

## SMO

Systemy masowej obsługi (zastosowanie procesu urodzeń i śmierci) - przykłady:

- centrala telefoniczna,
- stacja benzynowa,
- kasa biletowa,
- system informatyczny.

Założenia:

n - liczba stanowisk obsługi,

m - liczba miejsc w poczekalni.

- strumień zgłoszeń jest procesem Poissona z parametrem  $\lambda > 0$ ,
- czas obsługi ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\mu > 0$  (intensywność obsługi),
- stanowiska działają niezależnie,
- zgłoszenia które nastąpią gdy wszystkie stanowiska obsługi są zajęte przechodzą do poczekalni (jeśli jest),
- jeśli wszystkie stanowiska obsługi są zajęte i wszystkie miejsca w poczekalni są zajęte to zgłoszenie opuszcza SMO.

$X(t)$  - proces stochastyczny oznaczający liczbę klientów w SMO w chwili t,

$p_j(t) = P(X(t) = j)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  jest rozkładem tego procesu w chwili t

Najczęściej interesują nas prawdopodobieństwa graniczne

$$C_0 = \Pi_0, C_1 = \Pi_1, \dots, C_n = \Pi_n, \dots$$

### SMO ze stratami (bez poczekalni), bez współpracy.

$$0 < n < \infty, \quad m = 0$$

$\lambda_i = \lambda$  intensywność zgłoszeń,

$\mu_j = j\mu$  intensywność obsługi j - tego stanowiska,

$$[0] \xrightleftharpoons[\mu]{\lambda} [1] \xrightleftharpoons[2\mu]{\lambda} [2] \xrightleftharpoons[3\mu]{\lambda} \dots \xrightleftharpoons[(n-1)\mu]{\lambda} [n-1] \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} [n]$$

Prawdopodobieństwa graniczne (wzory Erlanga):

$$C_0 = \Pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 2!} + \frac{\lambda^3}{\mu^3 3!} + \dots + \frac{\lambda^n}{\mu^n n!}} = \left( \sum_{j=0}^n \frac{\lambda^j}{\mu^j j!} \right)^{-1} = \left( \sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} \right)^{-1}$$

gdzie  $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$

$$C_j = \Pi_j = \frac{\lambda^j}{\mu^j j!} C_0 = \frac{\alpha^j}{j!} C_0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Wzory te wynikają bezpośrednio ze wzorów na rozkład graniczny dla procesu urodzeń i śmierci bowiem:

$$C_0 = \Pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot 2\mu} + \frac{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu} + \dots + \frac{\overbrace{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda \cdot \dots \cdot \lambda}^{n \text{ czynników}}}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \cdot \dots \cdot (n-1)\mu \cdot n\mu}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 2!} + \frac{\lambda^3}{\mu^3 3!} + \dots + \frac{\lambda^n}{\mu^n n!}}$$

Zauważmy, że

$$C_j = \frac{\frac{\lambda^j}{\mu^j j!}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 2!} + \frac{\lambda^3}{\mu^3 3!} + \dots + \frac{\lambda^n}{\mu^n n!}} = \frac{\frac{\alpha^j}{j!}}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!}}$$

i mnożąc licznik oraz mianownik przez  $e^{-\alpha}$  widzimy, że poszczególne składniki są równe funkcji prawdopodobieństwa rozkładu Poissona z parametrem  $\alpha$

$$C_j = \frac{\frac{\lambda^j}{\mu^j j!} e^{-\alpha}}{e^{-\alpha} + \frac{\lambda}{\mu} e^{-\alpha} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 2!} e^{-\alpha} + \frac{\lambda^3}{\mu^3 3!} e^{-\alpha} + \dots + \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} e^{-\alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{\alpha^j}{j!} e^{-\alpha}}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} e^{-\alpha}} = \frac{P_{\alpha}(j)}{\sum_{j=0}^n P_{\alpha}(j)} \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

zatem możemy wyznaczać wartości  $C_j$  za pomocą tablic rozkładu Poissona  $P_{\alpha}(j)$  ( $P_{\alpha}(j) = P(X = j)$  jest funkcją prawdopodobieństwa rozkładu Poissona z parametrem  $\alpha$ ).

#### **Uwaga**

Jeśli dysponujemy skumulowanym RPS i nieskumulowanym RPN rozkładem Poissona

(np. funkcja EXCELA) to  $C_j = \frac{RPN(j)}{RPS(n)}$ .

Prawdopodobieństwo odmowy =  $P_{\text{odm}} = C_n$ .

Prawdopodobieństwo obsługi =  $P_{\text{obsł}} = 1 - C_n$ .

Średnia (graniczna) liczba zajętych stanowisk obsługi.

|       |       |     |       |
|-------|-------|-----|-------|
| 0     | 1     | ... | n     |
| $C_0$ | $C_1$ | ... | $C_n$ |

$$m_{zs} = \lim_{t \rightarrow \infty} E(X(t)) = \sum_{k=1}^n k \cdot C_k = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{\alpha^k}{k!} C_0 = \alpha \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} C_0 =$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha^i}{i!} C_0 = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} C_i = \alpha(C_0 + C_1 + \dots + C_{n-1}) = \alpha(1 - C_n) = \alpha \cdot P_{obs}$$

**Uwaga**

Jeśli  $n=1$  to  $C_0 = \frac{1}{1+\alpha}$        $C_1 = \alpha C_0 = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ .

W tym przypadku  $m_{zs} = \alpha(1 - C_1) = \alpha \cdot C_0 = C_1 = P_{odm} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ .

**Przykład.**

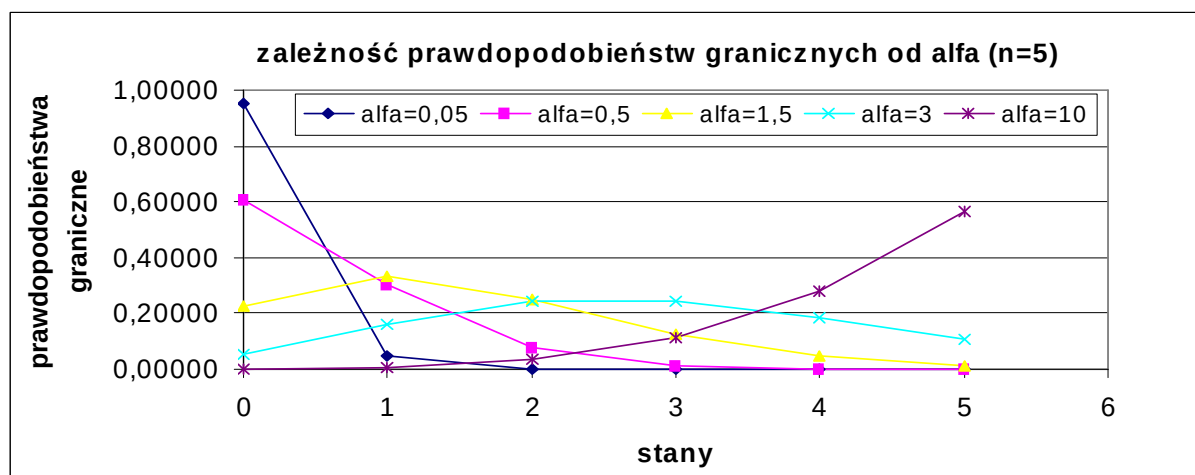
Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy,  $n = 5$ , wyznaczmy prawdopodobieństwa graniczne dla różnych wartości  $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$  i zbadamy zależność prawdopodobieństwa odmowy obsługi i średniej liczby zajętych stanowisk od  $\alpha$ .

W poszczególnych kolumnach wpisane są prawdopodobieństwa graniczne dla wartości  $\alpha$  podanej w nagłówku kolumny. Pod tabelką podano średnie liczby zajętych stanowisk.

| j \ alfa | 0,05    | 0,1     | 0,5     | 1       | 1,5     | 2       | 3       | 5       | 7       | 10      |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0        | 0,95123 | 0,90484 | 0,60654 | 0,36810 | 0,22413 | 0,13761 | 0,05435 | 0,01094 | 0,00303 | 0,00068 |
| 1        | 0,04756 | 0,09048 | 0,30327 | 0,36810 | 0,33619 | 0,27523 | 0,16304 | 0,05469 | 0,02123 | 0,00677 |
| 2        | 0,00119 | 0,00452 | 0,07582 | 0,18405 | 0,25214 | 0,27523 | 0,24457 | 0,13674 | 0,07429 | 0,03384 |
| 3        | 0,00002 | 0,00015 | 0,01264 | 0,06135 | 0,12607 | 0,18349 | 0,24457 | 0,22789 | 0,17335 | 0,11279 |
| 4        | 0,00000 | 0,00000 | 0,00158 | 0,01534 | 0,04728 | 0,09174 | 0,18342 | 0,28487 | 0,30337 | 0,28198 |
| 5        | 0,00000 | 0,00000 | 0,00016 | 0,00307 | 0,01418 | 0,03670 | 0,11005 | 0,28487 | 0,42472 | 0,56395 |

| $m_{zs}$ | 0,05 | 0,1 | 0,4999 | 0,9969 | 1,4787 | 1,9266 | 2,6698 | 3,57566 | 4,02696 | 4,36 |
|----------|------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|------|
|----------|------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|------|

Dla pięciu wybranych wartości  $\alpha$  rozkłady graniczne zilustrowano graficznie.

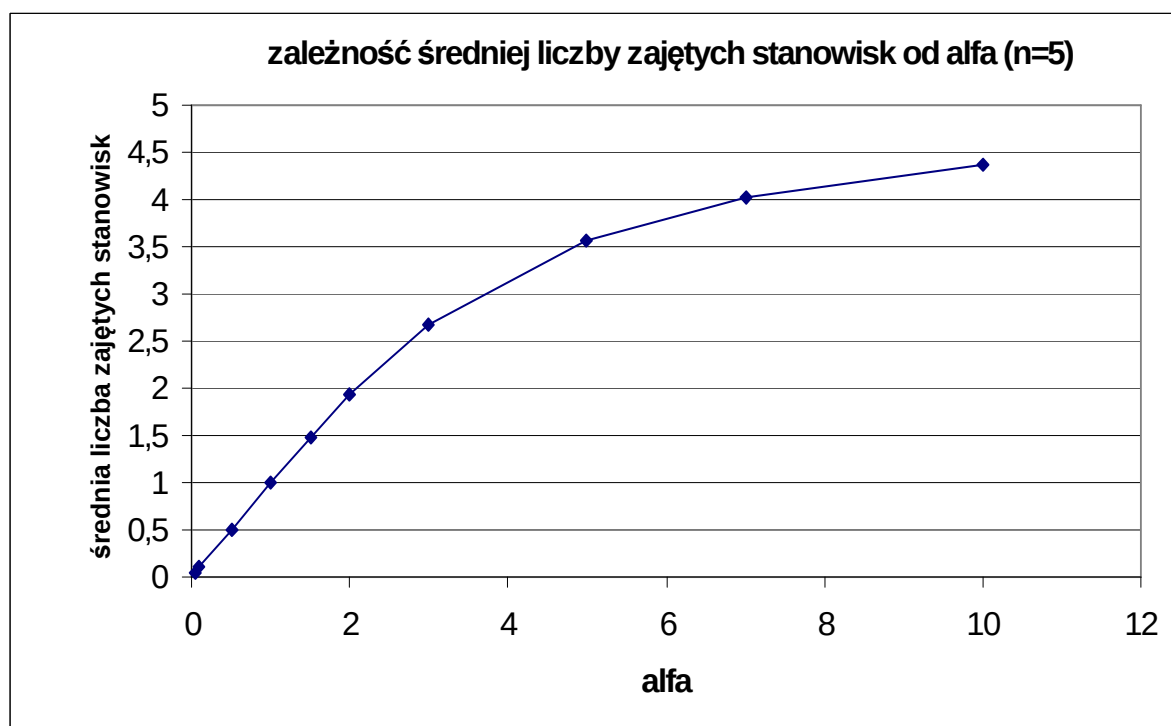


Zauważmy, że wraz ze wzrostem alfy rośnie prawdopodobieństwo, że zajęta będzie większa liczba stanowisk.

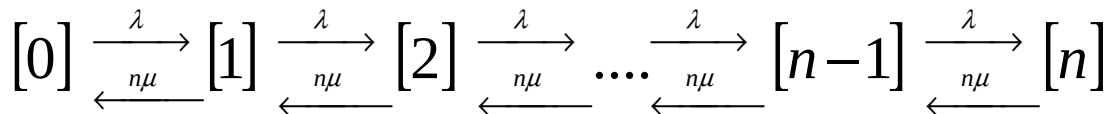
Na drugim wykresie przedstawiono zależność prawdopodobieństwa odmowy obsługi ( $C_5$ ) od alfa. Wzrost intensywności zgłoszeń w stosunku do intensywności obsługi tzn. wzrost  $\alpha$  powoduje wzrost prawdopodobieństwa odmowy obsługi.



Na trzecim wykresie przedstawiono zależność średniej liczby zajętych stanowisk ( $m_{zs}$ ) od alfa. Wzrost  $\alpha$  powoduje wzrost średniej liczby zajętych stanowisk.



**SMO ze stratami (bez poczekalni), z pełną współpracą.**

$$0 < n < \infty, \quad m = 0 \quad \mu_j = n\mu \text{ intensywność obsługi } j\text{-tego stanowiska,}$$


### Prawdopodobieństwa graniczne:

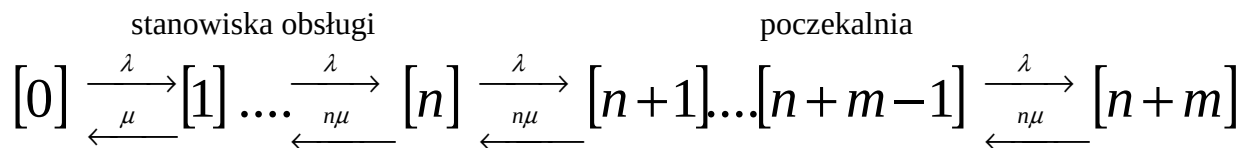
$$C_0 = \frac{1}{1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^n} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{gdy } \beta = 1 \\ \left( \frac{1 - \beta^{n+1}}{1 - \beta} \right)^{-1} & \text{gdy } \beta \neq 1 \end{cases}$$

gdzie  $\beta = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\alpha}{n}$

$$C_j = \beta^j C_0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Prawdopodobieństwo odmowy obsługi to  $P_{odm} = C_n$ .

## SMO z ograniczonymi stratami, bez współpracy.

$$m > 0$$


## Prawdopodobieństwa graniczne:

$$C_0 = \left( 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^n}{n!} (\beta + \beta^2 + \dots + \beta^m) \right)^{-1}$$

gdzie  $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ ,  $\beta = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\alpha}{n}$  zatem

$$C_0 = \begin{cases} \left( \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\beta(1-\beta^m)}{1-\beta} \right)^{-1} g dy & \beta \neq 1 \\ \left( \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} m \right)^{-1} g dy & \beta = 1 \end{cases}$$

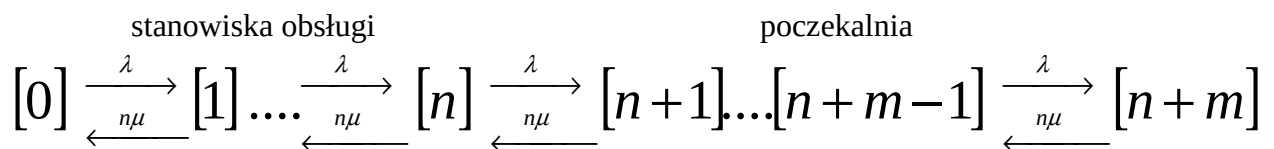
$$C_k = \frac{\alpha^k}{k!} C_0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad C_{n+j} = \beta^j C_n, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

**Uwaga.** dla  $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$C_k = \begin{cases} \frac{\frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} + \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha} \frac{\beta(1-\beta^m)}{1-\beta}} = \frac{P_\alpha(k)}{\sum_{k=0}^n P_\alpha(k) + P_\alpha(n) \frac{\beta(1-\beta^m)}{1-\beta}} & gdy \beta \neq 1 \\ \frac{P_\alpha(k)}{\sum_{k=0}^n P_\alpha(k) + P_\alpha(n)m} & gdy \beta = 1 \end{cases}$$

zatem do obliczeń można wykorzystać tablice rozkładu Poissona.

**SMO z ograniczonymi stratami, z pełną współpracą.**

$$\underline{m} > 0$$


## Prawdopodobieństwa graniczne:

$$C_0 = \frac{1}{1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{n+m}} = \begin{cases} \frac{1}{m+n+1} & \text{gdy } \beta = 1 \\ \left( \frac{1 - \beta^{n+m+1}}{1 - \beta} \right)^{-1} & \text{gdy } \beta \neq 1 \end{cases}$$

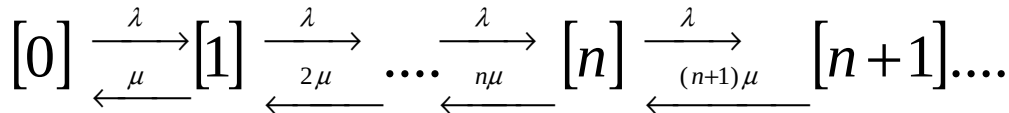
gdzie  $\beta = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\alpha}{n}$

$$C_j = \beta^j C_0, \quad j = 1, 2, \dots, n + m$$

Prawdopodobieństwo odmowy obsługi  $P_{\text{odm}} = C_{n+m}$ .

**SMO bez strat (nieskończenie wiele stanowisk), bez współpracy.**

$n = \infty$ ,  $\lambda_i = \lambda$  intensywność zgłoszeń,  $\mu_j = j\mu$  intensywność obsługi  $j$  - tego stanowiska,



Prawdopodobieństwa graniczne:

$$C_0 = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \right)^{-1} = e^{-\alpha} \quad \text{gdzie } \alpha = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$C_j = \frac{\lambda^j}{\mu^j j!} C_0 = \frac{\alpha^j}{j!} C_0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \dots$$

**Uwaga.**

$$C_j = \frac{\alpha^j}{j!} e^{-\alpha} = P_{\alpha}(j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$$

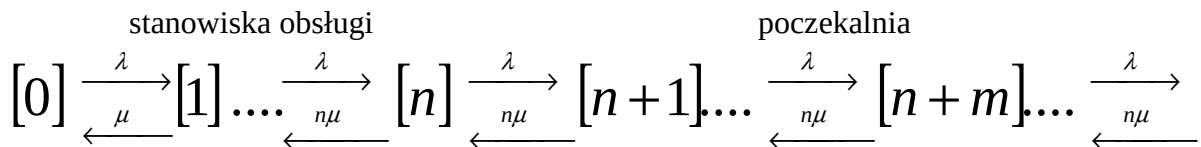
zatem do obliczeń można wykorzystać tablice rozkładu Poissona.

$P_{\text{odm}} = 0$ .

**Uwaga.** Ten typ SMO nie może być rozpatrywany z pełną współpracą obsługi.

**SMO bez strat (nieskończenie długa kolejka), bez współpracy.**

$m = \infty$



Prawdopodobieństwa graniczne:

$$C_0 = \left( \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\beta}{1-\beta} \right)^{-1}$$

zakładamy, że  $\beta = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\alpha}{n} < 1$  (**warunek istnienia prawdopodobieństw granicznych**) zatem

$$C_k = \frac{\alpha^k}{k!} C_0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad C_{n+j} = \beta^j C_n, \quad j = 1, 2, \dots$$

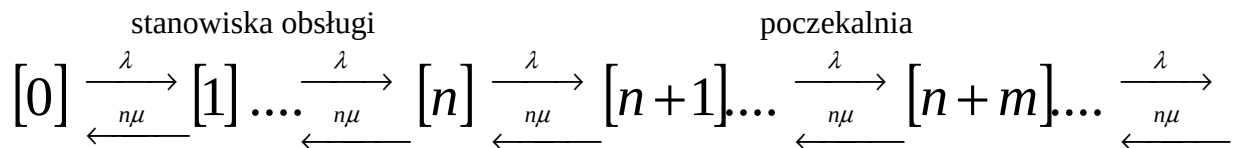
**Uwaga.** dla  $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$C_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} + \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha} \frac{\beta}{1-\beta}} = \frac{P_\alpha(k)}{\sum_{k=0}^n P_\alpha(k) + P_\alpha(n) \frac{\beta}{1-\beta}}$$

$$P_{\text{odm}} = 0.$$

## SMO bez strat (nieskończenie długa kolejka), z pełną współpracą.

$$m = \infty$$



$$P_{\text{odm}} = 0.$$

zakładamy, że  $\beta = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\alpha}{n} < 1$  (**warunek istnienia prawdopodobieństw granicznych**)

## Prawdopodobieństwa graniczne:

$$C_0 = \frac{1}{1 + \beta + \beta^2 + \dots} = 1 - \beta$$

$$C_j = \beta^j C_0, \quad j = 1, 2, \dots$$

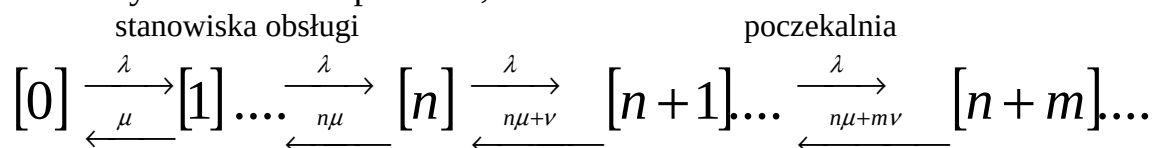
**SMO bez strat (zgłoszenia niecierpliwe), bez współpracy.**

$$m = \infty$$

$T_1$  – czas oczekiwania w kolejce,

$$P(T_1 < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\nu t} & \text{gdy } t > 0 \\ 0 & \text{gdy } t \leq 0 \end{cases}$$

$v$  - intensywność niecierpliwości,



### Prawdopodobieństwa graniczne:



$$C_0 = \left( \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \left( \frac{\lambda}{n\mu + \nu} + \frac{\lambda^2}{(n\mu + \nu)(n\mu + 2\nu)} + \dots + \frac{\lambda^m}{(n\mu + \nu) \dots (n\mu + m\nu)} + \dots \right) \right)^{-1}$$

zakładamy, że powyższy szereg jest zbieżny.

Zatem

$$C_k = \frac{\alpha^k}{k!} C_0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad C_n = \frac{\alpha^n}{n!} C_0$$

$$C_{n+j} = C_n \frac{\lambda^j}{(n\mu + \nu) \dots (n\mu + j\nu)}, \quad j = 1, 2, \dots$$

### Charakterystyki SMO.

$m_{kl}$  - średnia liczba klientów w SMO (st. obsł. lub poczekalnia),

$m_k$  - średnia długość kolejki,

$m_{zs}$  - średnia liczba zajętych stanowisk,

SMO z ograniczonymi stratami, bez współpracy.

Y - liczba zajętych stanowisk obsługi,

|   |       |       |     |           |                                   |
|---|-------|-------|-----|-----------|-----------------------------------|
| Y | 0     | 1     | ... | n - 1     | n                                 |
| p | $C_0$ | $C_1$ | ... | $C_{n-1}$ | $C_n + C_{n+1} + \dots + C_{n+m}$ |

$$m_{zs} = EY = \alpha(1 - C_{n+m}) = \alpha P_{\text{obsł}}$$

Z - liczba zajętych miejsc w poczekalni,

|   |                    |           |     |           |
|---|--------------------|-----------|-----|-----------|
| Z | 0                  | 1         | ... | m         |
| p | $\sum_{i=0}^n C_i$ | $C_{n+1}$ | ... | $C_{n+m}$ |

$$m_k = EZ = \begin{cases} C_n \left( \frac{m(m+1)}{2} \right) & \text{dla } \beta = 1 \\ C_n \beta \left( \frac{1 - (m+1)\beta^m + m\beta^{m+1}}{(1-\beta)^2} \right) & \text{dla } \beta \neq 1 \end{cases}$$

X - liczba zgłoszeń w SMO,  $X = Y + Z$ ,

Zatem

$$m_{kl} = EX = EY + EZ = m_{zs} + m_k$$

**Wniosek.**

Jeśli  $m = 0$  (brak poczekalni) to

$$EZ = 0, \quad EX = EY = \alpha(1 - C_n)$$

**Wniosek.**

Jeśli  $m = \infty$  to  $C_{n+m} \rightarrow 0$  (gdy  $m \rightarrow \infty$ ) oraz

$$EY = \alpha \quad EZ = C_n \beta \frac{1}{(1-\beta)^2}$$

$t_{\text{syst}}$  - średni czas przebywania w SMO,

$$t_{\text{syst}} = m_{kl}/\lambda$$

$t_{\text{kol}}$  - średni czas przebywania w kolejce,

$$t_{\text{kol}} = m_k/\lambda$$

Niech  $m = \infty$  (wtedy  $\beta < 1$ )

Z - czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce.

$$P(Z > z) = \begin{cases} 1 & \text{dla } z < 0 \\ \frac{C_n}{1-\beta} e^{-\eta \mu z(1-\beta)} & \text{dla } z \geq 0 \end{cases}$$

### Klasyfikacja kolejek.

**Priorytety obsługi:**

FIFO (first in first of),

SIRO (selection in random order),

LIFO (last in first out).

Rozpatrywany przez nas priorytet to FIFO.

## Klasyfikacja Kendalla:

$$X_1/X_2/n : (N, m),$$

$X_1$  - rozkład czasu między kolejnymi zgłoszeniami,

$X_2$  - rozkład czasu obsługi jednego zgłoszenia,

$n$  - liczba stanowisk obsługi,

$N$  - liczebność obsługiwanej populacji,

$m$  - liczba miejsc w poczekalni.

Dla rozkładów  $X_1, X_2$  przyjęto m in. oznaczenia:

D - rozkład deterministyczny (równe odstępy czasu),

M - rozkład wykładniczy,

G - dowolny rozkład,

Rozpatrywany przez nas markowski SMO ma oznaczenie

$$M/M/n : (\infty, m)$$

### Przykład.

Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy,  $\lambda = 2$  zgł./h;  $\mu = 4$  zgł./h ( $\alpha = \lambda/\mu = 0,5$ ).

Wyznacz minimalną liczbę stanowisk obsługi tak aby  $P_{odm} < 0,05$ .

Sposób I.

Rozpatrujemy na przykład  $n = 2$ .

$$C_0 = \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)^{-1} = \frac{8}{13} \quad C_1 = \frac{\alpha}{1!} C_0 = \frac{4}{13} \quad C_2 = \frac{\alpha^2}{2!} C_0 = \frac{1}{13} > 0,05$$

Należy zatem zwiększyć  $n$ .

Rozpatrujemy  $n = 3$ .

$$C_0 = \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48}\right)^{-1} = \frac{48}{79}$$

$$\text{wtedy } C_1 = \frac{\alpha}{1!} C_0 = \frac{24}{79} \quad C_2 = \frac{\alpha^2}{2!} C_0 = \frac{6}{79} \quad C_3 = \frac{\alpha^3}{3!} C_0 = \frac{1}{79} < 0,05$$

Ponieważ  $C_3 = P_{odm} = 1/79 < 0,05$  zatem powinny być przynajmniej 3 stanowiska.

Sposób II (z wykorzystaniem tablic rozkładu Poissona)

Rozpatrujemy na przykład  $n = 2$ .

$$C_2 = \frac{P_{\alpha}(j)}{\sum_{j=0}^n P_{\alpha}(j)} = \frac{P_{0,5}(2)}{P_{0,5}(0) + P_{0,5}(1) + P_{0,5}(2)} = \frac{0,0758}{0,6065 + 0,3033 + 0,0758} = 0,077$$

Należy zatem zwiększyć  $n$ .

Rozpatrujemy  $n = 3$ .

$$C_3 = \frac{P_{0,5}(3)}{P_{0,5}(0) + P_{0,5}(1) + P_{0,5}(2) + P_{0,5}(3)} = \frac{0,0126}{0,6065 + 0,3033 + 0,0758 + 0,0126} = 0,0126$$

Ponieważ  $C_3 = P_{odm} = 0,0126 < 0,05$  zatem powinny być przynajmniej 3 stanowiska.

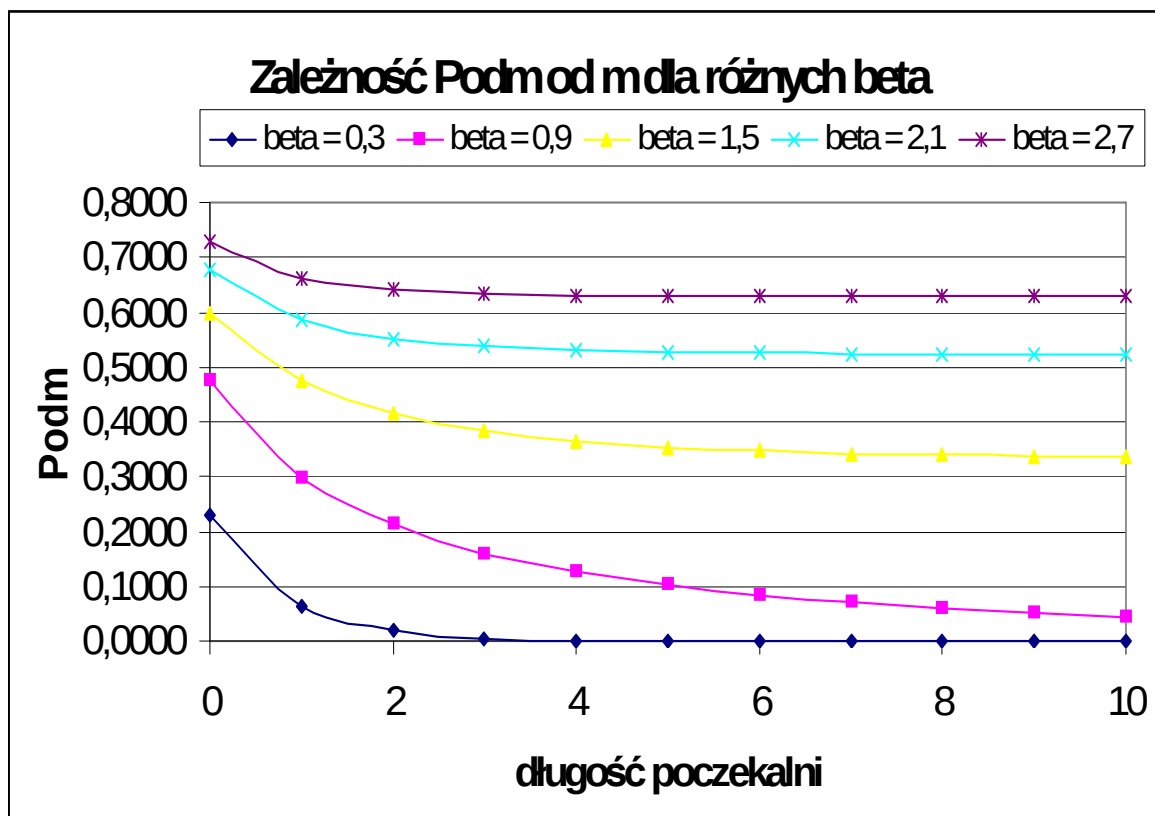
**Przykład.**

Rozpatrujemy SMO z jednym stanowiskiem obsługi. Zbadamy jak zmienia się  $P_{odm}$  dla różnych wartości  $\alpha$  gdy długość poczekalni rośnie od  $m = 0$  do  $m = 10$ .

W tym przypadku  $\alpha = \beta$ . Poszczególne kolumny zawierają  $P_{odm}$  dla ustalonego  $\beta$  i różnych  $m$ .

| beta | 0,3 | 0,9 | 1,5 | 2,1 | 2,7 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|
|------|-----|-----|-----|-----|-----|

| m  | Podm   | Podm   | Podm   | Podm   | Podm   |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0  | 0,2308 | 0,4737 | 0,6000 | 0,6774 | 0,7297 |
| 1  | 0,0647 | 0,2989 | 0,4737 | 0,5872 | 0,6633 |
| 2  | 0,0191 | 0,2120 | 0,4154 | 0,5522 | 0,6417 |
| 3  | 0,0057 | 0,1602 | 0,3839 | 0,5370 | 0,6340 |
| 4  | 0,0017 | 0,1260 | 0,3654 | 0,5300 | 0,6313 |
| 5  | 0,0005 | 0,1019 | 0,3541 | 0,5267 | 0,6302 |
| 6  | 0,0002 | 0,0840 | 0,3469 | 0,5252 | 0,6299 |
| 7  | 0,0000 | 0,0703 | 0,3422 | 0,5245 | 0,6297 |
| 8  | 0,0000 | 0,0595 | 0,3392 | 0,5241 | 0,6297 |
| 9  | 0,0000 | 0,0508 | 0,3372 | 0,5240 | 0,6296 |
| 10 | 0,0000 | 0,0437 | 0,3359 | 0,5239 | 0,6296 |



Jak widać  $P_{odm}$  maleje gdy rośnie liczba miejsc w poczekalni.

## ZADANIA

### Zadanie 1.

Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy, średnio klienci zgłaszają się co 20 minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi 5 minut.

Wyznacz minimalną liczbę stanowisk obsługi tak aby  $P_{odm} < 0,01$ .

Dla tak wyznaczonej liczby stanowisk oblicz prawdopodobieństwo:

- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest przynajmniej jeden klient,
- tego, że w SMO jest najwyżej jeden klient,
- tego, że czas między kolejnymi zgłoszeniami przekracza 0,5 godziny,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO. Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.

### Zadanie 2.

Rozpatrujemy SMO ze stratami z jednym stanowiskiem obsługi. Wiadomo, że prawdopodobieństwa odmowy obsługi wynosi 0,375 oraz, że średnio klienci zgłaszają się co 20 minut. Ile wynosi średni czas obsługi jednego klienta w tym SMO?

### Zadanie 3.

Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy z dwoma stanowiskami obsługi. Wiadomo, że prawdopodobieństwa odmowy obsługi wynosi 0,2 oraz, że średni czas obsługi jednego klienta w tym SMO wynosi 10 minut. Ile wynosi intensywność zgłoszeń w tym SMO?

### Zadanie 4.

Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy. Wiadomo, że intensywność zgłoszeń jest równa intensywności obsługi. Średnia liczba zajętych stanowisk wynosi a) 0,5 b) 0,8

Ile jest stanowisk obsługi w tym SMO?

### Zadanie 5.

Rozpatrujemy SMO z ograniczonymi stratami, bez współpracy z jednym stanowiskiem obsługi i jednym miejscem w poczekalni. . Wiadomo, że intensywność zgłoszeń jest równa intensywności obsługi. Wyznacz  $P_{odm}$  i  $m_{zs}$ .

### Zadanie 6.

Rozpatrujemy SMO z ograniczonymi stratami, bez współpracy, średnio klienci zgłaszają się co 30 minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi również 30 minut. W poczekalni są 2 miejsca. Wyznacz minimalną liczbę stanowisk obsługi tak aby  $P_{odm} < 0,001$ .

Dla tak wyznaczonej liczby stanowisk oblicz prawdopodobieństwo:

- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest przynajmniej dwóch klientów,
- tego, że w poczekalni jest najwyżej jeden klient,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO. Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.

Wyznacz średnią liczbę zajętych miejsc w poczekalni.

### Zadanie 7.

Rozpatrujemy SMO bez strat (nieskończona poczekalnia), mamy dwa kanały obsługi bez współpracy, średnio klienci zgłaszają się co 15 minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi również 15 minut. Oblicz prawdopodobieństwo:

- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest przynajmniej dwóch klientów,
- tego, że w poczekalni jest najwyżej trzech klientów,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO. Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.

Wyznacz średnią liczbę zajętych miejsc w poczekalni.

L.Kowalski 4.01.2010