

STATYSTYKA MATEMATYCZNA

WYKŁAD 3

PRZEDZIAŁY UFNOŚCI

Niech θ - nieznany parametr rozkładu cechy X . Niech α będzie liczbą z przedziału $(0, 1)$.

Jeśli istnieją statystyki, $\underline{U}_n$ i $\overline{U}_n$;

$\underline{U}_n < \overline{U}_n$; których rozkład zależy od θ oraz

$$P\left(\underline{U}_n \leq \theta \leq \overline{U}_n\right) = 1 - \alpha$$

to przedział losowy

$$\left\langle \underline{U}_n ; \overline{U}_n \right\rangle$$

nazywamy **przedziałem ufności** dla parametru θ , na poziomie ufności $1 - \alpha$.

Jeśli na podstawie próby obliczymy wartości $\underline{u}_n$ i $\overline{u}_n$ statystyk $\underline{U}_n$ i $\overline{U}_n$ to otrzymamy **liczbowy przedział ufności**.

$1 - \alpha$ = poziom ufności.

W praktyce $1 - \alpha = 0,9 \dots 0,95 \dots 0,99$.

$1 - \alpha = 0,95$ to **wartość standardowa**.

Interpretacja poziomu ufności $1 - \alpha$.

Na ogół dla różnych prób otrzymuje się różne liczbowe przedziały ufności, lecz należy oczekiwać, że około $(1 - \alpha)100\%$ z nich będzie zawierać rzeczywistą wartość parametru θ .

Np. dla $1 - \alpha = 0,99$ oczekujemy, że przeciętnie w tylko 1 próbie na 100 otrzymany liczbowy przedział ufności nie będzie zawierał parametru θ .

Uwaga. Z powyższej interpretacji wynika, że poziom ufności nie może być zbyt niski.

Jeśli natomiast zwiększamy nadmiernie wartość poziomu ufności to rośnie długość przedziału ufności i spada jakość oszacowania parametru (rośnie błąd bezwzględny i błąd względny).

Dlatego przyjmuje się, że najbardziej odpowiednie wartości poziomu ufności mieszczą się w granicach 0,9 - 0,99.

Uwaga. Jeśli chcemy poprawić jakość oszacowania nieznanego parametru przedziałem ufności to należy zwiększyć liczebność próby.



Jerzy Neyman (1894-1981), statystyk.

Wprowadził i rozwinął pojęcie przedziału ufności.

Zestawienie najważniejszych przedziałów ufności.

Poziom ufności = $1 - \alpha$

(typowe wartości $1 - \alpha$: 0,9; **0,95**; 0,99).

L.p.	Parametr	Rozkład cechy, założenia	Przedział ufności	Wyznaczanie liczby u_α	Błąd względny δ
1	Wartość oczekiwana m	Normalny $N(m, \sigma)$, σ – jest znane	$< \bar{X} - \frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}} >$	$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	$\frac{\sigma u_\alpha}{\bar{x} \sqrt{n}}$
2	Wartość oczekiwana m	Normalny $N(m, \sigma)$, σ – nie jest znane	$< \bar{X} - \frac{S u_\alpha}{\sqrt{n-1}}; \bar{X} + \frac{S u_\alpha}{\sqrt{n-1}} >$	$P(T_{n-1} \geq u_\alpha) = \alpha$	$\frac{S u_\alpha}{\bar{X} \sqrt{n-1}}$
3	Wartość oczekiwana m	Dowolny Liczna próba $n > 80$	$< \bar{X} - \frac{S u_\alpha}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{S u_\alpha}{\sqrt{n}} >$	$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	$\frac{S u_\alpha}{\bar{X} \sqrt{n}}$

4	Wariancja σ^2	Normalny $N(m, \sigma)$,	$< \frac{nS^2}{u_1}; \frac{nS^2}{u_2} >$	$P(Y_{n-1} \geq u_1) = \frac{\alpha}{2}$ $P(Y_{n-1} \geq u_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	—
5	Odchylenie standardowe σ	Normalny $N(m, \sigma)$,	$< \sqrt{\frac{nS^2}{u_1}}; \sqrt{\frac{nS^2}{u_2}} >$	$P(Y_{n-1} \geq u_1) = \frac{\alpha}{2}$ $P(Y_{n-1} \geq u_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	—
6	Odchylenie standardowe σ	Normalny $N(m, \sigma)$, liczna próba $n > 80$	$< S - \frac{u_\alpha S}{\sqrt{2n}}; S + \frac{u_\alpha S}{\sqrt{2n}} >$	$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	$\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}$
7	Wariancja σ^2	Normalny $N(m, \sigma)$, liczna próba $n > 80$	$< (S - \frac{u_\alpha S}{\sqrt{2n}})^2; (S + \frac{u_\alpha S}{\sqrt{2n}})^2 >$	$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	—

8	Prawdopodobieństwo sukcesu p	Rozkład zerojedynekowy $P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$ liczna próba, $n > 100$	$\left\langle W - u_\alpha \sqrt{\frac{W(1-W)}{n}}; W + u_\alpha \sqrt{\frac{W(1-W)}{n}} \right\rangle$ Gdzie $W = k/n$ k -liczba sukcesów	$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	$\frac{u_\alpha}{W} \sqrt{\frac{W(1-W)}{n}}$

ϕ – dystrybuanta rozkładu normalnego $N(0,1)$

T_{n-1} – zmienna losowa o rozkładzie Studenta z $n - 1$ stopniami swobody

Y_{n-1} – zmienna losowa o rozkładzie chi kwadrat (χ^2) z $n - 1$ stopniami swobody.

Uzasadnienie

- 1) Rozpatrujemy standaryzowaną statystykę

$$U = \frac{\bar{X} - m}{\sigma} \sqrt{n} \quad (\text{ma rozkład } N(0;1)).$$

Rozkład normalny jest symetryczny więc szukamy przedziału $[-u_\alpha, u_\alpha]$ aby

$$P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Z powyższego warunku wynika równość

$$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

stąd znajdujemy w tablicach dystrybuantry rozkładu normalnego $N(0;1)$ wartość u_α .

Przekształcamy:

$$P(-u_{\alpha} < \frac{\bar{X} - m}{\sigma} \sqrt{n} < u_{\alpha}) = 1 - \alpha$$

$$P(\frac{-u_{\alpha}\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - m < \frac{u_{\alpha}\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$$P(-\bar{X} - \frac{u_{\alpha}\sigma}{\sqrt{n}} < -m < -\bar{X} + \frac{u_{\alpha}\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

ostatecznie

$$P(\bar{X} - \frac{u_{\alpha}\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + \frac{u_{\alpha}\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

- 2) Korzystamy z rozkładu t-Studenta
Rozpatrujemy statystykę

$$U = \frac{\bar{X} - m}{S} \sqrt{n-1} \quad (\text{ma rozkład } T_{n-1}).$$

Rozkład Studenta jest symetryczny więc
szukamy przedziału $[-u_\alpha, u_\alpha]$ aby

$$P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Z powyższego warunku wynika równość

$$P(|T_{n-1}| \geq u_\alpha) = \alpha$$

stąd znajdujemy w tablicach rozkładu
Studenta wartość u_α .

Przekształcamy:

$$P(-u_{\alpha} < \frac{\bar{X} - m}{S} \sqrt{n-1} < u_{\alpha}) = 1 - \alpha$$

$$P(\frac{-u_{\alpha}S}{\sqrt{n-1}} < \bar{X} - m < \frac{u_{\alpha}S}{\sqrt{n-1}}) = 1 - \alpha$$

$$P(-\bar{X} - \frac{u_{\alpha}S}{\sqrt{n-1}} < -m < -\bar{X} + \frac{u_{\alpha}S}{\sqrt{n-1}}) = 1 - \alpha$$

ostatecznie

$$P(\bar{X} - \frac{u_{\alpha}S}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{X} + \frac{u_{\alpha}S}{\sqrt{n-1}}) = 1 - \alpha$$

3) Dla dużych prób, statystyka

$U = \frac{\bar{X} - m}{S} \sqrt{n}$ ma w przybliżeniu rozkład normalny $N(0,1)$. Wówczas przedział ufności ma taki kształt jak w 1)

$$P\left(\bar{X} - \frac{u_{\alpha} S}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + \frac{u_{\alpha} S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

przedział nr 4:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{nS^2}{u_1} \leq \sigma^2 \leq \frac{nS^2}{u_2}\right) &= P\left(\sigma^2 \leq \frac{nS^2}{u_2}\right) - P\left(\sigma^2 \leq \frac{nS^2}{u_1}\right) = \\ &= P\left(\frac{nS^2}{\sigma^2} \geq u_2\right) - P\left(\frac{nS^2}{\sigma^2} \geq u_1\right) = P(Y_{n-1} > u_2) - P(Y_{n-1} > u_1) = \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha \end{aligned}$$

Zadanie 1.

Trwałość żarówek z pewnej partii jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym $N(m, 100 \text{ h})$. Z partii tej pobrano próbę 16 żarówek i otrzymano $\bar{x} = 2670 \text{ h}$. Oszacujemy średnią trwałość żarówek z tej partii przedziałem ufności, na poziomie ufności $1 - \alpha = 0,95$. Znajdziemy względny błąd tego oszacowania.

Rozwiązanie.

Zastosujemy przedział ufności nr 1:

$$< \bar{X} - \frac{\sigma u_{\alpha}}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{\sigma u_{\alpha}}{\sqrt{n}} > .$$

Mamy $\Phi(u_{\alpha}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$, stąd $u_{\alpha} = 1,96$,
więc błąd (bezwzględny), czyli połowa
długości przedziału ufności

$$\Delta = \frac{\sigma u_{\alpha}}{\sqrt{n}} = \frac{100 \cdot 1,96}{\sqrt{16}} = 49 \text{ h},$$

zatem szukanym przedziałem ufności jest przedział

$$< 2670 - 49 ; 2670 + 49 > = < 2621 ; 2719 >.$$

Błąd względny $\delta = \frac{\sigma u_{\alpha}}{\bar{x}\sqrt{n}} = \frac{\Delta}{\bar{x}} = \frac{49}{2670} = 1,8\%.$

Uwaga

Niekiedy w **praktyce** przyjmuje się, że:

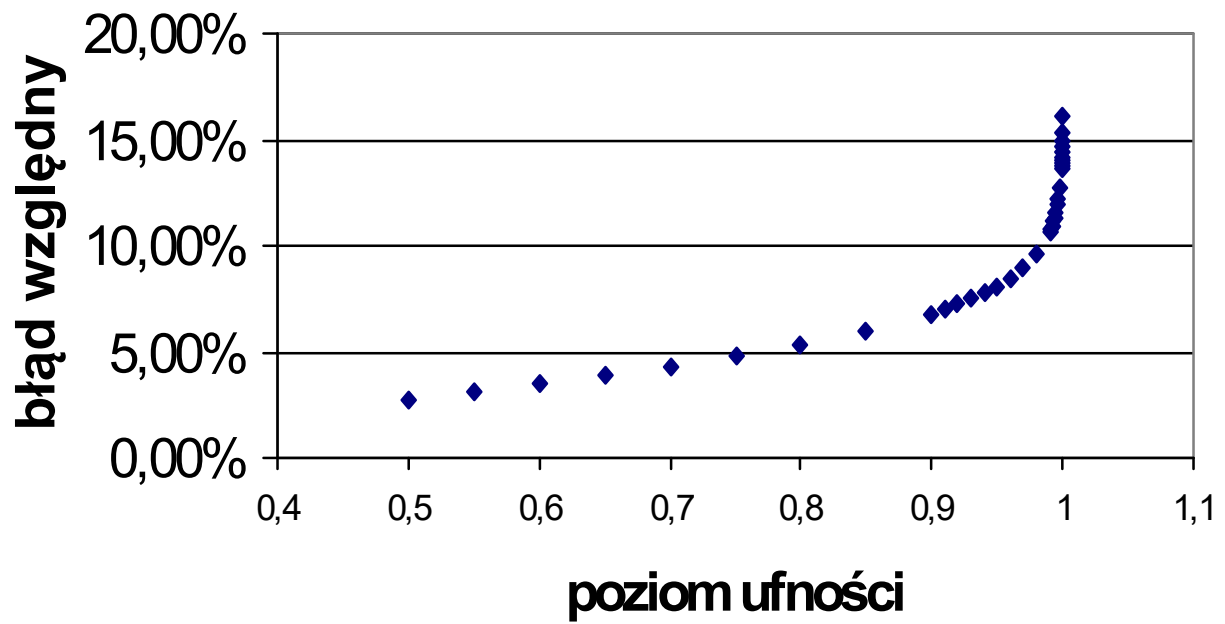
- Względny błąd oszacowania $\delta \leq 5\%$ jest dobry tzn. niski.
- Względny błąd oszacowania $5\% < \delta \leq 10\%$ jest zadawalający.
- Względny błąd oszacowania $\delta > 10\%$ jest niezadawalający.

Przykład.

Badana cecha ma rozkład $N(m, 2)$. Średnia z próby 10 elementowej wynosi 25. Wyznamy przedziały ufności dla wartości oczekiwanej dla różnych poziomów ufności. Sprawdzimy jak zmienia się błąd względny przy rozpatrywanych poziomach ufności.

$1-\alpha$	$1-\alpha/2$	u_α	lewy-k	prawy-k	bł.wzgl
0,8	0,9	1,282	23,68	26,32	5,29%
0,85	0,925	1,440	23,51	26,49	5,95%
0,9	0,95	1,645	23,30	26,70	6,80%
0,91	0,955	1,695	23,25	26,75	7,00%
0,92	0,96	1,751	23,19	26,81	7,23%
0,93	0,965	1,812	23,13	26,87	7,49%
0,94	0,97	1,881	23,06	26,94	7,77%
0,95	0,975	1,960	22,98	27,02	8,10%
0,96	0,98	2,054	22,88	27,12	8,48%
0,97	0,985	2,170	22,76	27,24	8,97%
0,98	0,99	2,326	22,60	27,40	9,61%
0,99	0,995	2,576	22,34	27,66	10,64%
0,991	0,9955	2,612	22,30	27,70	10,79%
0,992	0,996	2,652	22,26	27,74	10,96%
0,993	0,9965	2,697	22,21	27,79	11,14%
0,994	0,997	2,748	22,16	27,84	11,35%
0,995	0,9975	2,807	22,10	27,90	11,60%
0,996	0,998	2,878	22,03	27,97	11,89%
0,997	0,9985	2,968	21,93	28,07	12,26%
0,998	0,999	3,090	21,81	28,19	12,77%
0,999	0,9995	3,290	21,60	28,40	13,59%

błąd względny jako funkcja poziomu ufności



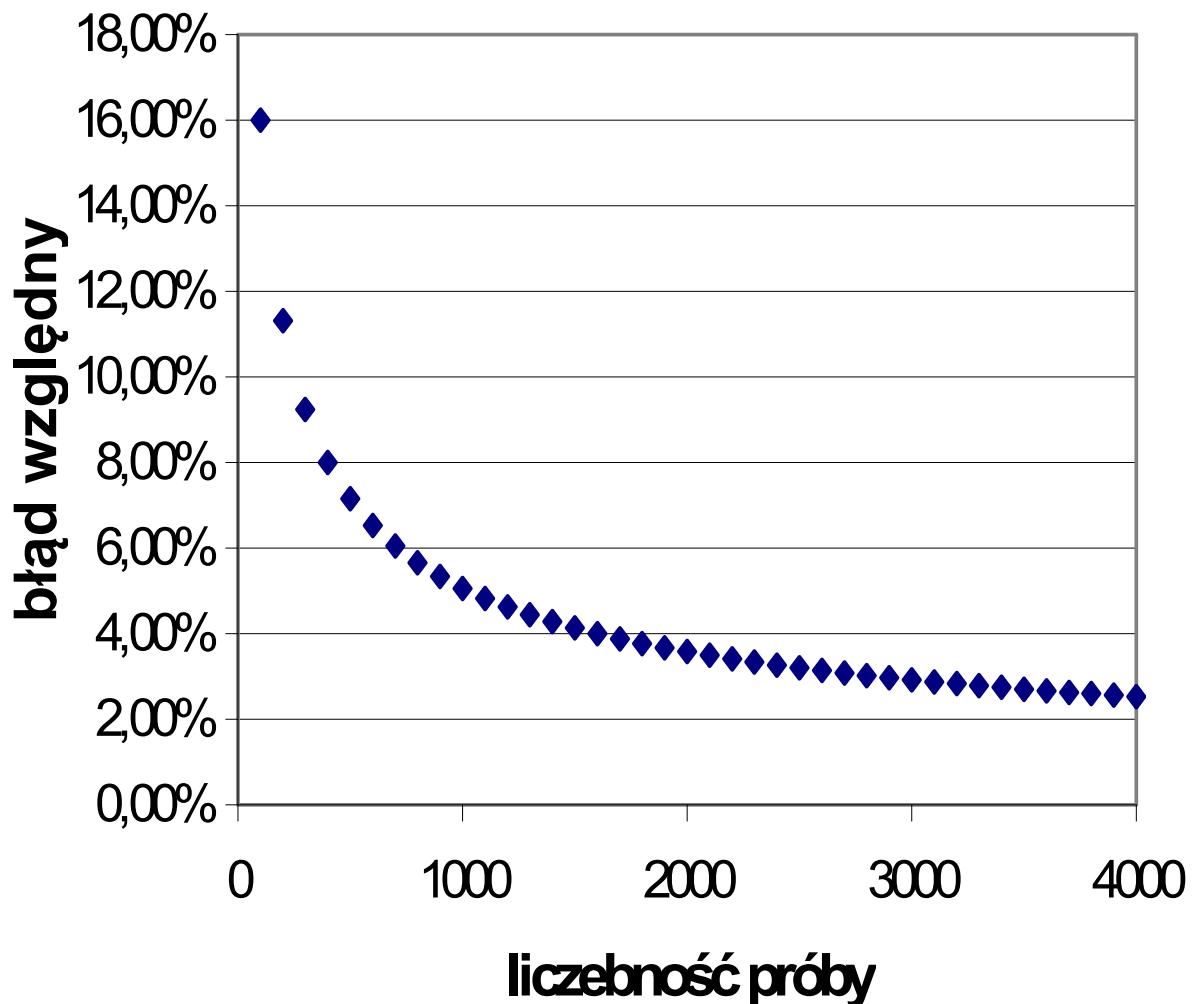
Przykład.

Zapytano 1000 wylosowanych dorosłych osób czy popierają wprowadzenie kary śmierci. Sześćset osób odpowiedziało twierdząco. Na poziomie ufności 0,95 oszacować odsetek wszystkich dorosłych osób popierających wprowadzenie kary śmierci. Zakładając, że rozpatrywane próby są reprezentatywne rozwiążemy powyższe zadanie dla prób o różnych liczebnościach. W każdym przypadku obliczymy błąd względny.

n	k	1-α	1-$\alpha/2$	u_α	w
1000	600	0,95	0,975	1,96	0,6

n	lewy-k	prawy-k	bł.wzgl
100	0,5040	0,6960	16,00%
200	0,5321	0,6679	11,32%
300	0,5446	0,6554	9,24%
400	0,5520	0,6480	8,00%
500	0,5571	0,6429	7,16%
600	0,5608	0,6392	6,53%
700	0,5637	0,6363	6,05%
800	0,5661	0,6339	5,66%
900	0,5680	0,6320	5,33%
1000	0,5696	0,6304	5,06%
1100	0,5710	0,6290	4,83%
1200	0,5723	0,6277	4,62%
1300	0,5734	0,6266	4,44%
1400	0,5743	0,6257	4,28%
1500	0,5752	0,6248	4,13%
1600	0,5760	0,6240	4,00%
1700	0,5767	0,6233	3,88%
1800	0,5774	0,6226	3,77%
1900	0,5780	0,6220	3,67%
2000	0,5785	0,6215	3,58%

błąd względny jako funkcja liczebności próby



Wniosek.

Błąd względny zmniejsza się wraz ze wzrostem liczebności próby.

Przedziały ufności dla prawdopodobieństwa sukcesu p.

Model 1 (standardowy, przedział nr 8 w powyższym zestawieniu)

Model 2 (poprawka na ciągłość)

$$p \in \left\langle \left(W - \frac{1}{2n} \right) - u_{\alpha} \sqrt{\frac{W(1-W)}{n}}; \left(W + \frac{1}{2n} \right) + u_{\alpha} \sqrt{\frac{W(1-W)}{n}} \right\rangle$$

Gdzie $\Phi(u_{\alpha}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

Model 3 (skorygowana poprawka na ciągłość)

$$p \in \frac{n}{n+u_\alpha^2} \left\langle \left(W + \frac{u_\alpha^2}{2n} \right) - u_\alpha \sqrt{\frac{W(1-W)}{n} + \left(\frac{u_\alpha}{2n} \right)^2}; \left(W + \frac{u_\alpha^2}{2n} \right) + u_\alpha \sqrt{\frac{W(1-W)}{n} + \left(\frac{u_\alpha}{2n} \right)^2} \right\rangle$$

Gdzie $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

Model 4 (mała próba)

$$p \in \left(\frac{k}{k + (n - k + 1)u_1}; \frac{(k + 1)u_2}{n - k + (k + 1)u_2} \right)$$

gdzie $u_1 = F_{[2(n-k+1); 2k; \alpha/2]}$ $u_2 = F_{[2(k+1); 2(n-k); \alpha/2]}$

to kwantyle rozkładu F Snedecora (można zastosować funkcję EXCELA ROZKŁAD.F.ODW.

Porównanie modelu 1 i 4.

(1- α = 0,95), n – liczebność próby

Wygenerowano liczby losowe o rozkładzie zerojedynkowym z parametrem p o różnych liczebnościach.

Wyniki dla N = 100 prób losowych. Wynik dobry oznacza, że p należało do przedziału.

n	p	dobry wynik - model 1	dobry wynik - model 4
5	0,1	32	99
5	0,5	86	99
10	0,1	67	99
10	0,5	88	98
30	0,1	86	99
30	0,5	96	96
50	0,1	92	97
50	0,5	95	96

Wniosek: model 4 (inaczej niż model 1) ma dobre własności nawet przy małych próbach i jest niewrażliwy na niskie wartości p.

Przedział ufności dla parametru σ rozkładu normalnego ($n \geq 50$).
Skorygowany przedział nr 6.

$$\sigma \in \left\langle \frac{S\sqrt{2n}}{\sqrt{2n-3}+u_\alpha}; \frac{S\sqrt{2n}}{\sqrt{2n-3}-u_\alpha} \right\rangle$$

Gdzie $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

Przedział ufności dla parametru λ rozkładu Poissona (próba liczna).

$$\lambda \in \left\langle \bar{X} - u_{\alpha} \sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}; \bar{X} + u_{\alpha} \sqrt{\frac{\bar{X}}{n}} \right\rangle$$

Gdzie $\Phi(u_{\alpha}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

Przedział ufności dla parametru a rozkładu wykładniczego (próba liczna).

$$a \in \left\langle \frac{1}{\bar{X}} - \frac{u_\alpha}{\bar{X}\sqrt{n}}; \frac{1}{\bar{X}} + \frac{u_\alpha}{\bar{X}\sqrt{n}} \right\rangle$$

Gdzie $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

5.4 Funkcje programu EXCEL przydatne do estymacji przedziałowej.

Przykład

Wyznacz kwantyle rzędu 0,01; 0,05; 0,1; 0,9; 0,95; 0,99 dla

- a) rozkładu $N(0; 1)$,
- b) rozkładu Studenta z 20 stopniami swobody,
- c) rozkładu chi kwadrat z 10 stopniami swobody,
- d) rozkładu F-Snedecora z (10 , 20) stopniami swobody

Ad. a)

ROZKŁ.NORMALNY.S.ODWR(0,01) = -2,3263

ROZKŁ.NORMALNY.S.ODWR(0,05) = -1,6449

ROZKŁ.NORMALNY.S.ODWR(0,1) = -1,2816

ROZKŁ.NORMALNY.S.ODWR(0,9) = 1,2816

ROZKŁ.NORMALNY.S.ODWR(0,95) = 1,6449

ROZKŁ.NORMALNY.S.ODWR(0,99) = 2,3263

Symetria wyników wynika z symetrii rozkładu.

Ad. b)

$$\text{ROZKŁ.T.ODWR}(0,01;20) = -2,52798$$

$$\text{ROZKŁ.T.ODWR}(0,05;20) = -1,72472$$

$$\text{ROZKŁ.T.ODWR}(0,1;20) = -1,32534$$

$$\text{ROZKŁ.T.ODWR}(0,9;20) = 1,32534$$

$$\text{ROZKŁ.T.ODWR}(0,95;20) = 1,72472$$

$$\text{ROZKŁ.T.ODWR}(0,99;20) = 2,52798$$

Symetria wyników wynika z symetrii rozkładu. Zauważmy, że już dla 20 stopni swobody rozkład Studenta ma zbliżony rozkład do $N(0; 1)$.

Ad. c)

$$\text{ROZKŁ.CH.I.ODWR}(0,01;10) = 2,5582$$

$$\text{ROZKŁ.CH.I.ODWR}(0,05;10) = 3,9403$$

$$\text{ROZKŁ.CH.I.ODWR}(0,1;10) = 4,8652$$

$$\text{ROZKŁ.CH.I.ODWR}(0,9;10) = 15,987$$

$$\text{ROZKŁ.CH.I.ODWR}(0,95;10) = 18,307$$

$$\text{ROZKŁ.CH.I.ODWR}(0,99;10) = 23,209$$

Zauważmy, że wszystkie wyznaczone kwantyle są dodatnie (gęstość rozkładu chi kwadrat jest dodatnia dla dodatnich argumentów).

Ad. d)

$$\text{ROZKŁ.F.ODWR}(0,01;10;20) = 0,227$$

$$\text{ROZKŁ.F.ODWR}(0,05;10;20) = 0,3605$$

$$\text{ROZKŁ.F.ODWR}(0,1;10;20) = 0,4544$$

$$\text{ROZKŁ.F.ODWR}(0,9;10;20) = 1,9367$$

$$\text{ROZKŁ.F.ODWR}(0,95;10;20) = 2,3479$$

$$\text{ROZKŁ.F.ODWR}(0,99;10;20) = 3,3682$$

Zauważmy, że wszystkie wyznaczone kwantyle są dodatnie (gęstość rozkładu F-Snedecora jest dodatnia dla dodatnich argumentów).

Przykład

Zmierzono długość pewnego budynku, średnia z 10 pomiarów wyniosła 171m. Zakładając, że pomiary te mają rozkład $N(m, 0,5m)$, oszacować przedziałem ufności wartość oczekiwaną długości tego budynku.

Zastosujemy przedział nr 1. Przyjmiemy standardowy poziom ufności równy 0,95.

Wyznamy u_α korzystając z funkcji

$$\text{ROZKŁ.NORMALNY.S.ODWR}(1-0,05/2) = 1,95996 \approx 1,96$$

Obliczamy błąd bezwzględny $\Delta = \frac{1,96 \cdot 0,5}{\sqrt{10}} = 0,31$ i wyznaczamy

przedział ufności

$$<171 - 0,31; 171 + 0,31> = <170,69; 171,31>.$$

Przykład

Rozpatrzmy poprzedni przykład nie znając odchylenia standardowego lecz wiedząc, że odchylenie standardowe z próby wynosi 0,5m.

Oszacować przedziałem ufności wartość oczekiwaną długości tego budynku.

Zastosujemy przedział nr 2. Przyjmiemy standardowy poziom ufności równy 0,95.

Obliczamy błąd bezwzględny Δ korzystając z funkcji

$$\text{UFNOŚĆ.T}(0,05;0,5;10) = 0,357678 \approx 0,36$$

i wyznaczamy przedział ufności

$$<171 - 0,36; 171 + 0,36> = <170,64; 171,36>.$$

Zauważmy, że w tym przypadku oszacowanie jest nieco mniej precyzyjne.

Przykład

Zmierzono długość pewnego budynku, średnia ze 100 pomiarów wyniosła 171m. a odchylenie standardowe z próby wynosi 0,5m, rozkład długości pomiarów nie jest znany. Oszacować przedziałem ufności wartość oczekiwaną długości tego budynku.

Zastosujemy przedział nr 3. Przyjmiemy standardowy poziom ufności równy 0,95.

Obliczamy błąd bezwzględny Δ korzystając z funkcji

$$\text{UFNOŚĆ.NORM}(0,05;0,5;100) = 0,097998 \approx 0,1$$

i wyznaczamy przedział ufności

$$<171 - 0,1; 171 + 0,1> = <170,9; 171,1>.$$

Zauważmy, że w tym przypadku oszacowanie jest bardziej precyzyjne niż w poprzednich przykładach (mniejsze odchylenie standardowe średniej).

Przykład

Wykonano 9 pomiarów długości pewnej wielkości i otrzymano odchylenie standardowe z próby równe 1mm Zakładając, że pomiary te pochodzą z populacji o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$, wyznaczyć przedział ufności dla odchylenia standardowego mierzonej wielkości. Zastosujemy przedział nr 5. Przyjmiemy standardowy poziom ufności równy 0,95.

Wyznamy u_1, u_2 korzystając z funkcji

$$\text{ROZKŁ.CHI.ODWR.PS}(0,975;8) = 2,1797$$

$$\text{ROZKŁ.CHI.ODWR.PS}(0,025;8) = 17,535$$

Oraz wyznaczamy przedział ufności

$$\left\langle \sqrt{\frac{9 \cdot 1}{17,535}}; \sqrt{\frac{9 \cdot 1}{2,1797}} \right\rangle = \langle 0,72; 2,03 \rangle$$

Przykład

Na 30 strzałów oddanych z pewnego rodzaju broni cel został trafiony 10 razy. Znaleźć przedział ufności dla prawdopodobieństwa p trafienia celu w jednym strzale na poziomie ufności 0,9.

Zastosujemy przedział dla małych prób.

Wyznamy u_1, u_2 korzystając z funkcji

$$\text{ROZKŁ.F.ODWR.PS}(0,05;42;20) = 1,99$$

$$\text{ROZKŁ.F.ODWR.PS}(0,05;22;40) = 1,81$$

Oraz wyznaczamy przedział ufności

$$\left\langle \frac{10}{10 + 21 \cdot 1,99}; \frac{11 \cdot 1,81}{20 + 11 \cdot 1,81} \right\rangle = \langle 0,19; 0,5 \rangle$$

L.Kowalski 08.11.2020