo dynamiki $\bar{g}$ możemy zastosować do wyznaczania prognozy:

$$y_{n+k}^* = y_n (\bar{g})^k$$

Średni wskaźnik tempa to

$$\bar{T} = \bar{g} - 1$$

Przykład.

Dla danych z poprzedniego przykładu:

$$\bar{g} = \sqrt[4]{1,015 \cdot 1,084 \cdot 0,887 \cdot 1,042} = \sqrt{\sqrt{1,017}} = 1,004 = 100,4\%$$

$$\bar{T} = 0,004 = 0,4\%$$

Indeksy agregatowe (zespolowe).

Indeksy agregatowe dzielimy na:

- indeksy agregatowe wielkości absolutnych
(np. wartości, ilości, cen),
- indeksy (agregatowe) wielkości
stosunkowych (np. wydajność pracy koszt
jednostkowy, gęstość zaludnienia).

Agregatowy wskaźnik (indeks) wartości I_w

$$I_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_{1i}}{\sum_{i=1}^n w_{0i}} = \frac{\text{suma wartości w okresie badanym}}{\text{suma wartości w okresie podstawowym}}$$

Gdy p_{1i} – cena jednostkowa w okresie badanym

q_{1i} – ilość w okresie badanym,

p_{0i} – cena jednostkowa w okresie

podstawowym

q_{0i} – ilość w okresie podstawowym

to

$$W_{1i} = p_{1i} q_{1i}$$

$$W_{0i} = p_{0i} q_{0i}$$

Przykład.

Wyznamy agregatowy indeks wartosci
sprzedazy czterech artykulow A, B, C, D
w latach 1995 i 1999:

artykul	Sprzedaz (tys. szt.)		Cena za 1 szt. (srednio)		Wartosc sprzedazy (zł)	
	1995 q_0	1999 q_1	1995 p_0	1999 p_1	1995 $w_0 = p_0 q_0$	1999 $w_1 = p_1 q_1$
A	220	248	4,65	14,90		
B	2260	2185	1,65	4,20		
C	1052	850	22,00	90,00		
D	334	368	4,00	10,50		
Ogolem	X	X	X	X		

artykuł	Sprzedaż (tys. szt.)		Cena za 1 szt. (średnio)		Wartość sprzedaży (zł)	
	1995 q_0	1999 q_1	1995 p_0	1999 p_1	1995 $w_0 = p_0 q_0$	1999 $w_1 = p_1 q_1$
A	220	248	4,65	14,90	1023,00	3695,20
B	2260	2185	1,65	4,20	3729,00	9177,00
C	1052	850	22,00	90,00	23144,0	76500,0
D	334	368	4,00	10,50	1336,00	3864,00
Ogółem	x	x	x	x	29232,0	93236,2

Zatem:

$$I_w = \frac{\text{suma wartości sprzedaży w 1999}}{\text{suma wartości sprzedaży w 1995}} = \frac{93236,2}{29232,0} = 3,190 = 319\%$$

Tzn. sprzedaż wzrosła o 219%.

Indeks agregatowy ilości I_q ., Indeks agregatowy cen I_p

Nazwa indeksu	Cecha indeksu	Definicja indeksu	
		Wg Laspeyresa	Wg Paaschego
Indeks agregatowy ilości	Stałe ceny jednostkowe	(ceny z okresu podstawowego)	(ceny z okresu badanego)
Indeks agregatowy cen	Stałe ilości	(ilości z okresu podstawowego)	(ilości z okresu badanego)

Indeks agregatowy ilości I_q ., Indeks agregatowy cen I_p

Nazwa indeksu	Cecha indeksu	Definicja indeksu	
		Wg Laspeyresa	Wg Paaschego
Indeks agregatowy ilości	Stałe ceny jednostkowe	${}_L I_q = \frac{\sum q_{1i} \cdot p_{0i}}{\sum q_{0i} \cdot p_{0i}}$ (ceny z okresu podstawowego)	${}_P I_q = \frac{\sum q_{1i} \cdot p_{1i}}{\sum q_{0i} \cdot p_{1i}}$ (ceny z okresu badanego)
Indeks agregatowy cen	Stałe ilości	${}_L I_p = \frac{\sum q_{0i} \cdot p_{1i}}{\sum q_{0i} \cdot p_{0i}}$ (ilości z okresu podstawowego)	${}_P I_p = \frac{\sum q_{1i} \cdot p_{1i}}{\sum q_{1i} \cdot p_{0i}}$ (ilości z okresu badanego)

Dla powyższego przykładu:

artykuł		
	q_1p_0	q_0p_1
A		
B		
C		
D		
Ogółem		

Dla powyższego przykładu:

artykuł		
	q_1p_0	q_0p_1
A	1153,2	3278,00
B	3605,25	9492,00
C	18700,00	94680,0
D	1472,00	3507,00
Ogółem	24930,45	110957

$${}_L I_q = \frac{24930,45}{29323,00} = 0,853 = 85,3\%$$

(ilość globalnie spadła o 14,7%)

$${}_P I_q = \frac{93236,20}{110957,00} = 0,84 = 84\%$$

$${}_L I_p = \frac{110957,00}{29232,00} = 3,796 = 379,6\%$$

(ceny globalnie wzrosły o 279,6%)

$${}_P I_p = \frac{93236,20}{24930,45} = 3,74 = 374\%$$

Wniosek: *zmiana cen miała większy wpływ na zmianę wartości niż zmiana ilości.*

Zależności:

$$I_W =_P I_q \cdot_L I_p \qquad I_W =_L I_q \cdot_P I_p$$

Indeks Fiszera

dla ilości ${}_F I_q = \sqrt{{}_L I_q \cdot {}_P I_q}$

dla cen ${}_F I_p = \sqrt{{}_L I_p \cdot {}_P I_p}$

Wniosek

$${}_F I_q \cdot {}_F I_p = I_w$$



Hermann Paasche (1851-1922), niemiecki ekonomista, polityk i statystyk.



Niemiecki ekonomista Étienne Laspeyres (1834–1913)



Irving Fisher (1867 - 1947) – ekonomista i matematyk amerykański,