C04 – PROCESY STOCHASTYCZNE - Zadania do oddania

Parametr k = liczba trzycyfrowa, dwie ostatnie cyfry to dwie ostatnie cyfry numeru indeksu, pierwsza cyfra to pierwsza cyfra liczby liter pierwszego imienia.

Poszczególne zadania oddajemy na oddzielnych kartkach! Należy wypełnić załączoną stronę tytułową i dodatkową, wpisując wskazane wyniki.

Zadanie 1.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = Ae^{t} + Be^{-t}$, gdzie A, B to zmienne losowe o parametrach: EA = k; EB = 0, i $D^2A = 1$, $D^2B = 2$; współczynnik korelacji między tymi zmiennymi wynosi -0,25.

Zadanie 2.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At + B$, gdzie A, B to zmienne losowe o parametrach: EA = 0; EB = -k, i macierzy kowariancji $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Zadanie 3.

Wyznaczyć rozkład ergodyczny łańcucha Markowa o macierzy (jeśli istnieje).

Narysować graf łańcucha.

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}001\cdot k & 1-0{,}001\cdot k \end{bmatrix}$$

Zadanie 4.

Proces (łańcuch Markowa) przyjmuje wartości -2, 0, 1. Rozkład początkowy p(0) = [0; 0,001·k; 1 - 0,001·k]. Macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

Narysować graf łańcucha. Wyznaczyć:

a) Rozkład prawdopodobieństwa po 2 krokach (tzn. wektor p(2))
b) Wartość oczekiwaną procesu po 2 krokach.
c) Graniczną wartość oczekiwaną.

Zadanie 5.

Niech X(t) będzie procesem Markowa przyjmującym wartości 0 i 1. Przyjmijmy, że rozkład początkowy ma postać [0, 1].

Narysujemy graf procesu i jego macierz intensywności. Ułóż i rozwiąż równanie Kołmogorowa, wyznacz wektor p(t) i rozkład graniczny.

$$[0] \underset{2k}{\overset{k}{\rightleftarrows}} [1]$$

Zadanie 6.

Narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -k & k & 0 \\ 0 & -2k & 2k \\ k & 0 & -k \end{bmatrix}$$

Zapisać równanie wektorowe Kołmogorowa dla tego procesu.

Zadanie 7.

W zakładzie pracują maszyny, z których każda psuje się niezależnie od pozostałych z intensywnością λ = 0,001·k maszyny/godz. Maszyny te są naprawiane przez robotników z intensywnością 4 maszyny/godz. każdy. Niech X(t) oznacza liczbę zepsutych maszyn w chwili t. Rozpatrzmy następujące przypadki:

1) są 4 maszyny i 2 robotników pracujących bez współpracy .
2) są 4 maszyny i 2 robotników pracujących z pełną współpracą.

W każdym przypadku:

a) narysować graf,
b) wyznaczyć prawdopodobieństwa graniczne,
c) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że żaden robotnik nie pracuje,
d) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że dokładnie jedna maszyna jest sprawna,
e) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że przynajmniej jedna maszyna czeka na naprawę,
f) obliczyć średnia liczbę zepsutych maszyn,
g) obliczyć średnia liczbę zajętych robotników.

Zadanie 8.

Strumień awarii pewnego systemu jest modelowany procesem Poissona. Wiadomo, że przeciętnie jedna awaria zdarza się raz na $0{,}03 \cdot k$ godzin.

a) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia dokładnie jednej awarii w ciągu 10 godzin,
b) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia najwyżej dwóch awarii w ciągu 10 godzin,
c) obliczyć prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy w ciągu 10 godzin,
d) obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi awariami będzie większy niż 20 godzin,
e) obliczyć wartość oczekiwaną bezawaryjnego czasu pracy tego systemu.

Zadanie 9.

Rozpatrujemy SMO ze stratami, z pełną współpracą, średnio klienci zgłaszają się co 20 minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi 10 minut.

Wyznacz minimalną liczbę stanowisk obsługi tak aby $P_{odm} < 0{,}0001 \cdot k$.

Dla tak wyznaczonej liczby stanowisk oblicz prawdopodobieństwo:

- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest dokładnie jeden klient,
- tego, że w SMO jest najwyżej jeden klient,
- tego, że czas między kolejnymi zgłoszeniami przekracza 0,5 godziny,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO.

Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.

Zadanie 10.

Rozpatrujemy SMO z ograniczonymi stratami, z pełną współpracą, średnio klienci zgłaszają się co $0{,}02 \cdot k$ minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi $0{,}01 \cdot k$ minut. W poczekalni jest 1 miejsce. Wyznacz minimalną liczbę stanowisk obsługi tak aby $P_{odm} < 0{,}0001 \cdot k$.

Dla tak wyznaczonej liczby stanowisk oblicz prawdopodobieństwo:

- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest dokładnie dwóch klientów,
- tego, że w poczekalni nie ma klientów,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO.

Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.

Wyznacz średnią liczbę zajętych miejsc w poczekalni.

Zadanie 11.

Rozpatrujemy SMO bez strat (nieskończona poczekalnia), mamy jeden kanał obsługi, średnio klienci zgłaszają się co $\cdot k^2$ sekund, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi $100 \cdot k$ sekund. Oblicz prawdopodobieństwo:

- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest dokładnie jeden klient,
- tego, że w poczekalni jest najwyżej dwóch klientów,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO.

Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.

Wyznacz średnią liczbę zajętych miejsc w poczekalni.

Zadanie 12.

W SMO z ograniczonymi stratami jest jedno stanowisko obsługi, $\lambda = 3$zgł/h; $\mu = 3$zgł/h. Wyznaczyć minimalną liczbę miejsc w poczekalni tak, aby $p_{odm} < 0{,}0001 \cdot k$.

Dla tak wyznaczonego m oblicz

a) średnią liczbę klientów w SMO,
b) średnią liczbę zajętych stanowisk,
c) średnią liczbę klientów w poczekalni,

Obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między zgłoszeniami przekroczy $0{,}1 \cdot k$ minut.

Należy oddać co najmniej 8 zadań.

L.Kowalski, 3.03.2006

....

data

Zadania – PROCESY STOCHASTYCZNE

....

Imię Nazwisko grupa

.... **......................**

nr indeksu **k**

ZADANIE	ODPOWIEDZI DO WSKAZANYCH PODPUNKTÓW
1	$m(t) =$ $R(t_1,t_2) =$ $D^2(t) =$
2	$m(t) =$ $R(t_1,t_2) =$ $D^2(t) =$
3	$\Pi_1 =$ $\Pi_2 =$ $\Pi_3 =$
4a 4b 4c	
5	$p(t) =$ $\Pi =$
6	Równanie Kołmogorowa: $\Pi =$

ZADANIE	ODPOWIEDZI DO WSKAZANYCH PODPUNKTÓW
7-1b 7-1f 7-1g 7-2b 7-2f 7-2g	
8b 8c 8e	
9	n = m_{zs} =
10	m = m_{zs} = m_k =
11	m_{zs} = m_k =
12	m = m_{zs} = m_k =