

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

WYKŁAD 6.

Funkcja charakterystyczna.

Funkcję $\varphi: R \rightarrow C$ (zespoloną zmiennej rzeczywistej) określoną wzorem

$$\varphi(t) = \varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad t \in R$$

nazywamy **funkcją charakterystyczną** zmiennej losowej X .

Zatem dla zmiennej losowej skokowej
o funkcji prawdopodobieństwa $P(X = x_k) = p_k$

$$\varphi(t) = \sum_k p_k e^{itx_k}, \quad t \in R$$

natomiast dla zmiennej losowej ciągłej o gęstości $f(x)$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx} dx, \quad t \in R$$

Powyższy szereg i całka są bezwzględnie zbieżne do 1 (bo wartości modułu zmiennej losowej e^{itX} , $t \in R$ są równe 1 i odpowiednio

$$\sum_k p_k = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1), \quad \text{zatem}$$

funkcja charakterystyczna zawsze istnieje.

Własności funkcji charakterystycznej.

a) $\varphi(0) = 1, \quad |\varphi(t)| \leq 1, \quad t \in R,$

b) φ jest funkcją jednostajnie ciągłą,

c) $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(ta),$

d) jeśli istnieje $E|X|^k < \infty, k \geq 1$, to φ jest funkcją klasy C^k oraz $\varphi^{(k)}(0) = i^k EX^k$, czyli

$$EX^k = m_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k},$$

e) jeśli istnieje i jest skończona pochodna

$$\varphi^{(2k)}(0) \text{ to } EX^{2k} < \infty, k \geq 1$$

f) $\bar{\varphi}_X(t) = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t)$

g) jeśli X, Y - niezależne zmienne losowe to

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t),$$

h) funkcja charakterystyczna określa rozkład zmiennej losowej jednoznacznie.

Ad. b)

$$\begin{aligned} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| &= |Ee^{i(t+h)X} - Ee^{itX}| = \\ &= |E(e^{itX}(e^{ihX} - 1))| \leq E(|e^{itX}| |e^{ihX} - 1|) = E(|e^{ihX} - 1|) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Ponieważ ostatnie wyrażenie nie zależy od t to zbieżność jest jednostajna.

Ad. c)

$$\varphi_{aX+b}(t) = Ee^{it(aX+b)} = e^{itb} Ee^{iatX} = e^{itb} \varphi_X(ta),$$

Ad. d) dla zmiennej losowej ciągłej,

Ponieważ rozpatrywana funkcja jest jednostajnie ciągła to można różniczkować względem t pod znakiem całki i wtedy

$$\varphi'(t) = i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{itx} dx, \quad \text{stąd } \varphi'(0) = i EX$$

Przez indukcję można pokazać, że

$$\varphi^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) e^{itx} dx, \quad \text{stąd } \varphi^{(k)}(0) = i^k EX^k$$

$$\varphi_{X+Y}(t) = Ee^{it(X+Y)} = E(e^{itX} e^{itY}) =$$

$$\text{Ad. g)} = Ee^{itX} Ee^{itY} = \varphi_X(t) \varphi_Y(t)$$

Funkcje charakterystyczne podstawowych rozkładów zostały podane w ich zestawieniu, wyprowadzimy niektóre z tych wzorów.

Przykład.

Wyznamy funkcję charakterystyczną rozkładu dwumianowego.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{gdzie } q = 1 - p$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{itk} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^{it})^k q^{n-k} = (pe^{it} + q)^n$$

Przykład.

Wyznamy funkcję charakterystyczną rozkładu wykładniczego.

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} ae^{-ax} e^{itx} dx = a \int_0^{\infty} e^{(it-a)x} dx = \frac{a}{a - it}$$

Przykład.

Wyznamy za pomocą funkcji charakterystycznej moment rzędu 4 zmiennej losowej X o rozkładzie $N(0, 1)$.

$$\text{Mamy } \varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \text{ zatem } \varphi'(t) = -te^{-\frac{t^2}{2}},$$

$$\varphi''(t) = (t^2 - 1)e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \varphi'''(t) = (-t^3 + 3t)e^{-\frac{t^2}{2}},$$

$$\varphi^{(4)}(t) = (t^4 - 6t^2 + 3)e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \varphi^{(4)}(0) = 3,$$

$$\text{stad} \quad m_4 = \frac{3}{i^4} = 3.$$

Wniosek. Kurtoza tej zmiennej losowej wynosi 3.

Własność 1.

Jeśli funkcja charakterystyczna φ zmiennej losowej X jest bezwzględnie całkowalna, to X jest zmienną losową ciągłą i gęstość jej wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-itx} dt$$

Własność 2.

Jeśli funkcja charakterystyczna φ zmiennej losowej X jest okresowa o okresie 2π , to X jest zmienną losową skokową o wartościach całkowitych i jej funkcja prawdopodobieństwa wyraża się wzorem

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-itk} dt$$

k - liczba całkowita

Przykład.

Wyznamy rozkład prawdopodobieństwa
zmiennej losowej, której funkcja charakterystyczna
ma postać $\varphi(t) = e^{3it}$.

Jest to funkcja okresowa o okresie 2π , zatem X jest zmienną losową skokową o wartościach całkowitych i jej funkcja prawdopodobieństwa wyraża się wzorem

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it3} e^{-itk} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(3-k)} dt = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k = 3 \\ 0 & \text{gdy } k \neq 3 \end{cases}$$

Zatem X ma rozkład jednopunktowy $P(X = 3) = 1$.