

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

WYKŁAD 2.

Prawdopodobieństwo warunkowe. Niezależność zdarzeń

Przykład.

Rzucamy raz symetryczną sześcienną kostką.

Badane zdarzenie $A = \{2, 4, 6\}$ - wypadła parzysta liczba oczek **ma szansę zajścia równą 0,5.**

Zdobyliśmy **informację**, że wypadły najwyżej trzy oczka (zdarzenie $B = \{1, 2, 3\}$).

Zatem możemy ocenić, że szansa otrzymania parzystej liczby oczek gdy wiemy, że nie wypadły więcej niż trzy oczka wynosi
(zawężenie przestrzeni probabilistycznej do B)

$$\frac{|\{2\}|}{|\{1,2,3\}|} = \frac{1}{3}$$

lub dzieląc licznik i mianownik przez
 $|\Omega| = |\{1,2,3,4,5,6\}| = 6$

$$\frac{|\{2\}|}{|\{1,2,3\}|} = \frac{|\{2,4,6\} \cap \{1,2,3\}|}{|\{1,2,3\}|} = \frac{\frac{|\{2,4,6\} \cap \{1,2,3\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|}}{\frac{|\{1,2,3\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|}} =$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

Zatem uzyskanie informacji o zajściu zdarzenia B zmienia ocenę szansy zajścia zdarzenia A (takie zdarzenia później określimy jako zależne).

Gdybyśmy natomiast uzyskali informację, że wypadły najwyżej cztery oczka

(zdarzenie $C = \{1, 2, 3, 4\}$)

to szansa otrzymania parzystej liczby oczek gdy wiemy, że nie wypadły więcej niż cztery oczka **wynosi też 0,5.**

Zatem uzyskanie informacji o zajściu zdarzenia C **nie zmienia oceny szansy** zajścia zdarzenia A (takie zdarzenia później określimy jako niezależne).

Jeśli $P(B) > 0$, $B \in S$ to określamy **prawdopodobieństwo warunkowe** dowolnego zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad A \in S$$

Pisząc $P(A|B)$ będziemy domyślnie zakładać, że $P(B) > 0$.

Własność.

Jeśli $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ jest przestrzenią probabilistyczną i $P(B) > 0$, $B \in \mathcal{S}$ to

$(\Omega, \mathcal{S}, P^*)$ gdzie $P^*(A) = P(A|B)$, $A \in \mathcal{S}$ jest również przestrzenią probabilistyczną.

Dowód.

I) $P^*(A) \geq 0$, bo $P(B) > 0$, $P(A \cap B) \geq 0$, $A \in S$

II) $P^*(\Omega) = 1$, bo $\frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

III) $A_1, A_2, \dots$ - zdarzenia parami wykluczające się

$$\begin{aligned} P^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right)}{P(B)} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P^*(A_i) \end{aligned}$$

Uwaga.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

wynika z określenia $P(B|A)$.

Podobnie

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

Powyższy wzór można uogólnić następująco:

Niech

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) > 0$$

wtedy

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) =$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Przykład.

Sygnał przechodzi przez trzy stacje przekąźnikowe. Pierwszy przekąźnik przekazuje sygnał z prawdopodobieństwem 0,9. Drugi przekąźnik przekazuje sygnał otrzymany z pierwszego przekąźnika z prawdopodobieństwem 0,8. Trzeci przekazuje sygnał otrzymany za pośrednictwem pierwszego i drugiego przekąźnika z prawdopodobieństwem 0,5. Jakie jest prawdopodobieństwo dotarcia sygnału?

Niech A_i - i-ty przekąźnik przekazał sygnał.

Należy obliczyć $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo iloczynu trzech zdarzeń

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) = \\ &= 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,5 = 0,36 \end{aligned}$$

Twierdzenie (o prawdopodobieństwie całkowitym)

Niech zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$, spełniają warunki:
 $A_1, A_2, \dots, A_n$, są parami wykluczające się,

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

(o takim układzie zdarzeń mówimy, że jest **zupełny**)

$P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

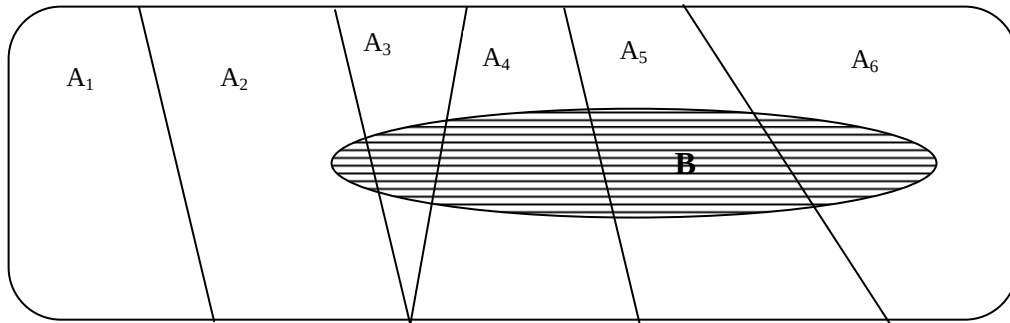
wtedy dla dowolnego zdarzenia B

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

Dowód. Z założenia o układzie zupełnym i definicji prawdopodobieństwa warunkowego mamy

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i) \end{aligned}$$



Twierdzenie (Bayesa)

Niech zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$, spełniają warunki poprzedniego twierdzenia.

wtedy dla dowolnego zdarzenia B takiego, że $P(B) > 0$ mamy:

$$\begin{aligned}
 P(A_k|B) &= \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(B)} = \\
 &= \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)} = \\
 &= \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}
 \end{aligned}$$

Uwaga.

Niekiedy prawdopodobieństwo warunkowe $P(A_k|B)$ nazywa się prawdopodobieństwem *a posteriori* (po doświadczeniu) w odróżnieniu od $P(A_k)$ nazywanego prawdopodobieństwem *a priori* (przed doświadczeniem).



Thomas Bayes (1702—1761) brytyjski matematyk i duchowny presbiteriański, znany ze sformułowania opublikowanego pośmiertnie twierdzenia Bayesa, które to zapoczątkowało dział statystyki.

Przykład

W urnie pierwszej jest 7 kul białych i 3 czarne. W urnie drugiej są 4 kule białe i 6 czarnych. Rzucamy kostką, jeśli wypadnie liczba oczek podzielna przez 3 to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, w przeciwnym przypadku losujemy jedną kulę z drugiej urny.

- a) Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?
- b) Wylosowana kula okazała się biała, jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano ją z pierwszej urny?

A_i - losowanie z i tej urny,
 $P(A_1) = 1/3, P(A_2) = 2/3,$

B - wylosowania kuli białej,
 $P(B|A_1) = 0,7 \quad P(B|A_2) = 0,4$

Ad a) Z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym mamy

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) =$$

$$= \frac{1}{3}0,7 + \frac{2}{3}0,4 = 0,5$$

Ad b) Z twierdzenia Bayesa mamy

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}0,7}{0,5} = \frac{7}{15}$$

Zdarzenia A i B są **niezależne** gdy

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad A, B \in S$$

Zauważmy , że jeśli zdarzenie A jest niezależne od zdarzenia B to

$$P(A|B) = P(A)$$

Ogólnie.

Zdarzenia $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) są niezależne, jeśli

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

$$\forall 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n, \quad k \geq 2$$

W szczególności dla $n=3$.

Zdarzenia A, B, C są niezależne, jeśli

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Uzupełnienia.

Poniższy przykład pokazuje, że przy badaniu wpływu jednego zdarzenia na inne liczy się nie fakt jego fizycznego zajścia lecz uzyskanie informacji o jego wyniku.

Przykład.

W pudełku mamy $d > 1$ żarówek dobrych i w żarówek wadliwych. Losowo wyciągamy jedną żarówkę i odkładamy ją poza pudełko bez oglądania po czym losujemy następną. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem dobrej żarówki.

D_i - zdarzenie polegające na wylosowaniu za i - tym razem dobrej żarówki, $i = 1, 2$.

W_i - zdarzenie polegające na wylosowaniu za i - tym razem wadliwej żarówki, $i = 1, 2$.

Z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym mamy

$$\begin{aligned}P(D_2) &= P(D_2|D_1)P(D_1) + P(D_2|W_1)P(W_1) = \\&= \frac{d-1}{d+w-1} \cdot \frac{d}{d+w} + \frac{d}{d+w-1} \cdot \frac{w}{d+w} = \\&= \frac{d(d-1)+dw}{(d+w-1)(d+w)} = \frac{d(d+w-1)}{(d+w-1)(d+w)} = \\&= \frac{d}{(d+w)} = P(D_1)\end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo "przyszłych" zdarzeń.

Jeśli w wyniku doświadczenia wiemy, że zaszło zdarzenie A i następnie będzie wykonane kolejne doświadczenie w wyniku, którego może zajść zdarzenie B to z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym mamy

$$P(B|A) = \sum_{i=1}^n P(A_i|A)P(B|A_i \cap A)$$

Uzasadnienie. Przekształcając prawą stronę otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n P(A_i|A)P(B|A_i \cap A) &= \sum_{i=1}^n \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} \frac{P(B \cap A_i \cap A)}{P(A_i \cap A)} = \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n P(B \cap A_i \cap A)}{P(A)} = \\
 &= \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i \cap A)\right)}{P(A)} = \frac{P\left(B \cap A \cap \bigcup_{i=1}^n (A_i)\right)}{P(A)} = \\
 &= \frac{P(B \cap A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B|A)
 \end{aligned}$$

Przykład.

W I pudełku mamy $a > 1$ żarówek dobrych i b żarówek wadliwych. W II pudełku mamy $c > 1$ żarówek dobrych i d żarówek wadliwych. Najpierw rzucamy monetą symetryczną, jeśli wypadnie orzeł losowo wyciągamy jedną żarówkę z I pudełka, w przeciwnym przypadku wyciągamy jedną żarówkę z II pudełka. Wylosowana w ten sposób żarówka okazała się dobra. Następnie losujemy drugą żarówkę z tego samego pudełka. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem dobrej żarówki.

A_i - zdarzenie polegające na wylosowaniu i - tej urny,
 $i = 1, 2$.

A - zdarzenie polegające na wylosowaniu za
pierwszym razem dobrej żarówki,

B - zdarzenie polegające na wylosowaniu za drugim
razem dobrej żarówki,

$$P(A_1) = P(A_2) = 0,5 ;$$

$$P(A_1|A) = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}} ;$$

$$P(A_2|A) = \frac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}}$$

$$P(B|A_1 \cap A) = \frac{a-1}{a+b-1};$$

$$P(B|A_2 \cap A) = \frac{c-1}{c+d-1}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
 P(B|A) &= P(A_1|A)P(B|A_1 \cap A) + P(A_2|A)P(B|A_2 \cap A) = \\
 &= \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} + \frac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}} \cdot \frac{c-1}{c+d-1} = \\
 &= \frac{\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{c(c-1)}{(c+d)(c+d-1)}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}}
 \end{aligned}$$

Problem ruiny gracza.

W jednej partii gracz A wygrywa od gracza B 1zł z prawdopodobieństwem p lub przegrywa 1zł z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Początkowo gracz A ma k złotych, gracz B ma $n - k$ złotych. Gra kończy się gdy jeden z graczy zostanie zrujnowany.

p_k - prawdopodobieństwo, ($k = 0, 1, \dots, n$)..że A **nie zostanie zrujnowany** gdy ma początkowo k złotych. Oczywiście $p_0 = 0$; $p_n = 1$.

Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite mamy

$$p_k = p_{k+1} \cdot p + p_{k-1} \cdot (1-p) \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

Zapiszmy tą równość w postaci

$$(p + (1-p))p_k = p_{k+1} \cdot p + p_{k-1} \cdot (1-p)$$

stąd

$$\frac{p_{k+1} - p_k}{p_k - p_{k-1}} = \frac{1-p}{p}$$

zatem ciąg

$$a_k = p_k - p_{k-1}$$

jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{1-p}{p}$.

a) Jeśli $p = 0,5$ jest to ciąg stały o wyrazach równych p_1 .

Stąd $p_k = kp_1$ i skoro $p_n = 1$ to $p_1 = 1/n$ oraz

$$p_k = \frac{k}{n}$$

b) jeśli $p \neq 0,5$ jest to suma wyrazów ciągu $a_k = p_1 \cdot q^{k-1}$ $k = 1, 2, \dots, n$ wynosi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = p_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1}) = p_1 \frac{1-q^k}{1-q}$$

z drugiej strony

$a_1 + a_2 + \dots + a_k = (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) + \dots + (p_k - p_{k-1}) = p_k - p_0 = p_k$
 stąd

$$p_k = p_1 \frac{1 - q^k}{1 - q} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Wartość p_1 wyznaczamy z warunku $p_n = 1$
 (podstawiamy $k = n$). Stąd $p_1 = \frac{1 - q}{1 - q^n}$ co ostatecznie daje

$$p_k = \frac{1 - q^k}{1 - q^n} = \frac{1 - \left(\frac{1 - p}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{1 - p}{p}\right)^n} \quad k = 1, 2, \dots, n$$