

STATYSTYKA MATEMATYCZNA

WYKŁAD 0 (powt. wiadomości z r. p-stwa)

Literatura

- M. Cieciura, J. Zacharski, „Metody probabilistyczne w ujęciu praktycznym”,
- L. Kowalski, „Statystyka”, 2005
- R. Leitner, J. Zacharski, "Zarys matematyki wyższej. Część III",
- A. Plucińska, E. Pluciński, "Probabilistyka",
- W. Krysicki i inni, "Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach", cz. II.
- D. Bobrowski, Probabilistyka w zastosowaniach technicznych (WNT)

ZMIENNA LOSOWA I JEJ PARAMETRY

-powtórzenie

(Ω, S, P) – **przestrzeń probabilistyczna**
(matematyczny model zjawiska losowego),

Ω – zbiór wszystkich zdarzeń
elementarnych,

S – zbiór zdarzeń, (podzbiory zbioru Ω ,
(dokładnie σ – ciało podzbiorów)),

P – prawdopodobieństwo (funkcja
przyporządkowująca zdarzeniom szansę ich
zajścia).

$$P : S \rightarrow R$$

Zmienną losową X nazywamy funkcję (borelowską czyli praktycznie każdą) przyporządkowującą zdarzeniom elementarnym liczby rzeczywiste.

$$X : \Omega \longrightarrow R$$

Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem:

$$F(x) = P(X < x) = P_X((-\infty, x))$$

Własności dystrybuanty:

- a) F jest funkcją niemalejącą,
- b) F jest funkcją lewostronnie ciągłą,
- c) $F(-\infty) = 0; \quad F(\infty) = 1,$
- d) dystrybuanta zmiennej losowej wyznacza jednoznacznie jej rozkład,
- e) $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a); \quad a < b$
- f) $P(X = a) = F(a^+) - F(a);$ gdzie $F(a^+)$ oznacza granicę prawostronną, (jeśli a jest punktem ciągłości dystrybuanty to $P(X = a) = 0$).

Zmienna losowa jest **skokowa (dyskretna)** jeśli zbiór wszystkich jej wartości jest skończony lub przeliczalny.

Rozkład zmiennej losowej skokowej często określamy za pomocą **funkcji prawdopodobieństwa**:

$$P(X = x_k) = p_k$$

$$(\text{własność: } \sum_k p_k = 1; p_k > 0)$$

Liczby p_k nazywamy **skokami**, a wartości x_k **punktami skokowymi**.

Zmienna losowa X o dystrybuancie F jest **ciągła** jeśli jej dystrybuanta da się przedstawić w postaci

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad x \in R$$

gdzie f jest funkcją spełniającą warunki:

$$f(x) \geq 0; \quad x \in R; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

i nazywamy ją **gęstością prawdopodobieństwa** zmiennej losowej X .

Własności zmiennej losowej ciągłej:

a)
$$P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx = F(a),$$

b)
$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) =$$
$$= P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

c) $P(X = a) = 0$, dla dowolnego $a \in R$;
(brak punktów skokowych),

d) F jest funkcją ciągłą i prawie wszędzie różniczkowalną $F'(x) = f(x)$ (równość zachodzi dla punktów ciągłości gęstości). Wyznaczając gęstość przez różniczkowanie dystrybuanty, w punktach w których F nie jest różniczkowalna można przyjąć, że gęstość jest równa zero.

Własności rozkładu zmiennej losowej często charakteryzujemy jej **parametrami**.

Jednym z podstawowych parametrów jest wartość oczekiwana.

Wartość oczekiwana. Oznaczenie EX lub m .

Dla zmiennej losowej skokowej

$$EX = \sum_i x_i p_i$$

(jeśli ewentualny szereg jest zbieżny bezwzględnie, takie szeregi są "odporne" np. na zmianę kolejności wyrazów).

Dla zmiennej losowej ciągłej

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

(jeśli ewentualna całka niewłaściwa jest zbieżna bezwzględnie).

Przykład

Dla zmiennej losowej o funkcji
prawdopodobieństwa

x_k	-1	2	3
p_k	0,2	0,6	0,2

$$EX = -1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,2 = 1,6 .$$

Przykład

Dla zmiennej losowej o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \langle 0,1 \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0,1 \rangle \end{cases}$$

$$EX = \int_0^1 x \cdot 2x dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Własności wartości oczekiwanej

- a) $Ec = c$; c – stała,
- b) $E(aX) = aE(X)$,
- c) $E(X + Y) = EX + EY$,
- d) Jeśli $a \leq X \leq b$, to $a \leq EX \leq b$,
jeśli $X \leq Y$, to $EX \leq EY$,
- e) $EX \leq E|X|$, $|EX| \leq E|X|$
- f) X, Y – niezależne, to $E(XY) = EX \cdot EY$.

Miarą rozrzutu wartości zmiennej losowej jest wariancja.

Wariancja. Oznaczenie D^2X lub σ^2 .

$$D^2X = E(X - EX)^2$$

Dla zmiennej losowej skokowej

$$D^2X = \sum (x_i - EX)^2 p_i$$

Dla zmiennej losowej ciągłej

$$D^2X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$$

Własności wariancji

a) $D^2c = 0$; c – stała,

b) $D^2(aX) = a^2 D^2(X)$,

c) $D^2(X + b) = D^2X$, b – stała,

d) X, Y – niezależne, to $D^2(X \pm Y) = D^2X + D^2Y$

e) $D^2X = E(X^2) - (EX)^2$.

Uzasadnienie e)

$$\begin{aligned} D^2X &= E(X - EX)^2 = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = \\ &EX^2 - 2EXEX + (EX)^2 = \\ &= E(X^2) - (EX)^2. \end{aligned}$$

Jeśli rozrzut wartości zmiennej losowej chcemy (np. z powodu interpretacji w zastosowaniach) mierzyć w tych samych jednostkach co X to stosujemy odchylenie standardowe.

Odchylenie standardowe.

Oznaczenie DX lub σ .

$$DX = \sqrt{D^2 X}$$

Rozkłady skokowe

Rozkład jednopunktowy

Określamy:

$P(X = c) = 1$ gdzie c ustalona liczba.

$$EX = c, \quad D^2X = 0$$

(tylko ten rozkład ma zerową wariancję !!!)

Rozkład dwupunktowy (zerojedynekowy)

Niech $p \in (0, 1)$ będzie ustaloną liczbą.

Określamy:

$P(X = 0) = q, P(X = 1) = p$; gdzie $q = 1 - p$.

Umowa:

0 - porażka

1 - sukces

$$EX = p, \quad D^2X = pq$$

Rozkład dwumianowy

Dla danych $p \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$ określamy funkcję prawdopodobieństwa

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (\text{wzór Bernoulliego})$$

gdzie $q = 1 - p$
 $k = 0, 1, 2, \dots, n$.



Jakub Bernoulli (1654 - 1705) - szwajcarski matematyk i fizyk.

Jeśli przyjmiemy, że n oznacza liczbę niezależnych doświadczeń z których każde kończy się jednym z dwóch wyników: „sukcesem” (z prawdopodobieństwem p w każdym doświadczeniu) lub „porażką” i zmienna losowa X oznacza liczbę „sukcesów” to powyższy wzór wyznacza **prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie k sukcesów w n doświadczeniach (próbach).**

Sprawdzenie

$$\sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1$$

$$EX = np, \quad D^2X = npq$$

Przykład

Obliczymy wartość oczekiwaną rozkładu dwumianowego.

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np \end{aligned}$$

Rozkład geometryczny

X - liczba prób Bernoulliego poprzedzających pierwszy sukces

$$P(X = k) = pq^k$$

$$q = 1 - p$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Sprawdzenie

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} pq^k = \frac{p}{1-q} = 1$$

$$EX = q/p; \quad D^2X = q/p^2$$

Rozkład Poissona

Dla $\lambda > 0$ określamy funkcję
prawdopodobieństwa

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



Siméon Denis Poisson (1781–1840), francuski mechanik teoretyk, fizyk i matematyk. W matematyce zajmował się całkami oznaczonymi, równaniami różnicowymi i różniczkowymi oraz teorią prawdopodobieństwa.

Sprawdzenie

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1\end{aligned}$$

$$EX = \lambda \quad D^2X = \lambda$$

Przykład

Obliczymy wartość oczekiwaną rozkładu Poissona.

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Rozkład Poissona (możliwość odczytu w tablicy) może dla dużych n (praktycznie $n \geq 30$) i małych p (praktycznie $p \leq 0,2$) przybliżać rozkład dwumianowy
(przybliżenie Poissona)

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{gdzie } \lambda = n \cdot p$$

Rozkłady ciągłe

Rozkład jednostajny

Rozkład którego gęstość jest stała w pewnym przedziale nazywamy **jednostajnym**.

Gęstość rozkładu jednostajnego w (a, b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a; b) \\ 0 & x \notin (a; b) \end{cases}$$

Ponieważ gęstość ta ma oś symetrii w punkcie $x = (a + b)/2$ to

$$EX = (a+b)/2$$

Pokażemy, że

$$D^2X = (b - a)^2/12$$

Przykład

Najpierw obliczymy EX^2

$$\begin{aligned} EX^2 &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{3} \end{aligned}$$

Zatem

$$D^2 X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Rozkład wykładniczy

Rozkład ten występuje często w zagadnieniach rozkładu czasu między zgłoszeniami (awariami) lub czasu oczekiwania na obsługę w systemach kolejkowych.

Gęstość rozkładu wykładniczego o parametrze $a > 0$ ma postać

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

dystribuantą tego rozkładu jest funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(uzasadnienie: $F'(x) = f(x)$)

Przykład

Obliczmy EX

$$EX = \int_0^{\infty} xae^{-ax}dx = \left(-xe^{-ax} - \frac{1}{a}e^{-ax} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a}$$

Uwaga.

Podobnie można udowodnić, że $D^2X = \frac{1}{a^2}$

Własność.

1) Jeśli liczba zgłoszeń w systemie kolejkowym w przedziale czasu $(t, t + T)$ ma rozkład Poissona o parametrze λT , oraz liczby zgłoszeń przychodzące w rozłącznych przedziałach czasu są niezależne to czas X między kolejnymi zgłoszeniami ma rozkład wykładniczy o parametrze $a = 1/\lambda$.

2) Dla dowolnych $t, T > 0$ mamy

$$P(X \geq t + T \mid X \geq t) = P(X \geq T)$$

(własność braku pamięci)

$$\begin{aligned} P(X \geq t + T \mid X \geq t) &= \frac{P(X \geq t + T \wedge X \geq t)}{P(X \geq t)} = \frac{P(X \geq t + T)}{P(X \geq t)} = \\ &= \frac{e^{-(t+T)a}}{e^{-ta}} = e^{-Ta} = P(X \geq T) \end{aligned}$$

Jest to jedyny rozkład ciągły o tej własności.

Rozkład normalny (Gaussa)

Dla $m \in R, \sigma \in (0, +\infty)$

Określamy gęstość rozkładu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in R$$



Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) – niemiecki matematyk i fizyk. Jego badania związane z teorią błędów doprowadziły do odkrycia rozkładu normalnego zmiennej losowej (nazywany także rozkładem Gaussa), który jest najważniejszym rozkładem w teorii prawdopodobieństwa.



Uwaga

Jeśli X ma rozkład $N(m, \sigma)$ to zmienna losowa $Y = (X - m)/\sigma$ ma rozkład $N(0, 1)$ (takie przekształcenie nazywamy **standaryzacją**).

Wartości dystrybuanty dla argumentów
ujemnych wyznaczamy na podstawie
zależności

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Przykład

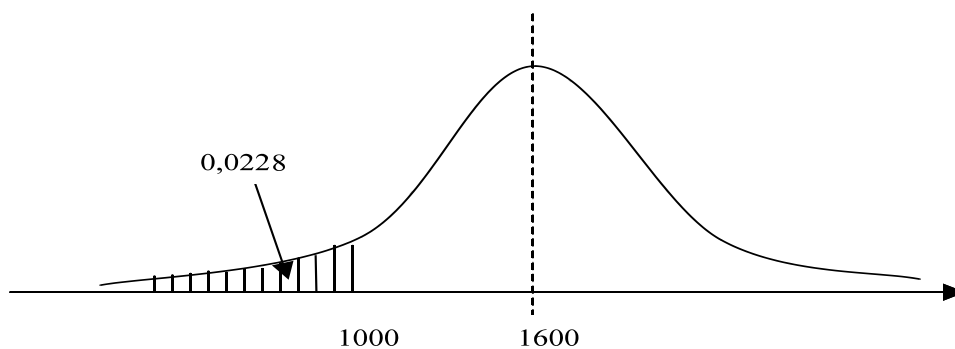
Dochód miesięczny (zł) w pewnej populacji osób ma rozkład normalny $N(1600; 300)$.

Jaki procent osób w tej populacji ma dochód miesięczny poniżej 1000 zł?

X – wysokość miesięcznego dochodu

$$P(X < 1000) = P\left(\frac{X - 1600}{300} < \frac{1000 - 1600}{300}\right) = P(Y < -2) =$$

$$= \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228 = 2,28\%$$



Przykład

Czas wykonania pewnego detalu (min.) jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(m; \sigma)$. Wiadomo, że 80% robotników wykonuje ten detal dłużej niż 10 minut a 60% robotników dłużej niż 12 minut.

- a) wyznacz parametry rozkładu czasu wykonania detalu m i σ ,
- b) jaki odsetek robotników wykonuje ten detal w czasie krótszym niż 6 minut?

X – czas wykonania detalu.

$$P(X > 10) = 0,8 \quad \text{stąd} \quad \frac{m-10}{\sigma} = 0,84$$

$$P(X > 12) = 0,6 \quad \text{stąd} \quad \frac{m-12}{\sigma} = 0,25$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymamy $m = 12,85$; $\sigma = 3,39$.

$$\begin{aligned} P(X < 6) &= P\left(\frac{X-12,85}{3,39} < \frac{6-12,85}{3,39}\right) = P(Y < -2,02) = \\ &= \Phi(-2,02) = 1 - \Phi(2,02) = 0,0217 = 2,17\% \end{aligned}$$

Prawo trzech sigm

Jeśli X ma rozkład $N(m, \sigma)$ to

$$P(m - \sigma < X < m + \sigma) = 0,683,$$

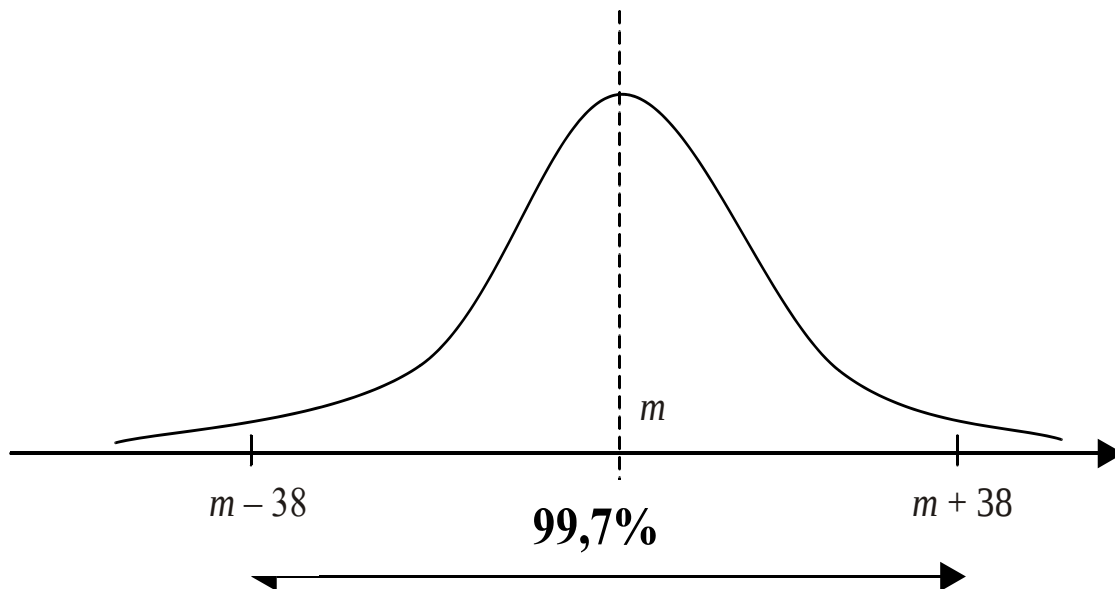
$$P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) = 0,955,$$

$$P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) = 0,997$$

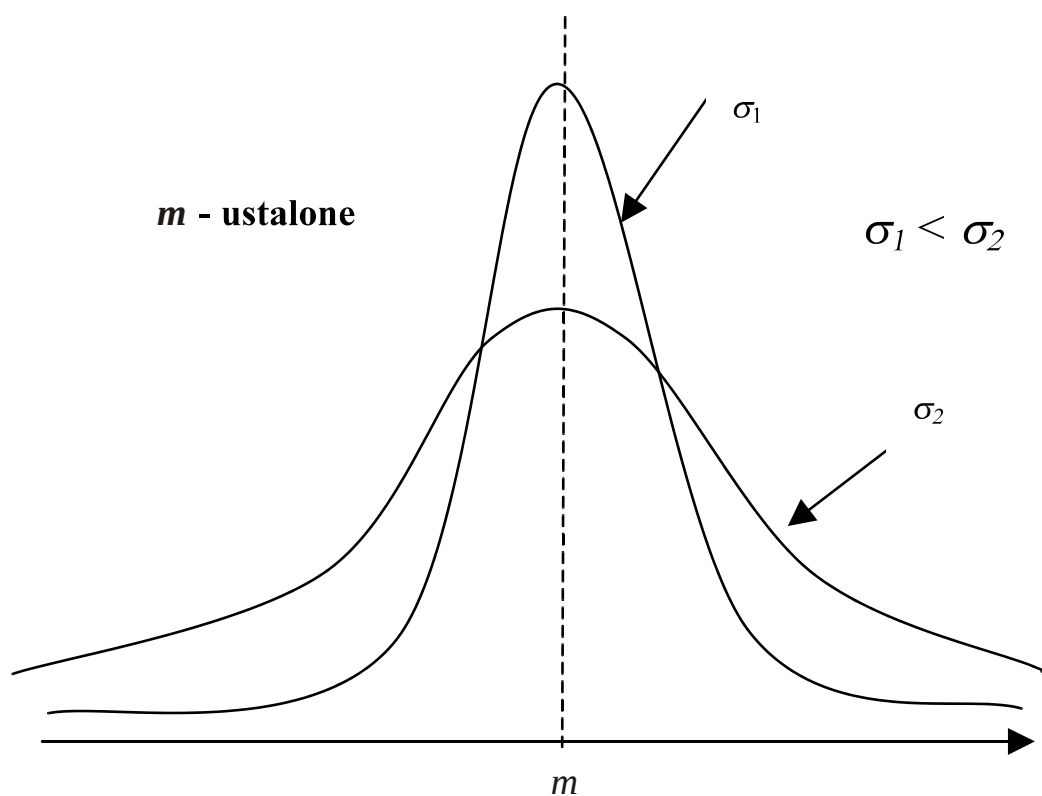
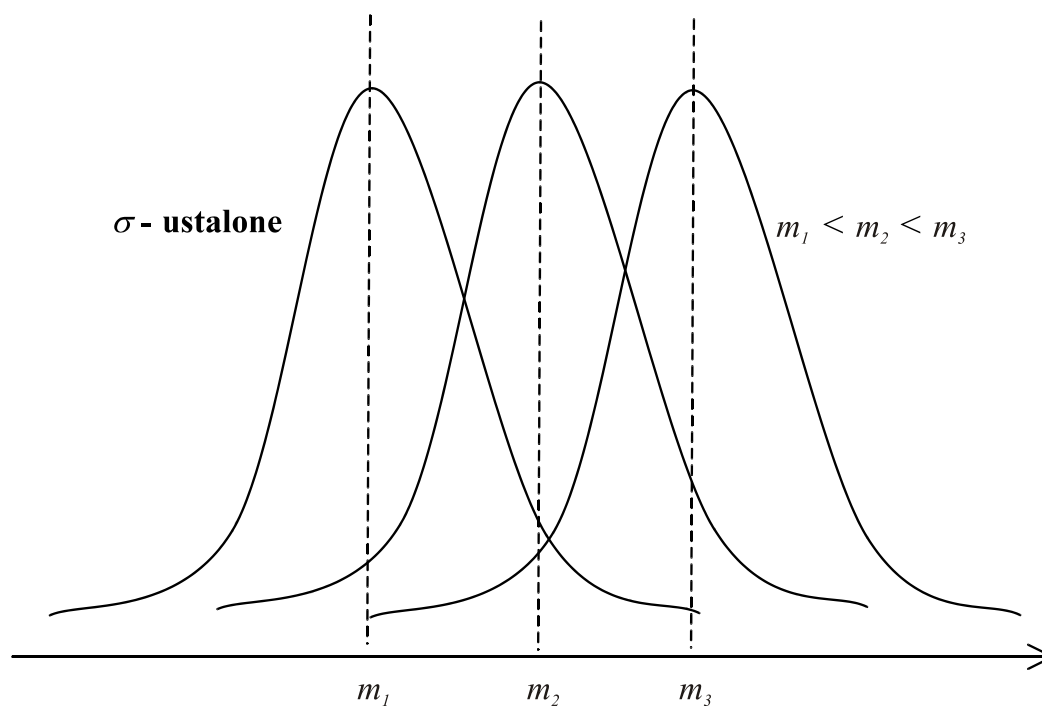
Ostatnia równość świadczy o tym, że chociaż rozkład normalny ma gęstość różną od zera na całej prostej to praktycznie niemal wszystkie realizacje skupiają się w przedziale

$$(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$$

własność tą nazywamy **prawem trzech sigm**.



Interpretacja graficzna parametrów rozkładu $N(m, \sigma)$



Trzy rozkłady ciągłe, które mają duże znaczenie w statystyce matematycznej:

- **Rozkład chi kwadrat,**
- **Rozkład Studenta,**
- **Rozkład F – Snedecora**

Rozkłady te są tablicowane.

Rozkład chi kwadrat (χ^2) Y_n

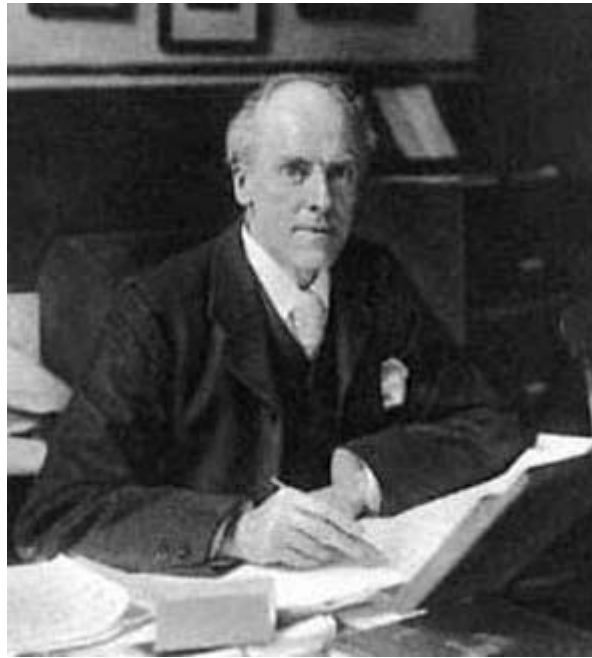
n – liczba stopni swobody

$$Y_n = X_1^2 + \dots + X_n^2$$

$X_1, \dots, X_n$ - niezależne, o rozkładzie $N(0, 1)$

$$EX = n;$$

$$D^2X = 2n$$



Karl Pearson (1857 – 1936)
angielski matematyk,
prekursor statystyki matematycznej

Gęstość rozkładu Y_n

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

Uwaga. Γ - funkcja Eulera, $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$

np. $\Gamma(n) = (n-1)!$; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$

mediana

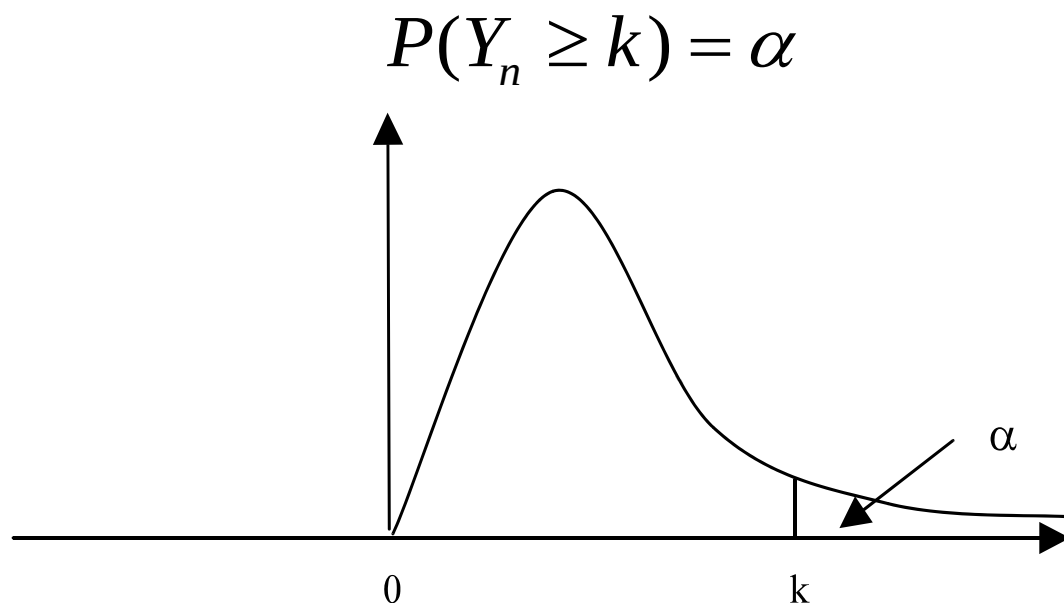
$$m_e = x_{0,5} \approx n - 0,67$$

dominanta

$$d = n - 2, \quad n \geq 2$$

Odczyt z tablicy dla rozkładu chi kwadrat.

(podobnie interpretujemy graficznie odczyt z tablicy F – Snedecora.)



Uwaga.

- 1) Dla $n = 1, 2$ wykres gęstości rozkładu chi kwadrat jest inny (tylko część malejąca wykresu)
- 2) dla $n > 30$ stosujemy przybliżenie rozkładem normalnym.

$$\sqrt{2Y_n} \sim N(\sqrt{2n-1}; 1)$$

Rozkład Studenta

$$T_n = \frac{X}{\sqrt{Y_n}} \sqrt{n}$$

n – liczba stopni swobody

X, Y_n - niezależne

X o rozkładzie $N(0, 1)$;

Y_n o rozkładzie chi kwadrat z n stopniami swobody

$$EX = 0 ; \quad \text{dla } n > 1$$

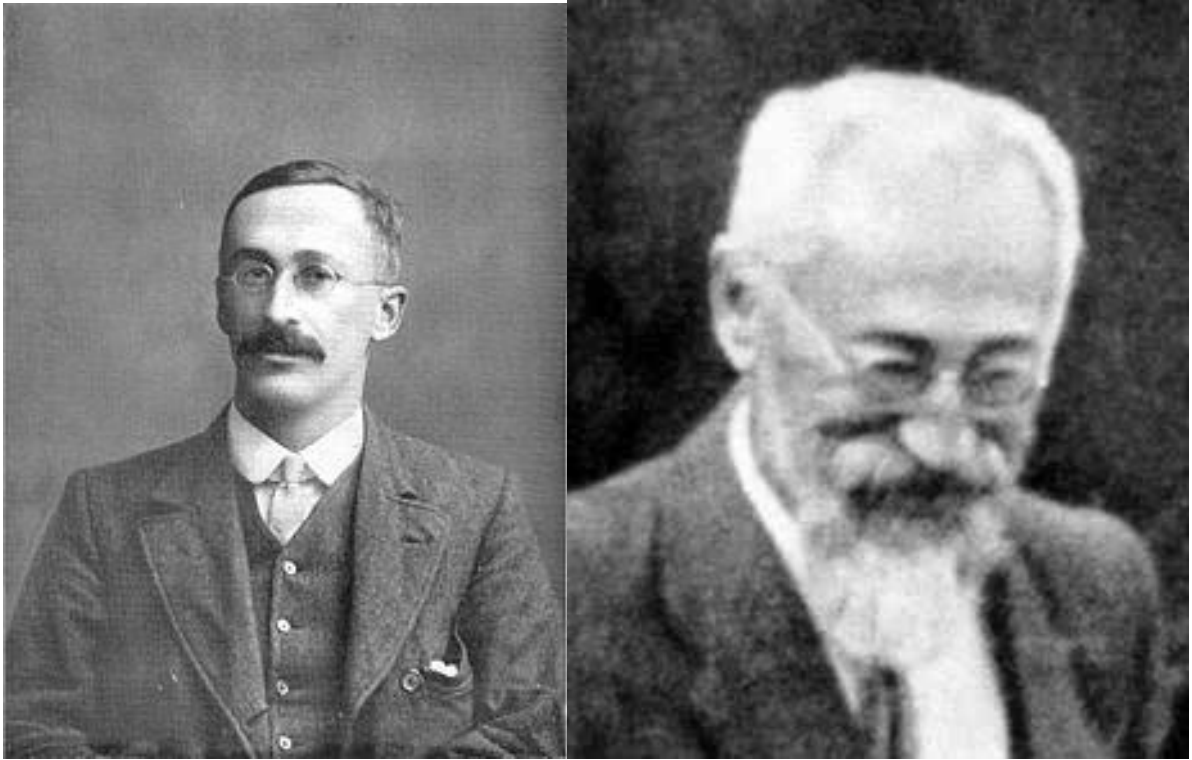
$$D^2X = n/(n-2) \quad \text{dla } n > 2$$

Gęstość rozkładu T_n

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \quad t \in R$$

Uwaga. Γ - funkcja Eulera, $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$

np. $\Gamma(n) = (n-1)!$; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$

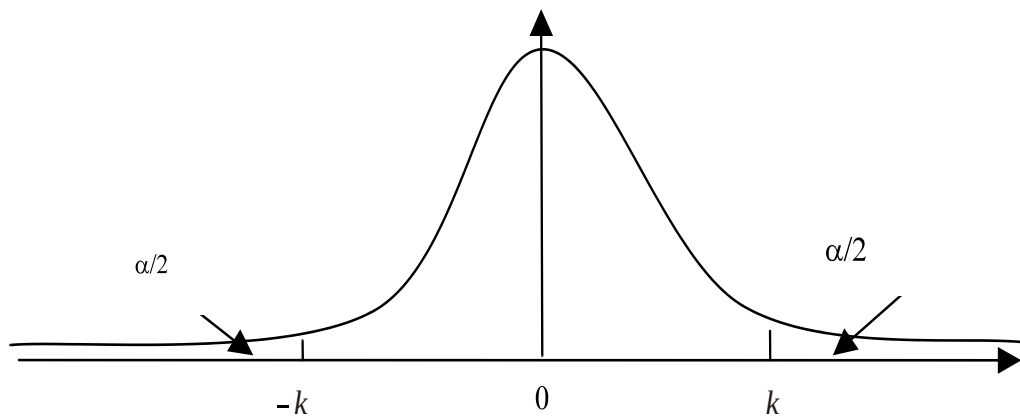


William Gosset (1876 – 1937), statystyk angielski.

Publikował pod pseudonimem **Student** (stąd nazwa wprowadzonego przez niego - w roku 1908 - rozkładu prawdopodobieństwa: rozkład Studenta).

Odczyt z tablicy (tablica IV) dla rozkładu Studenta.

$$P(|T_n| \geq k) = \alpha$$



Uwaga.

$$T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1)$$

Rozkład F Snedecora

$n_1; n_2 \in N$ stopnie swobody

$$F_{n_1, n_2} = \frac{\frac{1}{n_1} Y_{n_1}}{\frac{1}{n_2} Y_{n_2}};$$

$Y_{n_1}; Y_{n_2}$ - niezależne o rozkł. chi kwadrat

$$EX = \frac{n_2}{n_2 - 2} \quad \text{dla } n_2 > 2$$

$$D^2X = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)} \quad \text{dla } n_2 > 4$$

gęstość

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right) \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1-2}{2}} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

W tablicy $P(F_{n_1; n_2} \geq k) = \alpha$

TABLICE

Tablica I.

Rozkład Poissona.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$\lambda \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,1	0,9048	0,0905	0,0045	0,0002	0,0000							
0,2	8187	1637	0164	0011	0001	0,0000						
0,3	7408	2222	0333	0033	0003	0000						
0,4	6703	2681	0536	0027	0007	0001	0,0000					
0,5	6065	3033	0758	0126	0016	0002	0000					
0,6	5488	3293	0988	0198	0030	0004	0000					
0,7	4966	3476	1217	0284	0050	0007	0001	0,0000				
0,8	4493	3595	1438	0383	0077	0012	0002	0000				
0,9	4066	3659	1646	0494	0111	0020	0003	0000				
1,0	3679	3679	1839	0613	0153	0031	0005	0001	0,0000			
1,5	2231	3347	2510	1255	0471	0141	0035	0008	0001	0,0000		
2,0	1353	2707	2707	1804	0902	0361	0120	0034	0009	0002	0,0000	
2,5	0821	2052	2565	2138	1336	0668	0278	0099	0031	0009	0002	0,0000
3,0	0498	1494	2240	2240	1680	1008	0504	0216	0081	0027	0008	0002
3,5	0302	1057	1850	2158	1888	1322	0771	0385	0169	0066	0023	0007
4,0	0183	0733	1465	1954	1954	1563	1042	0595	0298	0132	0053	0019
4,5	0111	0500	1125	1687	1898	1708	1281	0824	0463	0232	0104	0043
5,0	0067	0337	0842	1404	1755	1755	1462	1044	0653	0363	0181	0082
6,0	0025	0149	0446	0892	1339	1606	1606	1377	1033	0688	0413	0225
7,0	0009	0064	0223	0521	0912	1277	1490	1490	1304	1014	0710	0452
8,0	0003	0027	0107	0286	0573	0916	1221	1396	1396	1241	0993	0722
9,0	0001	0011	0050	0150	0337	0607	0911	1171	1318	1318	1186	0970
10,0	0000	0005	0023	0076	0189	0378	0631	0901	1126	1251	1251	1137

$\lambda \backslash k$	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
0,1													
0,2													
0,3													
0,4													
0,5													
0,6													
0,7													
0,8													
0,9													
1,0													
1,5													
2,0													
2,5													
3,0	0,0001	0,0000											
3,5	0002	0001	0,0000										
4,0	0006	0002	0001	0,0000									
4,5	0016	0006	0002	0001	0,0000								
5,0	0034	0013	0005	0002	0000								
6,0	0113	0052	0022	0009	0003	0,0001	0,0000						
7,0	0264	0142	0071	0033	0014	0006	0002	0,0001	0,0000				
8,0	0481	0296	0169	0090	0045	0021	0009	0004	0002	0,0001	0,0000		
9,0	0728	0504	0324	0194	0109	0058	0029	0014	0006	0003	0001	0,0000	
10,0	0948	0729	0521	0347	0217	0128	0017	0037	0019	0009	0004	0002	0,0001

Tablica II. Dystrybuanta $\Phi(x)$ rozkładu normalnego $N(0, 1)$ $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0	x
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5861	0,5910	0,5949	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6225	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,684	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,90147	1,2
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774	1,3
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92354	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189	1,4
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408	1,5
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449	1,6
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327	1,7
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062	1,8
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670	1,9
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169	2,0
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574	2,1
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899	2,2
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9 ² 0097	0,9 ² 0358	0,9 ² 0613	0,9 ² 1106	0,9 ² 1106	0,9 ² 1344	0,9 ² 1576	2,3
2,4	0,9 ² 1802	0,9 ² 2024	0,9 ² 2240	0,9 ² 2451	0,9 ² 2656	0,9 ² 2857	0,9 ² 3053	0,9 ² 3244	0,9 ² 3431	0,9 ² 3613	2,4

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	x
2,5	0,9 ² 3790	0,9 ² 3963	0,9 ² 4132	0,9 ² 4297	0,9 ² 4457	0,9 ² 4614	0,9 ² 4766	0,9 ² 4915	0,9 ² 5060	0,9 ² 5201	2,5
2,6	0,9 ² 5339	0,9 ² 5473	0,9 ² 5604	0,9 ² 5731	0,9 ² 5855	0,9 ² 5975	0,9 ² 6093	0,9 ² 6207	0,9 ² 6319	0,9 ² 6427	2,6
2,7	0,9 ² 6533	0,9 ² 6636	0,9 ² 6736	0,9 ² 6833	0,9 ² 6928	0,9 ² 7020	0,9 ² 7110	0,9 ² 7197	0,9 ² 7282	0,9 ² 7365	2,7
2,8	0,9 ² 7445	0,9 ² 7523	0,9 ² 7599	0,9 ² 7673	0,9 ² 7744	0,9 ² 7814	0,9 ² 7882	0,9 ² 7948	0,9 ² 8012	0,9 ² 8074	2,8
2,9	0,9 ² 8134	0,9 ² 8193	0,9 ² 8250	0,9 ² 8305	0,9 ² 8359	0,9 ² 8411	0,9 ² 8462	0,9 ² 8511	0,9 ² 8559	0,9 ² 8605	2,9
3,0	0,9 ² 8650	0,9 ² 8694	0,9 ² 8736	0,9 ² 8777	0,9 ² 8817	0,9 ² 8856	0,9 ² 8893	0,9 ² 8930	0,9 ² 8965	0,9 ² 8999	3,0
3,1	0,9 ³ 0324	0,9 ³ 0646	0,9 ³ 0957	0,9 ³ 1260	0,9 ³ 1553	0,9 ³ 1836	0,9 ³ 2112	0,9 ³ 2378	0,9 ³ 2636	0,9 ³ 2886	3,1
3,2	0,9 ³ 3129	0,9 ³ 3363	0,9 ³ 3590	0,9 ³ 3810	0,9 ³ 4002	0,9 ³ 4230	0,9 ³ 4429	0,9 ³ 4623	0,9 ³ 4810	0,9 ³ 4991	3,2
3,3	0,9 ³ 5166	0,9 ³ 5335	0,9 ³ 5499	0,9 ³ 5658	0,9 ³ 5811	0,9 ³ 5959	0,9 ³ 6103	0,9 ³ 6242	0,9 ³ 6376	0,9 ³ 6505	3,3
3,4	0,9 ³ 6631	0,9 ³ 6752	0,9 ³ 6869	0,9 ³ 6982	0,9 ³ 7091	0,9 ³ 7197	0,9 ³ 7299	0,9 ³ 7398	0,9 ³ 7493	0,9 ³ 7585	3,4
3,5	0,9 ³ 7674	0,9 ³ 7759	0,9 ³ 7842	0,9 ³ 7922	0,9 ³ 7999	0,9 ³ 8074	0,9 ³ 8146	0,9 ³ 8215	0,9 ³ 8282	0,9 ³ 8347	3,5
3,6	0,9 ³ 8409	0,9 ³ 8469	0,9 ³ 8527	0,9 ³ 8583	0,9 ³ 8637	0,9 ³ 8689	0,9 ³ 8739	0,9 ³ 8787	0,9 ³ 8834	0,9 ³ 8879	3,6
3,7	0,9 ³ 8922	0,9 ³ 8964	0,9 ⁴ 0039	0,9 ⁴ 0426	0,040799	0,9 ⁴ 1158	0,9 ⁴ 1504	0,9 ⁴ 1838	0,9 ⁴ 2159	0,9 ⁴ 2468	3,7
3,8	0,9 ⁴ 2765	0,9 ⁴ 3052	0,9 ⁴ 3327	0,9 ⁴ 3593	0,9 ⁴ 3848	0,9 ⁴ 4059	0,9 ⁴ 4331	0,9 ⁴ 4558	0,9 ⁴ 4777	0,9 ⁴ 4988	3,8
3,9	0,9 ⁴ 5190	0,9 ⁴ 5385	0,9 ⁴ 5573	0,9 ⁴ 5753	0,9 ⁴ 5926	0,9 ⁴ 6092	0,9 ⁴ 6253	0,9 ⁴ 6406	0,9 ⁴ 6554	0,9 ⁴ 6696	3,9
4,0	0,9 ⁴ 6833	0,9 ⁴ 6964	0,9 ⁴ 7090	0,9 ⁴ 7211	0,9 ⁴ 7327	0,9 ⁴ 7439	0,9 ⁴ 7536	0,9 ⁴ 7649	0,9 ⁴ 7748	0,9 ⁴ 7843	4,0
4,1	0,9 ⁴ 7934	0,9 ⁴ 8022	0,9 ⁴ 8106	0,9 ⁴ 8186	0,9 ⁴ 8263	0,9 ⁴ 8338	0,9 ⁴ 8409	0,9 ⁴ 8477	0,9 ⁴ 8542	0,9 ⁴ 8605	4,1
4,2	0,9 ⁴ 8665	0,9 ⁴ 8723	0,9 ⁴ 8778	0,9 ⁴ 8832	0,9 ⁴ 8882	0,9 ⁴ 8931	0,9 ⁴ 8978	0,9 ⁵ 0226	0,9 ⁵ 0655	0,9 ⁵ 1066	4,2
4,3	0,9 ⁵ 1460	0,9 ⁵ 1837	0,9 ⁵ 2109	0,9 ⁵ 2545	0,9 ⁵ 2876	0,9 ⁵ 3193	0,9 ⁵ 3497	0,9 ⁵ 3788	0,9 ⁵ 4066	0,9 ⁵ 4332	4,3
4,4	0,9 ⁵ 4587	0,9 ⁵ 4831	0,9 ⁵ 5065	0,9 ⁵ 5288	0,9 ⁵ 5502	0,9 ⁵ 5706	0,9 ⁵ 5902	0,9 ⁵ 6089	0,9 ⁵ 6268	0,9 ⁵ 6439	4,4
4,5	0,9 ⁵ 6602	0,9 ⁵ 6759	0,9 ⁵ 6908	0,9 ⁵ 7051	0,9 ⁵ 7187	0,9 ⁵ 7318	0,9 ⁵ 7442	0,9 ⁵ 7561	0,9 ⁵ 7675	0,9 ⁵ 7784	4,5
4,6	0,9 ⁵ 7888	0,9 ⁵ 7987	0,9 ⁵ 8081	0,9 ⁵ 8172	0,9 ⁵ 8258	0,9 ⁵ 8340	0,9 ⁵ 8419	0,9 ⁵ 8494	0,9 ⁵ 8566	0,9 ⁵ 8634	4,6
4,7	0,9 ⁵ 8699	0,9 ⁵ 8761	0,9 ⁵ 8821	0,9 ⁵ 8877	0,9 ⁵ 8931	0,9 ⁵ 8983	0,9 ⁶ 0320	0,9 ⁶ 0789	0,9 ⁶ 1235	0,9 ⁶ 1661	4,7
4,8	0,9 ⁶ 2067	0,9 ⁶ 2453	0,9 ⁶ 2822	0,9 ⁶ 3173	0,9 ⁶ 3508	0,9 ⁶ 3827	0,9 ⁶ 4131	0,9 ⁶ 4420	0,9 ⁶ 4696	0,9 ⁶ 4958	4,8
4,9	0,9 ⁶ 5208	0,9 ⁶ 5446	0,9 ⁶ 5673	0,9 ⁶ 5889	0,9 ⁶ 6094	0,9 ⁶ 6289	0,9 ⁶ 6475	0,9 ⁶ 6652	0,9 ⁶ 6821	0,9 ⁶ 6981	4,9

Wartości k gdy $\Phi(k) = \alpha$.

α	0,9	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,975	0,98	0,985	0,99	0,995
k	1,282	1,341	1,405	1,476	1,555	1,645	1,751	1,881	1,960	2,054	2,170	2,326	2,576

α	0,6	0,7	0,8
k	0,253	0,524	0,842

α	0,999	0,9999	0,99999	0,999999
k	3,090	3,719	4,265	4,753

Tablica III.

Tablica rozkładu chi kwadrat

Tablica podaje wartości x_α takie, że $P(Y > x_\alpha) = \alpha$, n - ilość stopni swobody

n	α														n
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001	
1	0,0002	0,0006	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827	1
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,665	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815	2
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,268	3
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,465	4
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,517	5
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457	6
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322	7
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125	8
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877	9
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588	10
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264	11
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909	12
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528	13
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,622	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123	14
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697	15
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252	16
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790	17
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312	18
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820	19
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,587	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315	20
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,443	38,932	46,797	21
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268	22
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728	23
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179	24
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620	25
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052	26
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476	27
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893	28
29	14,256	15,574	17,708	20,599	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302	29
30	14,953	16,306	18,493	23,364	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703	30

Tablica IV. Tablica rozkładu Studenta
 Tablica podaje wartości x_α takie, że $P(|T| > x_\alpha) = \alpha$, n - ilość stopni swobody

n	α												n
	0,90	0,80	0,70	0,60	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001	
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619	1
2	0,142	0,289	0,445	0,617	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598	2
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941	3
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610	4
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859	5
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959	6
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405	7
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041	8
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781	9
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587	10
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437	11
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318	12
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221	13
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140	14
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073	15
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015	16
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965	17
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922	18
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883	19
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850	20
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819	21
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792	22
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767	23
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745	24
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725	25
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707	26
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690	27
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674	28
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659	29
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646	30
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551	40
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460	60
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373	120
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291	∞

Tablica V.

Tablica rozkładu F - Snedecora

$$P(F_{n_1, n_2} \geq k) = \alpha$$

Tablica dla $\alpha = 0,05$:

n ₁ n ₂	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	40	60	100	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	242	248	251	252	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,79	8,66	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	5,96	5,8	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,74	4,56	4,64	4,43	4,41	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,06	3,87	3,77	3,74	3,71	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,64	3,44	3,34	3,3	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,35	3,15	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,14	2,94	2,83	2,79	2,76	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	2,98	2,77	2,66	2,62	2,59	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,85	2,65	2,53	2,49	2,46	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,75	2,54	2,43	2,38	2,35	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,67	2,46	2,34	2,30	2,26	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,60	2,39	2,27	2,22	2,19	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,54	2,33	2,20	2,16	2,12	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,49	2,28	2,15	2,11	2,07	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,45	2,23	2,10	2,06	2,02	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,41	2,19	2,06	2,02	1,98	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,38	2,16	2,03	1,98	1,94	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,35	2,12	1,99	1,95	1,91	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,32	2,10	1,96	1,92	1,88	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,30	2,07	1,94	1,89	1,85	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,27	2,05	1,91	1,86	1,82	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,25	2,03	1,89	1,84	1,80	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,24	2,01	1,87	1,82	1,78	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,22	1,99	1,85	1,80	1,76	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,20	1,97	1,84	1,79	1,74	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,19	1,96	1,82	1,77	1,73	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,18	1,94	1,81	1,75	1,71	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,16	1,93	1,79	1,74	1,70	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,08	1,84	1,69	1,64	1,59	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,03	1,78	1,63	1,58	1,52	1,44
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,93	1,68	1,52	1,45	1,39	1,28
200	3,89	3,04	2,69	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,88	1,62	1,46	1,39	1,32	1,19
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,83	1,57	1,39	1,32	1,24	1,00

ROZKŁAD ZMIENNEJ LOSOWEJ N-WYMIAROWEJ.

CIĄGI LOSOWE

$(\Omega, \mathcal{S}, P)$ - ustalona przestrzeń probabilistyczna.

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ - zmienna losowa n - wymiarowa (wektor losowy, ciąg losowy).

$X : \Omega \rightarrow R^n$ (funkcja borelowska)

$P_X : B(R^n) \rightarrow [0, 1]$ - rozkład zmiennej losowej X .

Dystrybuanta

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n)$$

X nazywamy **zmienną losową skokową** jeśli jej zbiór wartości jest skończony lub przeliczalny.

X nazywamy **zmienną losową ciągłą** jeśli jej dystrybuanta da się przedstawić w postaci

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$$

dla pewnej nieujemnej funkcji f zwanej gęstością.

Uwaga.

1. W punktach ciągłości funkcji f zachodzi:

$$\frac{\partial^{(n)} F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n)$$

2. Dla $A \in \mathcal{B}(R^n)$ mamy $P_X(A) = \int \int \dots \int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$.

Rozkłady warunkowe.

Jeśli $P_{1,...,k}(X_1 = x_{1j}, ..., X_k = x_{kj}) > 0$ to rozkład zmiennej losowej skokowej (n - k) wymiarowej określonej wzorem:

$$P(X_{k+1} = x_{k+1,j}, ..., X_n = x_{nj} | X_1 = x_{1j}, ..., X_k = x_{kj}) = \frac{P(X_1 = x_{1j}, ..., X_n = x_{nj})}{P_{1,...,k}(X_1 = x_{1j}, ..., X_k = x_{kj})}$$

nazywamy rozkładem warunkowym zmiennej losowej $(X_{k+1}, ..., X_n)$ pod warunkiem, że $(X_1 = x_{1j}, ..., X_k = x_{kj})$.

Jeśli gęstość $f_{1,...,k} > 0$ to rozkład zmiennej losowej ciągłej (n - k) wymiarowej określonej wzorem:

$$f(x_{k+1}, ..., x_n | x_1, ..., x_k) = \frac{f(x_1, ..., x_n)}{f(x_1, ..., x_k)}$$

nazywamy rozkładem warunkowym zmiennej losowej $(X_{k+1}, ..., X_n)$ pod warunkiem, że $(X_1 = x_1, ..., X_k = x_k)$.

Niezależność zmiennych losowych.

Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależne jeśli

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \dots F_n(x_n) \quad \text{dla dowolnych}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n.$$

gdzie F_i - dystrybuanty rozkładów brzegowych jednowymiarowych.

Dla zmiennych losowych skokowych odpowiedni warunek ma postać:

$$P(X_1 = x_{1j}, \dots, X_n = x_{nj}) = P_1(X_1 = x_{1j}) \cdot \dots \cdot P_n(X_n = x_{nj})$$

dla dowolnych $x_{1j}, \dots, x_{nj} \in \mathbb{R}^n$

Dla zmiennych losowych ciągłych odpowiedni warunek ma postać:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$$

dla dowolnych $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$.

Parametry (mogą nie istnieć)

Wartość oczekiwana $E(X) = [EX_1, EX_2, \dots, EX_n]$.

Wariancja $D^2(X) = [D^2X_1, D^2X_2, \dots, D^2X_n]$.

Moment (zwyczajny) rzędu $l_1 + l_2 + \dots + l_n$

$$m_{l_1 l_2 \dots l_n} = E(X_1^{l_1} X_2^{l_2} \dots X_n^{l_n}),$$

Moment centralny rzędu $l_1 + l_2 + \dots + l_n$

$$\mu_{l_1 l_2 \dots l_n} = E\left(\left(X_1 - EX_1\right)^{l_1} \dots \left(X_n - EX_n\right)^{l_n}\right),$$

Macierz kowariancji $K = [k_{ij}]$, gdzie

$$k_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - EX_i)(X_j - EX_j)] = \\ = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$$

Uwaga $k_{ii} = D^2 X_i$, jest wariancją i -tej składowej.

Macierz K jest kwadratowa, symetryczna i słabo dodatnio określona (w szczególności ma wyznacznik nieujemny).

Macierz korelacji $R = [\rho_{ij}]$, gdzie

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{DX_i \cdot DX_j} =$$

Uwaga $\rho_{ii} = 1$.

Rozkład normalny n - wymiarowy.

K - macierz kowariancyjna, niech $\det K \neq 0$.

Zmienna losowa n - wymiarowa ma rozkład normalny n - wymiarowy gdy gęstość tej zmiennej losowej wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{\sqrt{|L|}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n l_{jk} (x_j - m_j)(x_k - m_k)\right) = \\ &= \frac{\sqrt{|L|}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (x - m)^T L (x - m)\right) \end{aligned}$$

gdzie

$$m_i = E(X_i) \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n$$

$L = [l_{jk}]$ $j, k = 1, 2, \dots, n$ jest macierzą odwrotną do K.

Dla $n = 2$ warunek $|K| \neq 0$ jest równoważny warunkowi $\rho^2 \neq 1$.

Ponieważ macierz K ma wtedy postać

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \text{ to}$$

$$L = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

Zatem gęstość rozkładu normalnego 2-wymiarowego $N(m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ można zapisać następująco:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

Powyższa funkcja gęstości ma stałą wartość $f(x, y) = h$ na elipsie:

$$\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} = \text{const} = \lambda^2$$

o środku w punkcie (m_1, m_2) .

gdzie $\lambda^2 = -2(1-\rho^2) \ln(h2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})$.

Dla $\rho \neq 0$ osie główne mają równania:

$$y - m_2 = \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2 \pm \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + 4\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}(x - m_1)$$

Dla $\rho = 0$ osie rozpatrywanej elipsy są równoległe do osi układu współrzędnych.

Zauważmy, że gdy $\rho^2 \rightarrow 1$ to jedna oś się wydłuża, a druga skraca, zależność między zmiennymi staje się ściśle liniowa.

Osie powyższej elipsy tworzą z osią OX kąty α i $\alpha + \pi/2$ gdzie

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$$

Funkcja charakterystyczna:

$$\varphi(t) = \exp\left(im^T t - \frac{1}{2} t^T K t\right)$$

gdy $n = 2$ to

$$\varphi(t_1, t_2) = \exp\left(i(t_1 m_1 + t_2 m_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2)\right)$$

Twierdzenie.

Dowolny rozkład brzegowy normalnego rozkładu n -wymiarowego jest rozkładem normalnym.

Twierdzenie.

Jeśli składowe normalnego rozkładu n -wymiarowego są parami nieskorelowane to są niezależne.

Zbieżność ciągów losowych

Zbieżność ciągu zmiennych losowych z prawdopodobieństwem 1 (prawie na pewno)

Ciąg zmiennych losowych (X_n) jest zbieżny do zmiennej losowej X z prawdopodobieństwem 1 jeśli

$$P\left(\left\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

Średniokwadratowa zbieżność ciągu zmiennych losowych

Ciąg zmiennych losowych (X_n) jest średniokwadratowo zbieżny do zmiennej losowej X jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^2) = 0$$

Rozpatrując ten rodzaj zbieżności zakładamy, że dla występujących tu zmiennych losowych (X_n) , X istnieje skończony moment rzędu 2.

Niekiedy stosuje się zapis l.i.m. $X_n = X$ (skrót od „limit in mean”).

Stochastyczna zbieżność ciągu zmiennych losowych

Ciąg zmiennych losowych (X_n) jest stochastycznie (wg prawdopodobieństwa) zbieżny do zmiennej losowej X jeśli

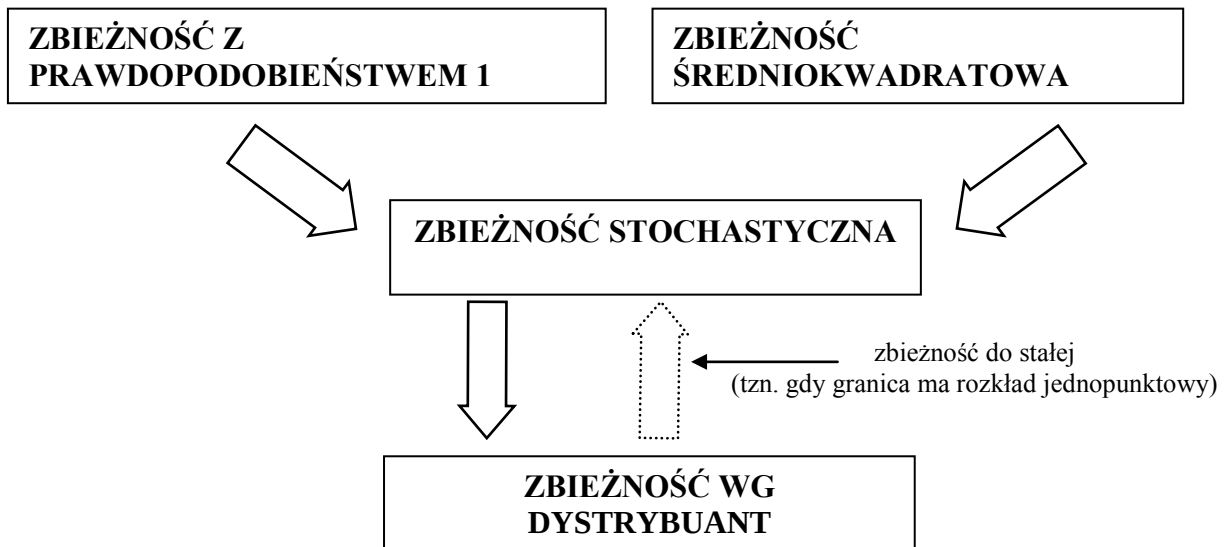
$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

lub równoważnie

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

Zbieżność ciągu zmiennych losowych wg dystrybuant (wg rozkładu)

Ciąg zmiennych losowych (X_n) jest zbieżny do zmiennej losowej X wg dystrybuant jeśli ciąg ich dystrybuant F_n jest zbieżny do dystrybuanty F w każdym punkcie jej ciągłości (F jest dystrybuantą zmiennej losowej X).



Przykład.

Rozpatrzmy ciąg zmiennych losowych skokowych określonych na przedziale $[0, 1)$ w następujący sposób

$$X_{kn}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \omega \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right) \\ 0 & \text{gdy } \omega \in [0, 1) - \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right) \end{cases}$$

$$P(X_{kn} = 1) = \frac{1}{n}; \quad P(X_{kn} = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

Ciąg $X_{01}, X_{02}, X_{12}, X_{03}, X_{13}, X_{23}, \dots$ jest zbieżny stochastycznie do zera bo

$$\bigwedge_{0 < \varepsilon < 1} \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n| \geq \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Natomiast ciąg ten nie jest zbieżny w żadnym punkcie przedziale $[0, 1)$ bowiem dla każdego ustalonego punktu otrzymujemy rozbieżny ciąg zer i jedynek (zera i jedynki występują na dowolnie dalekich miejscach).

Przykład.

Ciąg zmiennych losowych X_n ciągłych o rozkładach jednostajnych na przedziałach $(0, 1/n)$ jest zbieżny do rozkładu jednopunktowego X ($P(X = 0) = 1$) wg dystrybuant.

Centralne twierdzenie graniczne Lindeberga – Levy'ego

Jeśli niezależne zmienne losowe X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) mają taki sam rozkład oraz istnieje $E(X_n) = m$ i $D^2(X_n) = \sigma^2 > 0$ to ciąg dystrybuant (F_n) standaryzowanych średnich arytmetycznych $\bar{X}_n$ (lub standaryzowanych sum $\sum_{i=1}^n X_i$)

$$Y_n = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_n - mn}{\sigma \sqrt{n}}$$

jest zbieżny do dystrybuanty Φ rozkładu $N(0, 1)$.

Wniosek

Dla dużych n (w praktyce $n \geq 30$)

$$P\left(a \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}} < b\right) \cong \Phi(b) - \Phi(a)$$

W przypadku szczególnym gdy X_i
($i = 1, 2, \dots, n$) mają rozkład zerojedynekowy to
powyższe twierdzenie nazywamy
twierdzeniem Moivre'a-Laplace'a

(zmienne losowe $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ mają rozkład
dwumianowy).

Wniosek z twierdzenia Moivre'a-Laplace'a:

$$P\left(a \leq \frac{Y_i - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \cong \Phi(b) - \Phi(a)$$

Uwaga. Powyższe twierdzenia wskazują na ważną rolę rozkładu normalnego.

Przykład

Wadliwość partii żarówek wynosi 0,01. Z tej partii żarówek wylosowano 625 żarówek.

Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych żarówek będzie

- a) mniej niż 10 wadliwych,
- b) najwyżej 10 wadliwych.

Rozwiązanie.

Y_n – liczba wadliwych żarówek wśród
wylosowanych,

Ad a)

$$P(Y_i < 10) = P\left(\frac{Y_i - 625 \cdot 0,01}{\sqrt{625 \cdot 0,01 \cdot 0,99}} < \frac{10 - 625 \cdot 0,01}{\sqrt{625 \cdot 0,01 \cdot 0,99}}\right) \cong$$

$$\cong \Phi(1,51) = 0,93448$$

Ad b)

$$\begin{aligned} P(Y_i \leq 10) &= P(Y_i < 10) + P(Y_i = 10) = P(Y_i < 11) = \\ &= P\left(\frac{Y_i - 625 \cdot 0,01}{\sqrt{625 \cdot 0,01 \cdot 0,99}} < \frac{11 - 625 \cdot 0,01}{\sqrt{625 \cdot 0,01 \cdot 0,99}}\right) \cong \Phi(1,91) = 0,97193 \end{aligned}$$

Prawo wielkich liczb Chinczyna

(X_i) – ciąg niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie oraz niech istnieje $E(X_i) = m$.

Wtedy ciąg $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ jest zbieżny stochastycznie do m .

Wniosek

Dla dużych n jeśli istnieje $D^2(X_n) = \sigma^2 > 0$ to

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} P(|Y_n - m| < \varepsilon) \cong 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1$$

Przypadek szczególny – **prawo wielkich liczb Bernoulliego**:

(X_i) – ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie dwumianowym wtedy ciąg $\frac{X_n}{n}$ jest stochastycznie zbieżny do p .

Wniosek

Dla dużych n :

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \cong 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) - 1$$

Przykład

Wadliwość partii żarówek wynosi 0,1. Z tej partii żarówek losujemy n żarówek. Ile żarówek należy wylosować aby prawdopodobieństwo, że średnia liczba wadliwych żarówek różniła się co do wartości bezwzględnej od wadliwości partii o mniej niż 0,025 było co najmniej równe 0,95.

Rozwiązanie

Y_n – liczba wadliwych żarówek wśród
wylosowanych

$$P\left(\left|\frac{Y_n}{n} - 0,1\right| < 0,025\right) \cong 2\Phi\left(\frac{0,025\sqrt{n}}{\sqrt{0,1 \cdot 0,9}}\right) - 1 \geq 0,95$$

stąd

$$\Phi\left(\frac{0,025\sqrt{n}}{\sqrt{0,1 \cdot 0,9}}\right) \geq 0,975$$

$$\text{oraz } \frac{0,025\sqrt{n}}{\sqrt{0,1 \cdot 0,9}} \geq 1,96$$

$$\text{zatem } \sqrt{n} \geq 23,52 \quad \text{i} \quad n > 553.$$

Ocenę odchylenia wartości zmiennej losowej od jej wartości oczekiwanej daje **nierówność Czebyszewa**:

X – zmienna losowa oraz istnieje $E(X) = m$
i $D^2(X) = \sigma^2 > 0$ wtedy

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Z nierównością Czebyszewa związane są inne nierówności np.

1) nierówność Markowa

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{p > 0} P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|X|^p}{\varepsilon^p}$$

2) nierówność Czebyszewa II

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{EX}{\varepsilon}$$

3) nierówność Czebyszewa III (wykładnicza)

$$\text{jeśli } Ee^{\lambda X} < \infty \quad \bigwedge_{\varepsilon > 0} P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{Ee^{\lambda X}}{e^{\lambda \varepsilon}}$$

4) nierówność Bernsteina

jeśli S_n – liczba sukcesów w n próbach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p to

L.Kowalski 26.09.2011