

STATYSTYKA MATEMATYCZNA

WYKŁAD 4

WERYFIKACJA HIPOTEZ PARAMETRYCZNYCH

X - cecha populacji, θ – parametr rozkładu cechy X .

Wysuwamy hipotezy:
zerową (podstawową)

$$H_0(\theta = \theta_0)$$

i **alternatywną** H_1 , która ma jedną z następujących postaci

$$H_1(\theta > \theta_0), \quad H_1(\theta < \theta_0), \quad H_1(\theta \neq \theta_0)$$

Postępowanie przy weryfikacji powyższych hipotez jest następujące

1. Wybieramy pewną statystykę U_n o rozkładzie zależnym od parametru θ oraz pewną liczbę α z przedziału $(0, 1)$ i wyznaczamy podzbiór K zbioru liczb rzeczywistych tak by spełniony był warunek

$$P(U_n \in K \mid \theta = \theta_0) = \alpha$$

czyli aby prawdopodobieństwo, iż statystyka U_n przyjmie wartość ze zbioru K , **przy założeniu, że prawdziwa jest hipoteza zerowa** było równe α .

2. Pobieramy próbę i obliczamy wartość u_n statystyki U_n

3. Podejmujemy decyzje

gdy $u_n \in K$ odrzucamy H_0 ,

gdy $u_n \notin K$ przyjmujemy H_0 (nie ma podstaw do odrzucenia H_0).

Uzasadnienie:

Hipotezę H_0 odrzucamy gdy $u_n \in K$ bowiem prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $U_n \in K$ jest bardzo małe przy założeniu, że prawdziwa jest hipoteza H_0 i skoro takie zdarzenie dla pobranej próby zaszło, należy sądzić, że założenie o prawdziwości hipotezy H_0 było niesłusznie przyjęte.

Terminologia.

U_n - **sprawdzian**, (statystyka testowa)

K – **zbiór krytyczny (zbiór odrzuceń)**,

α - **poziom istotności** (typowe wartości α : 0,1; **0,05**; 0,01).

$\hat{\alpha}$ - **krytyczny poziom istotności** (poziom istotności przy którym następuje zmiana decyzji).

Błędy decyzji w teście sprawdzającym hipotezę H_0 .

	Decyzja	
	Przyjmujemy H_0	Odrzucamy H_0
H_0 - prawdziwa	Decyzja właściwa	Błąd I rodzaju
H_0 - fałszywa	Błąd II rodzaju	Decyzja właściwa

Prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju wynosi:

$$P(U_n \in K \mid H_0) = \alpha$$

Prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju wynosi:

$$P(U_n \notin K \mid H_1) = \beta$$

Testy do weryfikacji hipotez o wartości oczekiwanej

I. Cecha X populacji ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$,

σ jest znane Hipoteza zerowa $H_0(m = m_0)$

H_1	U_n	Zbiór kryt. K	Wyznaczanie liczby k	Nr testu
$H_1(m > m_0)$	$\frac{\bar{X} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$< k ; \infty)$	$\Phi(k) = 1 - \alpha$	1
$H_1(m < m_0)$		$(-\infty ; -k >$	$\Phi(k) = 1 - \alpha$	2
$H_1(m \neq m_0)$		$(-\infty ; -k > \cup < k ; \infty)$	$\Phi(k) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	3

II. Cecha X populacji ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$,

σ nie jest znane. Hipoteza zerowa $H_0(m = m_0)$

H_1	U_n	Zbiór kryt. K	Wyznaczanie liczby k	Nr testu
$H_1(m > m_0)$	$\frac{\bar{X} - m_0}{S / \sqrt{n-1}}$	$< k ; \infty)$	$P(T_{n-1} \geq k) = 2\alpha$	4
$H_1(m < m_0)$		$(-\infty ; -k >$	$P(T_{n-1} \geq k) = 2\alpha$	5
$H_1(m \neq m_0)$		$(-\infty ; -k > \cup < k ; \infty)$	$P(T_{n-1} \geq k) = \alpha$	6

III. Cecha X populacji ma dowolny rozkład, próba jest

liczna $n > 120$. Hipoteza zerowa $H_0(m = m_0)$

H_1	U_n	Zbiór kryt. K	Wyznaczanie liczby k	Nr testu
$H_1(m > m_0)$	$\frac{\bar{X} - m_0}{S / \sqrt{n}}$	$< k ; \infty)$	$\Phi(k) = 1 - \alpha$	7
$H_1(m < m_0)$		$(-\infty ; -k >$	$\Phi(k) = 1 - \alpha$	8
$H_1(m \neq m_0)$		$(-\infty ; -k > \cup < k ; \infty)$	$\Phi(k) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	9

Test do weryfikacji hipotezy o prawdopodobieństwie sukcesu

Cecha X populacji ma rozkład zerojedynekowy

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p, \quad p \in (0; 1)$$

Hipoteza zerowa $H_0(p = p_0)$

Próba liczna $n > 100$

H_1	U_n	Zbiór kryt. K	Wyznaczanie liczby k	Nr testu
$H_1(p > p_0)$	$\frac{W - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} \sqrt{n}$	$< k ; \infty$	$\Phi(k) = 1 - \alpha$	10
$H_1(p < p_0)$		$(-\infty ; -k >$	$\Phi(k) = 1 - \alpha$	11
$H_1(p \neq p_0)$	W – średnia częstość sukcesu $W = \frac{k}{n}$	$(-\infty ; -k > \cup < k ; \infty)$	$\Phi(k) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	12

Uwaga.

Dla małej próby należy stosować statystykę:

$$U = (2 \arcsin \sqrt{w} - 2 \arcsin \sqrt{p_0}) \sqrt{n}$$

która ma w przybliżeniu rozkład $N(0, 1)$.

Test do weryfikacji hipotez o odchyleniu standardowym

Cecha X populacji ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$.

Hipoteza zerowa $H_0(\sigma = \sigma_0)$

H_1	U_n	Zbiór kryt. K	Wyznaczanie liczb k i l	Nr testu
$H_1(\sigma > \sigma_0)$	$\frac{nS^2}{\sigma_0^2}$	$< k ; \infty)$	$P(Y_{n-1} \geq k) = \alpha$	13
$H_1(\sigma < \sigma_0)$		$(0 ; k >$	$P(Y_{n-1} \geq k) = 1 - \alpha$	14
$H_1(\sigma \neq \sigma_0)$		$(0 ; k > \cup < l ; \infty)$	$P(Y_{n-1} \geq l) = \alpha / 2$ $P(Y_{n-1} \geq k) = 1 - \alpha / 2$	15

Uwaga: dla $n > 30$ można stosować statystykę

$$U = \sqrt{2 \frac{nS^2}{\sigma_0^2} - 2(n-1)} \sim N(0,1)$$

o rozkładzie $N(0,1)$.

Testy do porównywania wartości oczekiwanych

Badane są dwie cechy X i Y różnych populacji. Zakładamy, że cechy te mają rozkłady normalne i są zmiennymi losowymi niezależnymi. Z populacji, w której badana jest cecha X pobrano próbę n_1 elementową, natomiast z drugiej populacji pobrano próbę n_2 elementową.

1. Cechy X i Y mają rozkłady normalne odpowiednio $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$, przy czym odchylenia standardowe σ_1 i σ_2 są znane.

Hipoteza zerowa $H_0(m_1 = m_2)$

H_1	$U_{n_1 n_2}$	Zbiór kryt. K	Wyznaczanie liczby k	Nr testu
$H_1(m_1 > m_2)$	$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$< k ; \infty)$	$\Phi(k) = 1 - \alpha$	16
$H_1(m_1 < m_2)$		$(-\infty ; -k >$	$\Phi(k) = 1 - \alpha$	17
$H_1(m_1 \neq m_2)$		$(-\infty ; -k > \cup < k ; \infty)$	$\Phi(k) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	18

2a. Cechy X i Y mają rozkłady normalne odpowiednio $N(m_1, \sigma)$, $N(m_2, \sigma)$, przy czym odchylenia standardowe obu cech są sobie równe i nie są znane. Hipoteza zerowa $H_0(m_1 = m_2)$

H_1	$U_{n_1 n_2}$	Zbiór kryt. K	Wyznaczanie liczby k	Nr testu
$H_1(m_1 > m_2)$	$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}$	$< k ; \infty)$	$P(T_{n_1+n_2-2} \geq k) = 2\alpha$	19
$H_1(m_1 < m_2)$		$(-\infty ; -k >$	$P(T_{n_1+n_2-2} \geq k) = 2\alpha$	20
$H_1(m_1 \neq m_2)$		$(-\infty ; -k > \cup$ $\cup < k ; \infty)$	$P(T_{n_1+n_2-2} \geq k) = \alpha$	21

Wielkość $S_p^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}$ nazywamy wariancją połączonych populacji.

2b. Cechy X i Y mają rozkłady normalne odpowiednio $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$, przy czym σ_1 i σ_2 nie są sobie równe i nie są znane.

Hipoteza zerowa $H_0(m_1 = m_2)$.

Hipoteza alternatywna	Sprawdzian U	Zbiór krytyczny K	Wyznaczanie liczby k	Nr testu
$H_1(m_1 > m_2)$	$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}}$	$< k ; \infty)$ $k = \frac{\frac{k_1 S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{k_2 S_2^2}{n_2 - 1}}{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}$	gdzie $P(T_{n_1-1} \geq k_1) = 2\alpha$ $P(T_{n_2-1} \geq k_2) = 2\alpha$	22
$H_1(m_1 < m_2)$		$(-\infty ; -k >$ $k \text{ jw.}$	$P(T_{n_1-1} \geq k_1) = 2\alpha$ $P(T_{n_2-1} \geq k_2) = 2\alpha$	23
$H_1(m_1 \neq m_2)$		$(-\infty ; -k > \cup < k ; \infty)$ $k \text{ jw.}$	$P(T_{n_1-1} \geq k_1) = \alpha$ $P(T_{n_2-1} \geq k_2) = \alpha$	24

3. Cechy X i Y mają rozkłady o wartościach oczekiwanych m_1, m_2 , przy czym próby są liczne, $n_1, n_2 > 120$. $H_0(m_1 = m_2)$

H_1	$U_{n_1 n_2}$	Zbiór kryt. K	Wyznaczanie liczby k	Nr testu
$H_1(m_1 > m_2)$	$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	$< k ; \infty)$	$\Phi(k) = 1 - \alpha$	25
$H_1(m_1 < m_2)$		$(-\infty ; -k >$	$\Phi(k) = 1 - \alpha$	26
$H_1(m_1 \neq m_2)$		$(-\infty ; -k > \cup < k ; \infty)$	$\Phi(k) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	27

Uwaga.

Dla prób powiązanych (dane to pary (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$), należy rozpatrywać zmienną $Z = X - Y$ i stosować odpowiednie testy dla $H_0(EZ = 0)$ i $H_1(EZ \neq 0)$, $H_1(EZ > 0)$, $H_1(EZ < 0)$.

Test do porównywania prawdopodobieństw sukcesu.

Badane są dwie cechy X i Y różnych populacji o rozkładach zerojedynkowych,

$$P(X = 1) = p_1, \quad P(X = 0) = 1 - p_1,$$

$$P(Y = 1) = p_2, \quad P(Y = 0) = 1 - p_2,$$

Z populacji, której badana jest cecha X pobrano próbę n_1 elementową, natomiast z drugiej populacji pobrano próbę n_2 elementową. Obie próby są liczne $n_1, n_2 > 100$.

Hipoteza zerowa: $H_0(p_1 = p_2)$

H_1	U_{n_1, n_2}	Zbiór kryt. K	Wyznaczanie liczby k	Nr testu
$H_1(p_1 > p_2)$	$W_1 - W_2$	$< k ; \infty)$	$\Phi(k) = 1 - \alpha$	28
$H_1(p_1 < p_2)$	$\sqrt{\bar{W}(1-\bar{W}) \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$	$(-\infty ; -k >$	$\Phi(k) = 1 - \alpha$	29
$H_1(p_1 \neq p_2)$		$(-\infty ; -k > \cup < k ; \infty)$	$\Phi(k) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	30

W_1, W_2 średnie częstości sukcesów w poszczególnych próbach,

$$W_1 = k_1 / n_1, \quad W_2 = k_2 / n_2,$$

$\bar{W} = (k_1 + k_2) / (n_1 + n_2)$ - średnia częstość sukcesu w połączonych próbach,

$$\bar{W} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \cdot W_1 + \frac{n_2}{n_1 + n_2} \cdot W_2$$

Uwaga.

Dla małej próby należy stosować statystykę:

$$U = (2 \arcsin \sqrt{W_1} - 2 \arcsin \sqrt{W_2}) \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

która ma w przybliżeniu rozkład $N(0, 1)$.

Test do weryfikacji hipotez o porównywaniu wariancji

Cechy X i Y mają rozkłady normalne odpowiednio $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$.

Z populacji, w której badana jest cecha X pobrano próbę n_1 elementową, natomiast z drugiej populacji pobrano próbę n_2 elementową.

Hipoteza zerowa $H_0(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$

Hipoteza alternatywna	Sprawdzian U	Zbiór krytyczny K	Wyznaczanie liczb k i l	Nr testu
$H_1(\sigma_1^2 > \sigma_2^2)$	$\frac{\hat{S}_{n_1}^2}{\hat{S}_{n_2}^2}$	$< k ; \infty)$	$P(F_{n_1-1; n_2-1} \geq k) = \alpha$	31
$H_1(\sigma_1^2 < \sigma_2^2)$		$(0 ; k >$	$P(F_{n_1-1; n_2-1} \geq k) = 1 - \alpha$	32
$H_1(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$		$(0 ; k > \cup < l ; \infty)$	$P(F_{n_1-1; n_2-1} \geq k) = 1 - \alpha / 2$ $P(F_{n_1-1; n_2-1} \geq l) = \alpha / 2$	33

Przykłady

Przykład.

Według danych producenta, określony typ samochodu zużywał 10 l/100km. Po dokonaniu pewnych usprawnień w tym typie samochodu oczekuje się, że zużycie paliwa spadnie. Aby to sprawdzić dokonano pomiaru zużycia paliwa w 25 losowo wybranych samochodach tego typu po modernizacji i otrzymano wynik $\bar{x}_{25} = 9,3$ l/100km. Zakładając, że zużycie paliwa ma rozkład normalny $N(m, 2)$ sprawdzić czy modernizacja istotnie zmniejszyła zużycie paliwa.

Przyjąć $\alpha = 0,05$.

Rozwiązanie.

Zastosujemy test 2.

$H_0(m = 10), H_1(m < 10), \alpha = 0,05$ zatem

$\Phi(k) = 1 - \alpha = 0,95$ stąd $k = 1,64$

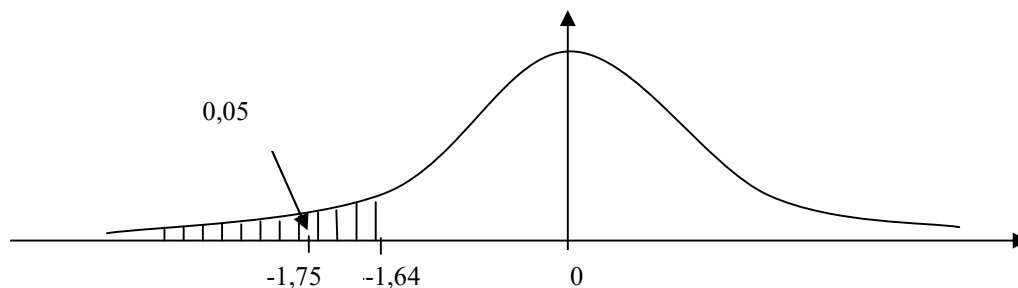
Zbiór krytyczny

$$K = (-\infty; -1,64>$$

Wartość statystyki

$$u = \frac{9,3 - 10}{2} \sqrt{25} = -1,75$$

interpretacja graficzna:



Ponieważ $u \in K$ to hipotezę H_0 odrzucamy. Zatem zmiany konstrukcyjne istotnie zmniejszyły zużycie paliwa.

Obliczymy dla jakich wartości średniej z próby 25 - elementowej decyzja byłaby taka sama:

$$\frac{\bar{x} - 10}{2} \sqrt{25} < -1,64 \Rightarrow \bar{x} < 9,34$$

Zatem dla $\bar{x} < 9,34$ wartość U należy do zbioru krytycznego.

Wyznaczymy krytyczny poziom istotności $\hat{\alpha}$.

$$\Phi(1,75) = 1 - \hat{\alpha} \cong 0,96$$

stąd $\hat{\alpha} \cong 0,04$.

Zatem dla $\alpha < 0,04$ podjęlibyśmy inną decyzję.

Zauważmy, że odrzucając hipotezę H_0 narażamy się na popełnienie błędu I rodzaju (prawdopodobieństwo jego popełnienia wynosi 0,05).

Przykład.

Dla sytuacji z poprzedniego przykładu niech $\bar{x}_{25} = 9,44$.

Rozpatrzmy hipotezy

$H_0(m = 10), H_1(m = 9)$, Zastosujemy test 2.

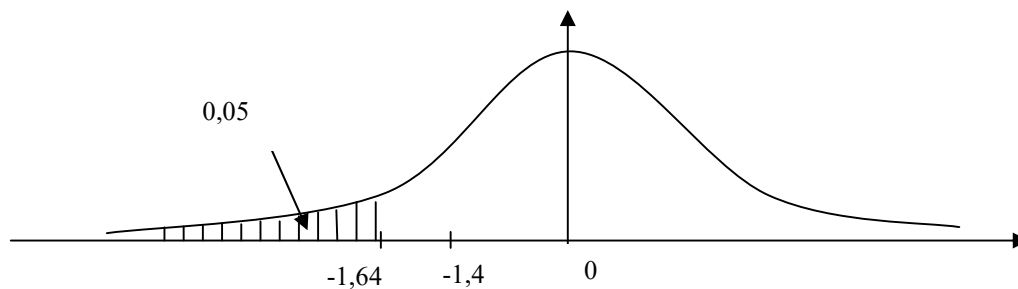
Zbiór krytyczny jak poprzednio

$$K = (-\infty; -1,64>$$

Wartość statystyki

$$u = \frac{9,44 - 10}{2} \sqrt{25} = -1,4$$

interpretacja graficzna:



Ponieważ $u \notin K$ to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 . Przyjmując hipotezę H_0 narażamy się na popełnienie błędu II rodzaju.

Wyznamy krytyczny poziom istotności $\hat{\alpha}$.

$$\Phi(1,4) = 1 - \hat{\alpha} \cong 0,92$$

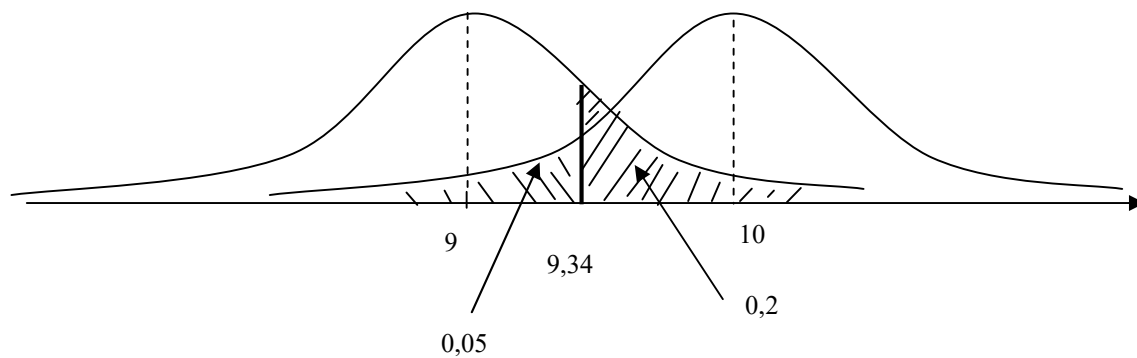
stąd $\hat{\alpha} \cong 0,08$. Zatem dla $\alpha > 0,08$ podjęlibyśmy inną decyzję.

Obliczymy prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju.

$$\begin{aligned}\beta &= P(U \notin K | m = 9) = P\left(\frac{\bar{X} - 10}{2} 5 > -1,64 | m = 9\right) = \\ &= P(\bar{X} > 9,344 | m = 9) = \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - 9}{2} 5 > \frac{9,344 - 9}{2} 5\right) = 1 - \Phi(0,86) \approx 0,2\end{aligned}$$

Zatem przyjmując hipotezę H_0 możemy zakwalifikować około 20% samochodów mających zużycie 9 l/100km jako samochody o zużyciu 10 l/100km.

Interpretacja powyższych wyników na wykresie gęstości rozkładów $N(9, 2/5)$ i $N(10, 2/5)$.



Uwaga.

Z powyższego wykresu widać, że

- gdy $|m_0 - m_1|$ rośnie (wykresy są bardziej przesunięte) to maleje p-stwo popełnienia błędu II rodzaju – dla danego zbioru krytycznego,
- gdy n rośnie to maleje p-stwo popełnienia błędu II rodzaju
- gdy maleje p-stwo popełnienia błędu I rodzaju to rośnie p-stwo popełnienia błędu II rodzaju

Moc testu

Niech $H_0(\theta = \theta_0)$, $H_1(\theta = \theta_1)$, K = zbiór krytyczny, określamy moc testu w punkcie $\theta = \theta'$ jako

$$M(\theta') = P(U \in K | \theta = \theta')$$

Jest to prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy H_0 , gdy $\theta = \theta'$

Uwaga

$$M(\theta_0) = \alpha$$

$$M(\theta_1) = 1 - \beta$$

(im większa moc testu tym mniejsze prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju)

Uwaga

Test dla weryfikacji hipotez $H_0(\theta = \theta_0)$, $H_1(\theta = \theta_1)$, jest nazywany **testem najmocniejszym**, jeśli jego moc dla $\theta' = \theta_1$ jest największa w porównaniu z innymi testami (poziom istotności ten sam).

Dla testu najmocniejszego prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju jest najmniejsze.

Przykład

Wyznamy funkcję mocy testu z poprzedniego przykładu.

Rozpatrzmy hipotezy $H_0(m = 10)$, $H_1(m = 9)$,
 $\alpha = 0,05$,
zbiór krytyczny $K = (-\infty; -1,64>$.

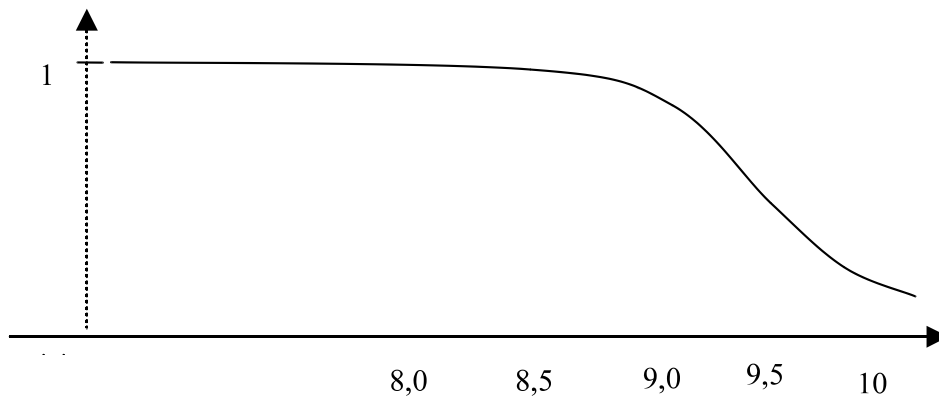
$$\begin{aligned}
M(m') &= P\left(\frac{\bar{X} - 10}{2}\sqrt{25} < -1,64 \mid m = m'\right) = \\
&= P(\bar{X} < 9,344 \mid m = m') = \Phi\left(\frac{9,344 - m'}{2}5\right)
\end{aligned}$$

Wartości funkcji zestawiamy w tabeli:

m'	$\frac{9,344 - m'}{2}5$	$M(m')$
8,0	3,36	0,9996
8,5	2,11	0,9800
9,0	0,86	0,8050
9,5	- 0,39	0,3480
10,0	- 1,64	0,0500

Zauważmy, że $\beta = 1 - M(9) \approx 0,2$

Wykres funkcji $M(m')$



Uwaga. W przypadku tego testu ogólny wzór na moc testu ma postać:

$$\begin{aligned}
 M(m') &= P\left(\frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \sqrt{n} < -k \mid m = m'\right) = P\left(\frac{\bar{X} - m'}{\sigma} \sqrt{n} < -k + \frac{m_0 - m'}{\sigma} \sqrt{n}\right) = \\
 &= 1 - \Phi\left(\Phi^{-1}(1 - \alpha) - \frac{m_0 - m'}{\sigma} \sqrt{n}\right)
 \end{aligned}$$

Przykład

Niech cecha X ma nieznany rozkład, $n = 100$, $\bar{x} = 10,5$, $s = 4$, $m_0 = 10$, $\alpha = 0,05$.

Przyjmujemy hipotezy: $H_0 (m = 10)$, $H_1 (m \neq 10)$.

Zastosujemy test 9.

$$u = \frac{\bar{x} - m_0}{s} \sqrt{n} = 1,25 \quad k = \Phi^{-1}(1 - \alpha / 2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$$

$$K = (-\infty ; -k) \cup (k ; \infty) = (-\infty ; -1,96) \cup (1,96 ; \infty)$$

Decyzja: Przyjmujemy H_0 . Możliwość popełnienia błędu II rodzaju.

Krytyczny poziom istotności.

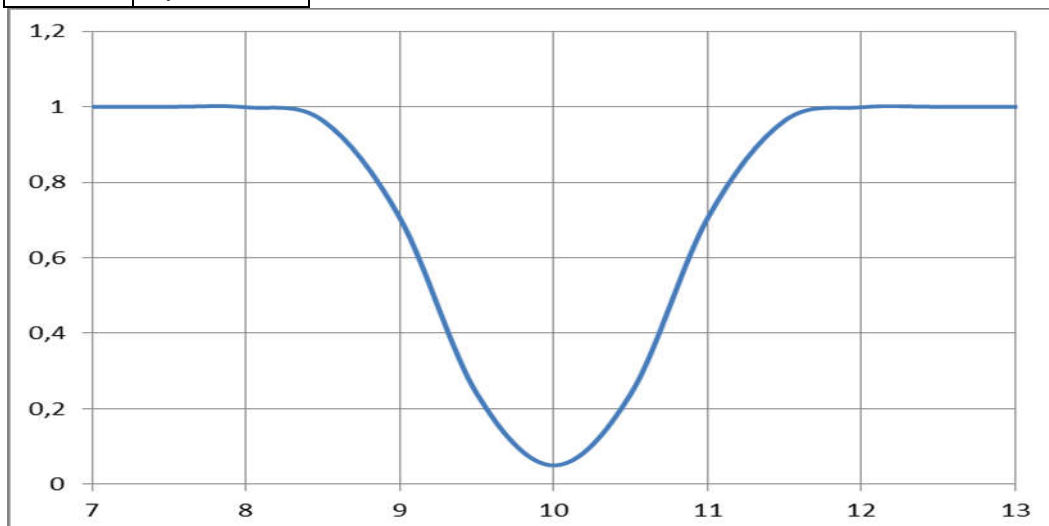
$$\Phi(|u|) = 1 - \hat{\alpha} / 2 \quad \hat{\alpha} = 2(1 - \Phi(1,25)) \approx 0,21$$

W przypadku tego testu ogólny przybliżony wzór na moc testu ma postać:

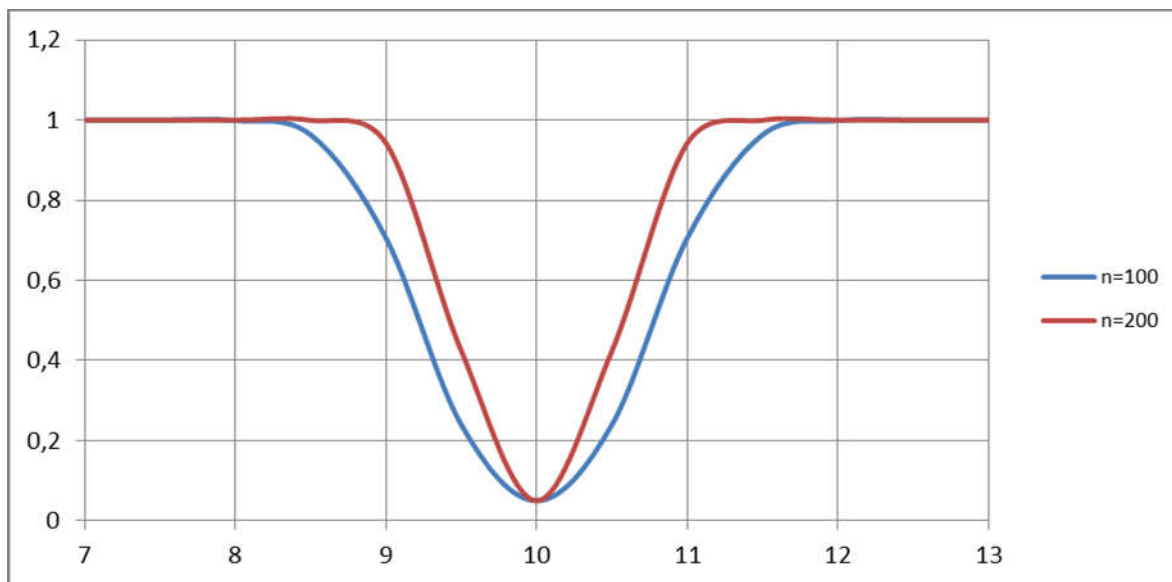
$$\begin{aligned}
 M(m') &= 1 - P\left(-k < \frac{\bar{X} - m_0}{S} \sqrt{n} < k \mid m = m'\right) = \\
 &= 1 - P\left(-k - \frac{m' - m_0}{S} \sqrt{n} < \frac{\bar{X} - m'}{S} \sqrt{n} < k - \frac{m' - m_0}{S} \sqrt{n}\right) \approx \\
 &\approx 2 - \Phi\left(\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) + \frac{m' - m_0}{S} \sqrt{n}\right) - \Phi\left(\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) - \frac{m' - m_0}{S} \sqrt{n}\right)
 \end{aligned}$$

Dla danych z tego przykładu wartości funkcji mocy zestawimy w tabelicy

m'	M(m')
8	0,99882
8,5	0,96328
9	0,70542
9,5	0,23953
10	0,05
10,5	0,23953
11	0,70542
11,5	0,96328
12	0,99882



Aby sprawdzić wpływ liczebności próby na moc testu porównajmy funkcje mocy dla $n = 100$ i $n = 200$.



Dla większej liczebności próby test ma większą moc.

Przykład

Niech cecha X ma rozkład zerojedynekowy, $n = 100$, $w = 0,65$,
 $p_0 = 0,6$, $\alpha = 0,01$.

Przyjmujemy hipotezy: $H_0 (p = 0,6)$, $H_1 (p \neq 0,6)$.

Zastosujemy test 12.

$$u = \frac{w - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} \sqrt{n} = 1,02 \quad k = \Phi^{-1}(1 - \alpha / 2) = \Phi^{-1}(0,995) = 2,576$$

$$K = (-\infty; -k) \cup (k; \infty) = (-\infty; -2,576) \cup (2,576; \infty)$$

Decyzja: Przyjmujemy H_0 . Możliwość popełnienia błędu II rodzaju.

Krytyczny poziom istotności.

$$\Phi(|u|) = 1 - \hat{\alpha} / 2 \quad \hat{\alpha} = 2(1 - \Phi(1,02)) \approx 0,31$$

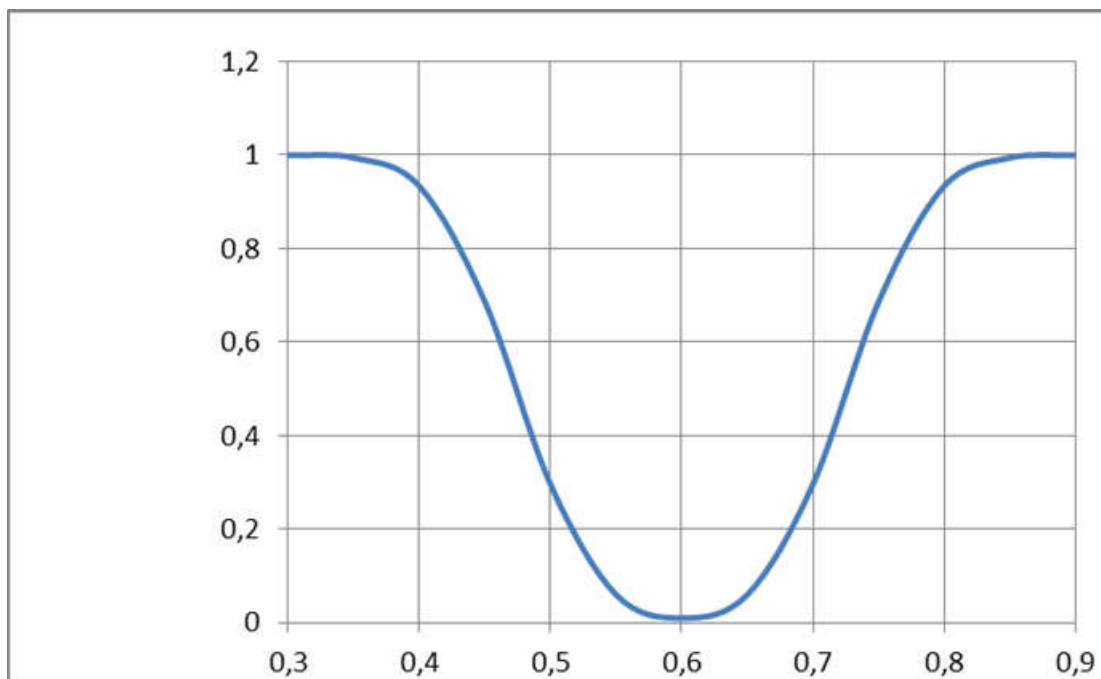
W przypadku tego testu ogólny przybliżony wzór na moc testu ma postać (jak dla testu 9):

$$M(p') = 1 - P\left(-k < \frac{W - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} < k \mid p = p'\right) \approx$$

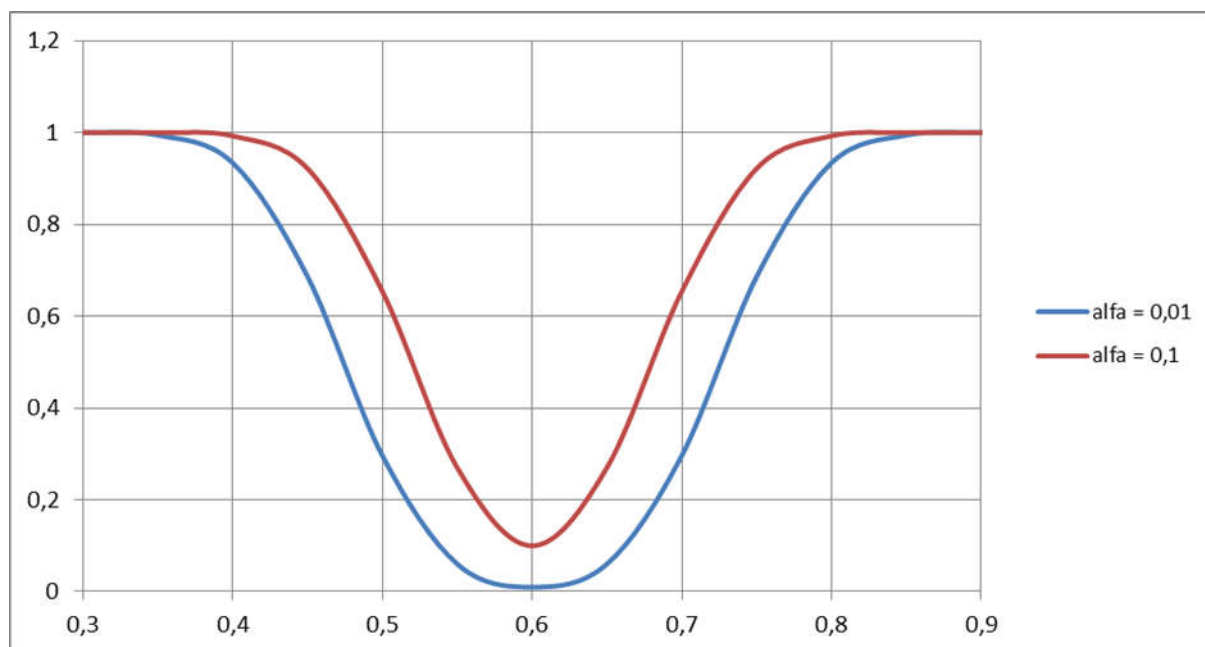
$$\approx 2 - \Phi\left(\Phi^{-1}(1-\alpha/2) + \frac{p' - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}\right) - \Phi\left(\Phi^{-1}(1-\alpha/2) - \frac{p' - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}\right)$$

Dla danych z tego przykładu wartości funkcji mocy zestawimy w tablicy

m'	M(m')
0,3	0,9998
0,35	0,9943
0,4	0,9341
0,45	0,6865
0,5	0,2965
0,55	0,0601
0,6	0,01
0,65	0,0601
0,7	0,2965
0,75	0,6865
0,8	0,9341
0,85	0,9943
0,9	0,9998



Aby sprawdzić wpływ poziomu istotności na moc testu porównajmy funkcje mocy dla $\alpha = 0,01$ i $\alpha = 0,1$.



Dla większego poziomu istotności test ma większą moc.

Przykład

Dwie brygady produkują detale. Z partii detali wyprodukowanych przez I brygadę wylosowano 1000 szt. i wśród nich było 20 braków. Z partii detali wyprodukowanych przez II brygadę wylosowano 900 szt. i wśród nich było 30 braków. Na poziomie istotności $\alpha = 0,01$ sprawdzić hipotezę, że odsetek braków w I brygadzie jest niż niższy niż w II brygadzie.

Rozwiązanie.

Zastosujemy test 26.

$$H_0(p_1 = p_2), H_1(p_1 < p_2), \quad \alpha = 0,01$$

Zbiór krytyczny

$$K = (-\infty; -2,33>$$

Obliczamy:

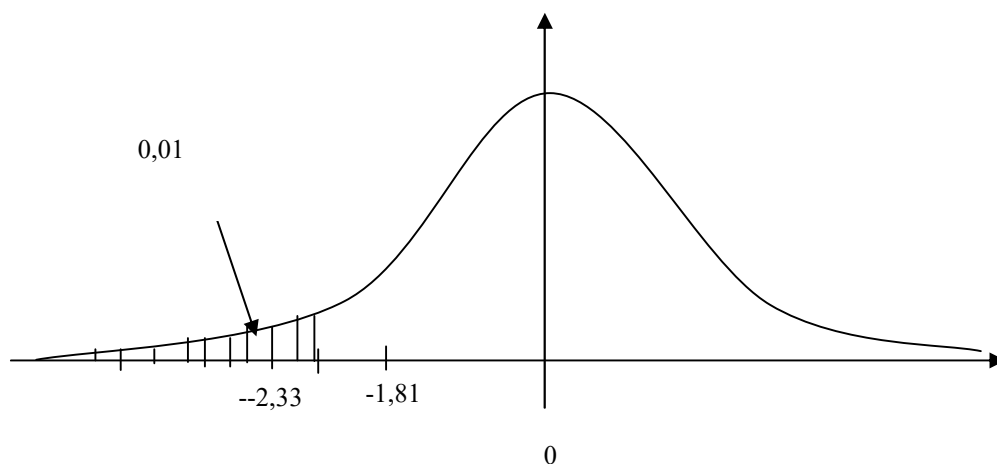
$$w_1 = 20/1000; w_2 = 30/900$$

$$\bar{w} = 50/1900$$

Wartość statystyki

$$u = -1,81$$

interpretacja graficzna:



Ponieważ $u \notin K$ to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 . Oznacza to, że w granicach błędu statystycznego obie brygady mają ten sam odsetek braków.

Wyznaczymy krytyczny poziom istotności $\hat{\alpha}$.

$$\Phi(1,81) = 1 - \hat{\alpha} \cong 0,96485$$

stąd $\hat{\alpha} \cong 0,035$. Zatem dla $\alpha > 0,035$ podjęlibyśmy inną decyzję.

Przykład.

Dokładność pracy obrabiarki sprawdza się wyznaczając odchylenie standardowe średnicy toczzonego detalu, powinno ono wynosić $\sigma_0 = 0,2$. Zmierzono średnice (mm) 11 losowo wybranych detali i otrzymano:

100,6; 99,6; 100,0; 100,1; 100,3; 100,0; 99,9; 100,2;
100,4; 100,6; 100,5.

Zakładając, że średnice detali mają rozkład normalny, sprawdzić na podstawie powyższych danych, że obrabiarka ma pożądaną dokładność. Przyjąć poziom istotności 0,05.

Rozwiązanie.

Zastosujemy test 25.

$$H_0(\sigma = 0,2), H_1(\sigma > 0,2), \quad \alpha = 0,05$$

Zbiór krytyczny

$$K = <18,307; \infty)$$

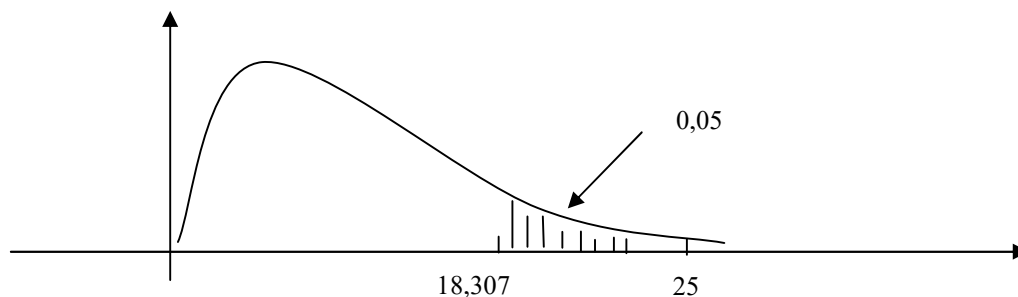
Obliczamy:

$$\bar{x}_{11} = 100,2 \quad s_{11}^2 = 0,091$$

Wartość statystyki

$$u = \frac{11 \cdot 0,091}{0,04} = 25$$

interpretacja graficzna:



Ponieważ $u \in K$ to hipotezę H_0 odrzucamy. Zatem należy sądzić, że obrabiarka ma gorszą dokładność niż pożądana.

Wyznamy krytyczny poziom istotności $\hat{\alpha}$.

$$Y_{10}(25) = \hat{\alpha} \cong 0,005$$

Zatem dla $\alpha < 0,005$ podjęlibyśmy inną decyzję.

Funkcje programu EXCEL przydatne do weryfikacji hipotez parametrycznych.

Do wyznaczania zbiorów krytycznych możemy stosować funkcje programu EXCEL zaprezentowane w podrozdziale 5.4 poprzedniego rozdziału.

Przykłady wyznaczania krytycznego poziomu istotności.

Przykład

Niech cecha X – czas odpowiedzi [s] na pytanie testowe. Zanotowano wyniki 2; 2,7; 2,5; 2,9; 2,6; 2,3 (dane symboliczne, poprawna liczebność próby powinna być większa).

Chcemy sprawdzić hipotezy: H_0 ($m = 2,6$), H_1 ($m > 2,6$) dla poziomu istotności 0,05.

Stosujemy funkcję

$Z.TEST(tablica; m_0; [\sigma])$

która wyznacza krytyczny poziom istotności dla testu prawostronnego.

$Z.TEST(\{2; 2,7; 2,5; 2,9; 2,6; 2,3\}; 2,6) = 0,219289$

Wniosek.

Dla poziomu istotności 0,05 hipotezę H_0 ($m = 2,6$) należy przyjąć bo $0,219289 > 0,05$.

Jeśli chcemy sprawdzić hipotezy: H_0 ($m = 2,6$), H_1 ($m \neq 2,6$).

Stosujemy funkcję

$2 * \min(Z.TEST(tablica; m_0; [\sigma]); 1 - Z.TEST(tablica; m_0; [\sigma]))$

która wyznacza krytyczny poziom istotności dla testu dwustronnego.

$2 * \min(Z.TEST(\{2; 2,7; 2,5; 2,9; 2,6; 2,3\}; 2,6); 1 - Z.TEST(\{2; 2,7; 2,5; 2,9; 2,6; 2,3\}; 2,6)) = 0,438578$

x_i	m_0	test	p
2	2,4	prawostronny	0,219289
2,7		dwustronny	0,438578
2,5			
2,9			
2,3			
2,6			

← =Z.TEST(a2:a7;2,4)

← =2*MIN(Z.TEST(a2:a7;2,4);1-Z.TEST(a2:a7;2,4))

Uwaga. Z funkcji tej możemy też korzystać dla rozkładu zerojedynekowego (dane w postaci zer i jedynek).

Do porównań dwóch wartości oczekiwanych stosujemy funkcję

`T.TEST(tablica1;tablica2;strony;typ)`

która wyznacza krytyczny poziom istotności

Składnia funkcji T.TEST:

- **Tablica1** Pierwszy zbiór danych.
- **Tablica2** Drugi zbiór danych.
- **Strony** Określa rodzaj hipotezy alternatywnej. Jeśli argument strony = 1, funkcja T.TEST stosuje hipotezę alternatywną jednostronną. Jeśli argument strony = 2, funkcja T.TEST stosuje hipotezę alternatywną dwustronną.
- **Typ** Typ testu t, który chcemy zastosować.
Typ = 1 oznacza test dla danych sparowanych.
Typ = 2 oznacza test dla danych, których wariancje są równe dla dwóch prób.
Typ = 3 oznacza test dla danych, których wariancje nie są równe dla dwóch prób.

Przykład

Niech cecha X – dochody [tys. zł] w firmie A. Zanotowano wyniki 3; 4; 5; 8; 9; 1; 2; 4; 5.

Niech cecha Y – dochody [tys. zł] w firmie B. Zanotowano wyniki 6; 19; 3; 2; 14; 4; 5; 17; 1.

Chcemy sprawdzić hipotezy: $H_0 (m_1 = m_2)$, $H_1 (m_1 \neq m_2)$ dla poziomu istotności 0,05.

Stosujemy funkcję

`T.TEST(tablica1;tablica2;2;3)`

która wyznacza krytyczny poziom istotności dla testu dwustronnego i dla danych, których wariancje nie są równe.

x_i	y_i
3	6
4	19
5	3
8	2
9	14
1	4
2	5
4	17
5	1

s_1	s_2
2,4545	6,4712

p
0,202294



`=T.TEST(a2:a10;b2:b10;2;3)`

Czyli

`T.TEST({3; 4; 5; 8; 9; 1; 2; 4; 5};{6; 19; 3; 2; 14; 4; 5; 17; 1};2;3) = 0,202294`

Wniosek.

Dla poziomu istotności 0,05 hipotezę $H_0 (m_1 = m_2)$ należy przyjąć bo $0,202294 > 0,05$.

Do porównań dwóch wariancji (odchyłeń standardowych) stosujemy funkcję

F.TEST(tablica1;tablica2)

która wyznacza krytyczny poziom istotności dla dwustronnej hipotezy alternatywnej.

Składnia funkcji F.TEST:

- Tablica1 Pierwszy zbiór danych.
- Tablica2 Drugi zbiór danych.

Przykład

Dla danych z poprzedniego przykładu chcemy sprawdzić hipotezy:

$$H_0(\sigma_1^2 = \sigma_2^2), \quad H_0(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$$

dla poziomu istotności 0,05.

Stosujemy funkcję F.TEST(tablica1;tablica2).

x_i	y_i
3	6
4	19
5	3
8	2
9	14
1	4
2	5
4	17
5	1

p
0,01276



=T.TEST(a2:a10;b2:b10)

Czyli

F.TEST({3; 4; 5; 8; 9; 1; 2; 4; 5};{6; 19; 3; 2; 14; 4; 5; 17; 1}) = 0,01276

Wniosek.

Dla poziomu istotności 0,05 hipotezę $H_0(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ należy odrzucić bo $0,01276 < 0,05$.

Uwaga. W module „Analiza danych” są odpowiedniki wszystkich powyższych funkcji.