Podstawowe informacje o rozkładzie jednostajnym dyskretnym

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa.
c, n - całkowite; n > 0

$$P(X = k) = \frac{1}{n} \quad k = c, c + 1, c + 2, ..., c + n - 1$$

Funkcja charakterystyczna.

$$\varphi(t) = \frac{e^{ict}\left(1 - e^{\text{int}}\right)}{n\left(1 - e^{it}\right)}$$

Parametry:
Wartość oczekiwana

$$EX = c + (n - 1)/2;$$

Wariancja

$$D^2X = (n^2 - 1)/12$$

Odchylenie standardowe

$$DX = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$$

Momenty zwykłe

$$m_2 = \frac{2n^2 + 3(2c-1)n + 1}{6} + c(c-1)$$

Uwaga. W dowodzie korzystamy z równości: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$m_3 = \frac{n^3 + 2(2c-1)n^2 + (6c^2 - 6c + 1)n}{4} + c(c^2 - 1{,}5c + 0{,}5)$$

$$m_4 = \frac{6n^4 + 15(2c-1)n^3 + 10(6c^2 - 6c + 1)n^2 + 30c(2c^2 - 3c + 1)n - 1}{30} + c^2(c^2 - 2c + 1)$$

Momenty centralne

$$\mu_3 = 0$$

$$\mu_4 = \frac{(n^2 - 1)(3n^2 - 7)}{240}$$

Współczynnik asymetrii

$$a = 0$$

Kurioza (wsk. kurtozy)

$$k = -1{,}2 - 2{,}4/(n^2 - 1)$$

Generowanie liczb losowych o tym rozkładzie:

$$x_i = \lfloor nr_i \rfloor + c$$

gdzie r_i – liczby losowe o rozkładzie jednostajnym w przedziale (0, 1).

Podstawowe informacje o rozkładzie jednostajnym ciągłym

Rozkład którego gęstość jest stała w pewnym przedziale nazywamy **jednostajnym**.
Gęstość rozkładu jednostajnego w (a, b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in (a;\ b) \\ 0 & x \notin (a;\ b) \end{cases}$$

Ponieważ gęstość ta ma oś symetrii w punkcie x = (a + b)/2 to

$$\mathrm{E}X = (a+b)/2$$

Dowód, że

$$\mathrm{D}^2X = (b-a)^2/12$$

Najpierw obliczymy $\mathrm{E}X^2$

$$EX^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{a^2 + 2ab + b2}{3}$$

Zatem

$$D^2X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Funkcja charakterystyczna.

$$\varphi(t) = \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{i(b-a)t}$$

Momenty zwykłe

$$m_k = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}\right) \qquad k = 1, 2, ...$$

Momenty centralne

$$\mu_k = 0 \qquad k = 1, 3, 5, ...$$

$$\mu_k = \frac{(b-a)^k}{2^k(k+1)} \qquad k = 2, 4, 6, ...$$

Współczynnik asymetrii

a = 0

Kurioza (wsk. kurtozy)

k = -1,2

Mediana = $x_{0,5}$ = (a+b)/2

Dominanta d - nie istnieje

Zależności między momentami zwykłymi i centralnymi.

$$m_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu_{k-i} m_1^i$$

w szczególności

$m_2 = \mu_2 + m_1^2$,

$m_3 = \mu_3 + 3\mu_2 m_1 + m_1^3$,

$m_4 = \mu_4 + 4\mu_3 m_1 + 6\mu_2 m_1^2 + m_1^4$,

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} m_{k-i} m_1^i$$

w szczególności

$\mu_2 = m_2 - m_1^2$,

$\mu_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3$,

$\mu_4 = m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_2 m_1^2 - 3m_1^4$,

Kwantylem rzędu p (0 < p < 1) zmiennej losowej X o dystrybuancie F nazywamy liczbę x_p, taką, że

$$F(x_p) \le p \le F(x_p^+)$$

Zauważmy, że dla zmiennej losowej ciągłej x_p wyznaczymy z równości

$$F(x_p) = p$$

Kwantyl rzędu 0,5 nazywamy **medianą**.

Kwantyle rzędu 0,25 ; 0,5; 0,75 nazywamy **kwartylami** (drugi kwartyl jest medianą).

Kwantyle istnieją dla każdej zmiennej losowej, lecz nie zawsze są wyznaczone jednoznacznie.

L.Kowalski, 15.10.2008