RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

WYKŁAD 1.

Literatura:
Marek Cieciura, Janusz Zacharski, „Metody probabilistyczne w ujęciu praktycznym”,

L. Kowalski, „Statystyka”, 2005

R.Leitner, J.Zacharski, "Zarys matematyki wyższej. Część III",
A.Plucińska, E.Pluciński, "Probabilistyka",
W.Krysicki i inni, "Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach", cz. I.
J.Jakubowski, R.Sztencel „Wstęp do teorii prawdopodobieństwa”.

1. Przestrzeń probabilistyczna

Jeśli badamy doświadczenie losowe to jego **model matematyczny** powinien zawierać trzy elementy:

- zbiór możliwych wyników doświadczenia,
- zbiór zdarzeń,
- ocenę szansy zajścia zdarzeń w skali [0, 1].

Te trzy elementy łącznie nazywamy **przestrzenią probabilistyczną.**

(Ω, S, P) – **przestrzeń probabilistyczna** (matematyczny model zjawiska losowego),

Ω – zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych,

S–zbiór zdarzeń, (w praktyce - podzbiory zbioru Ω),

P – prawdopodobieństwo (funkcja przyporządkowująca zdarzeniom szansę ich zajścia).

$$P : S \to R$$

Uwaga. Mówimy, że zaszło zdarzenie A jeśli wynikiem doświadczenia jest dowolne zdarzenie elementarne $\omega \in A$ (zdarzenie sprzyjające dla A). Zatem zdarzenia identyfikujemy z podzbiorem tych zdarzeń elementarnych, które mu sprzyjają.

Ponieważ zdarzenia są zbiorami to będziemy stosować działania na zbiorach do zapisu działań na zdarzeniach.

suma zdarzeń A, B $\quad A \cup B$

iloczyn zdarzeń A, B $\quad A \cap B$

zdarzenie przeciwne do zdarzenia A $\quad A' = \Omega - A$

różnica zdarzeń A, B $\quad A - B$

Mówimy, że:

zdarzenie A **pociąga** zdarzenie B gdy $A \subset B$

zdarzenia A, B **wykluczają się (są rozłączne)** gdy $A \cap B = \varnothing$.

Zbiór zdarzeń S powinien spełniać warunki (jest to **σ - ciało zdarzeń**):

(S-I) $\Omega \in S$

(S-II) Jeśli $A \in S$ to $A' \in S$

(S-III) Jeśli $A_i \in S,\ i = 1, 2, \ldots$ to $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$

Jeśli warunek (S-III) zastąpimy słabszym warunkiem (S-III')

(S-III') Jeśli $A, B \in S\ldots$ to $A \cup B \in S$

to S nazywamy **ciałem zdarzeń** i oznaczamy S_0.

Dla danego Ω można teoretycznie przyjąć różne σ - ciała zdarzeń (o różnym "bogactwie" zdarzeń).

Na przykład.

1) $S = \{\emptyset, \Omega\}$,

2) $S = \{\emptyset, \Omega, A, A'\}$, dla ustalonego $A \subset \Omega$,

3) S = rodzina wszystkich podzbiorów zboru Ω.

Dla Ω o skończonej lub przeliczalnej liczbie elementów zwykle przyjmuje się, że zdarzenia to dowolne podzbiory tego zbioru co zapisujemy $S = 2^{\Omega}$ lub $S = P(\Omega)$.

Gdy Ω jest zbiorem nieprzeliczalnym np. $\Omega = R$, nie należy jako rodziny zdarzeń przyjmować σ - ciała generowanego przez wszystkie zdarzenia jednoelementowe, wtedy bowiem nie można rozpatrywać zdarzeń typu "wartość obserwacji jest mniejsza od a", taki przedział nie jest ani przeliczalną sumą zbiorów jednopunktowych ani dopełnieniem takiej sumy.

Jeżeli jako S przyjmiemy σ - ciało generowane przez zbiory postaci $(-\infty, a)$ to wszystkie przedziały będą zdarzeniami, bowiem w szczególności

$$[a,b) = (-\infty, b) - (-\infty, a)$$

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a, b + \frac{1}{n} \right)$$

$$(a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b \right]$$

$$\{a\} = (-\infty, a] \cap [a, \infty)$$

Ponadto zdarzeniami są wszystkie zbiory otrzymane jako wyniki sum, iloczynów i dopełnień na przedziałach.

Takie σ - ciało podzbiorów prostej nazywamy σ - ciałem **zbiorów borelowskich** i oznaczamy B(R).

Praktycznie wszystkie zbiory są borelowskie, zbiory nieborelowskie istnieją, trudno podać konkretny przykład takiego zbioru bo ich konstrukcja jest nieefektywna.

Gdy Ω = R, nie należy jako rodziny zdarzeń przyjmować wszystkich podzbiorów bowiem na tak "bogatym" σ - ciele nie da się określić poprawnie prawdopodobieństwa.

Émile Borel (1871 - 1956) - francuski matematyk, **pionier teorii miary.**

Henri Lebesgue (1875 - 1941) – francuski matematyk, pionier teorii miary.

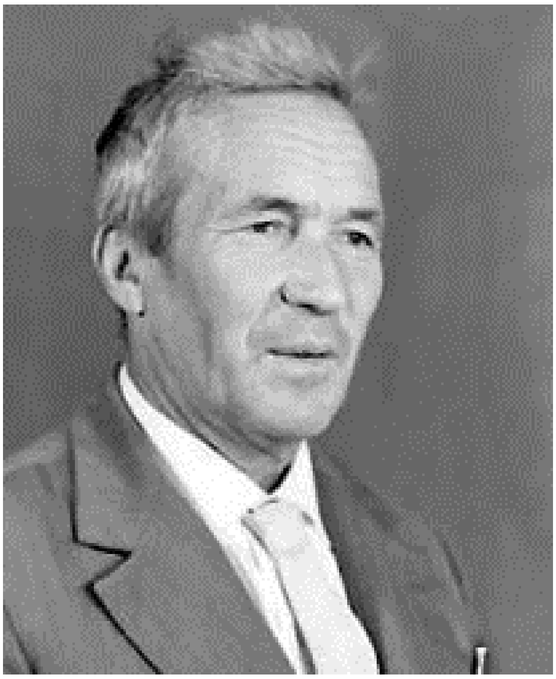
Aksjomaty prawdopodobieństwa:

(PI) $P(A) \geq 0 \qquad A \in S$

(PII) $P(\Omega) = 1$

(PIII) $P(A_1 \cup A_2 \cup ....) = P(A_1) + P(A_2) + ...$

$A_i \in S;$ parami wykluczające się.



Andriej Kołmogorow (1903-1987) – rosyjski matematyk, m.in. sformułował aksjomaty prawdopodobieństwa.

Własności prawdopodobieństwa

a) $P(\varnothing) = 0$

b) $P(A') = 1 - P(A)$

gdzie $A' = \Omega - A$ jest zdarzeniem przeciwnym

c) Jeśli zdarzenia $A_1, \ldots A_n$ wykluczają się, to

$$\mathrm{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \ldots + \mathrm{P}(A_n)$$

d) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \qquad A_1, A_2 \in S;$

e) $P(A_1) \leq P(A_2)$ dla $A_1 \subset A_2 \quad A_1, A_2 \in S;$

f) Jeśli

$A_1 \subset A_2$, to $\mathrm{P}(A_2 - A_1) = \mathrm{P}(A_2) - \mathrm{P}(A_1)$

Jeśli zdarzeń elementarnych jest skończenie wiele i są one jednakowo prawdopodobne to możemy skorzystać z tzw. **klasycznej definicji prawdopodobieństwa.**

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{liczba\ \ zdarzeń - elementarnych\ sprzyjających}{liczba\ \ wszystkich\ \ zdarzeń - elementarnych} \qquad A \in S$$

Uwaga.

Liczba **permutacji** zbioru n elementowego wynosi

$$P_n = n!$$

Liczba k wyrazowych **wariacji z powtórzeniami** zbioru n elementowego wynosi

$$W_n^k = n^k$$

Liczba k wyrazowych **wariacji bez powtórzeń** zbioru n elementowego $(k \le n)$ wynosi

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Liczba k wyrazowych **kombinacji** zbioru n elementowego ($k \le n$) wynosi

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Przykład

W portfelu mamy umieszczone w przypadkowy sposób 1000 zł w banknotach po 200 zł i 100 zł. Wiadomo, że banknotów po 200 zł jest dwa razy więcej niż banknotów po 100 zł. Wyjmujemy losowo z portfela 3 banknoty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyjęte banknoty mają łącznie wartość 500 zł ?

Dyskretna przestrzeń probabilistyczna.

Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$, $\quad S = 2^{\Omega}$

Jeśli określimy prawdopodobieństwo dla zdarzeń jednoelementowych

$$P(\{\omega_i\}) = p_i$$

gdzie $p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1$

wtedy dla $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ...\}$ mamy

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ...\}) = P(\{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup ...) =$$

$$= P(\{\omega_{i_1}\}) + P(\{\omega_{i_2}\}) + ... = p_{i_1} + p_{i_2} + ...$$

Prawdopodobieństwo geometryczne

Jeśli zdarzenia elementarne są podzbiorem o mierze skończonej przestrzeni R^n

(jeśli n = 1 to miarą jest **długość**,

dla n = 2 **pole**,

dla n = 3 **objętość**)

i są one jednakowo prawdopodobne to stosujemy tzw. **prawdopodobieństwo geometryczne.**

$$P(A) = \frac{miara\ A}{miara\ \Omega} \qquad A \in S$$

Przykład

W trójkącie równobocznym ABC o boku a losowo wybieramy punkt D. Jakie jest prawdopodobieństwo, że trójkąt ABD ma pole nie większe niż połowa pola trójkąta ABC ?

Zbiorem zdarzeń elementarnych Ω jest zbiór punktów trójkąta ABC zatem miara Ω jest równa $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, natomiast zbiorem zdarzeń sprzyjających jest zbiór punktów trapezu o dolnej podstawie AB i górnej podstawie EF, gdzie E, F są środkami boków BC i AC. Zbiór zdarzeń sprzyjających ma (z podobieństwa trójkątów) miarę

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 0{,}25\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 0{,}75\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Więc szukane prawdopodobieństwo wynosi 0,75.

Ten sam wynik można szybko uzyskać rozpatrując podział trójkąta ABC na cztery równoboczne trójkąty przystające.

Określanie prawdopodobieństwa na Ω = R.

Działania skończone na przedziałach $[a,b) \subset R$ (a, b - mogą być nieskończone) wyznaczają **ciało** zbiorów S_0.

Określa się najpierw prawdopodobieństwo na zbiorach tego typu i korzysta z **twierdzenia Caratheodory'ego** o jednoznacznym rozszerzeniu tego prawdopodobieństwa na σ - ciało zbiorów borelowskich. Zauważmy, że najmniejszym σ - ciałem zawierającym S_0 jest B(R), czyli σ - ciało **zbiorów borelowskich**.

Constantin Carathéodory (1873 - 1950) – matematyk pochodzenia greckiego. Jego prace dotyczyły m.in. teorii miary.

Wygodnym sposobem określenia prawdopodobieństwa na zbiorach $[a,b) \subset R$ jest zastosowanie funkcji $F : R \longrightarrow R$ o własnościach:

1. F jest funkcją niemalejącą,
2. F jest funkcją lewostronnie ciągłą,
3. $F(-\infty) = 0; \quad F(\infty) = 1$,

(funkcje o takich własnościach będziemy nazywać **dystrybuantą**).

Takie funkcje istnieją, np.

a) $$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

b) $$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

Następnie określamy

$$P([a,b)) = F(b) - F(a)$$

jest to dobrze określone prawdopodobieństwo na ciele S_0.

Uwaga

Jeśli mamy możliwość wielokrotnego powtarzania (niezależnie) doświadczenia losowego w tych samych warunkach to możemy wyznaczyć przybliżoną wartość prawdopodobieństwa wybranego zdarzenia A

$$P(A) \approx \frac{k}{n}$$

gdzie

n–liczba wykonanych doświadczeń;

k–liczba tych doświadczeń w których zaszło zdarzenie A.

Sposób ten stosuje się w statystyce.

Przykład

Doświadczenie: rzut symetryczną kostką,
Zdarzenie A: liczba oczek podzielna przez 3 (zdarzenia sprzyjające: 3 i 6).
Przykładowa realizacja 1000 rzutów:

n	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
n/k	0,31	0,35	0,353	0,340	0,336	0,342	0,333	0,338	0,334	0,337

Wykres przykładowej realizacji potwierdza przypuszczenie, że iloraz *k/n* dąży do 1/3 (prawdopodobieństwo zdarzenia *A*).