

PROCESY STOCHASTYCZNE

WYBRANE ZAGADNIENIA

Lucjan Kowalski

Warszawa 2005

Literatura:

A.Plucińska, E.Pluciński, „Probabilistyka”,

D.Bobrowski, „Probabilistyka w zastosowaniach technicznych”

L.Kowalski, materiały dydaktyczne z procesów stochastycznych.

Parametry procesu stochastycznego

(Ω, S, P) - ustalona **przestrzeń probabilistyczna**.

$T \subset \mathbb{R}$, przedział (skończony lub nieskończony), lub podzbiór dyskretny.

Def.

Funkcję $X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **procesem stochastycznym** jeśli

$$\bigwedge_{t \in T} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \{ \omega : X(t, \omega) < x \} \in S$$

$$t \in T \quad x \in \mathbb{R}$$

czyli dla każdego ustalonego t funkcja X rozważana jako funkcja argumentu ω jest zmienną losową.

Najczęściej w zastosowaniach interpretujemy t jako **czas**.

Stosujemy zapis

$$X(t, \omega) = X_t(\omega)$$

Przykład.

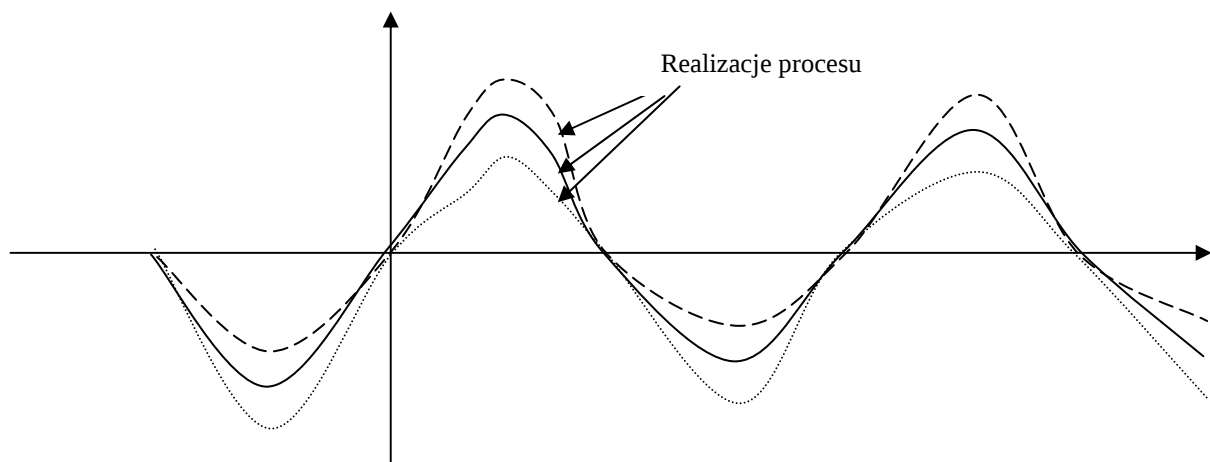
Amplituda napięcia generowanego przez prądnice prądu zmiennego zależy od czynników losowych i może być zapisana jako proces

$$X(t) = A \sin \omega t$$

ω - stała określająca częstotliwość,

A - zmienna losowa o rozkładzie np. $N(230, 5)$,

t - czas, $t \in \mathbb{R}$.



Np. dla wartości parametru $t = 0$ otrzymujemy zmienną losową X_0 o rozkładzie jednopunktowym (o wartości zerowej), dla wartości parametru $t = \frac{\pi}{2\omega}$ otrzymujemy zmienną losową $X_{\frac{\pi}{2\omega}} = A$ o rozkładzie $N(230, 5)$, dla wartości parametru $t = \frac{3\pi}{2\omega}$ otrzymujemy zmienną losową $X_{\frac{3\pi}{2\omega}} = -A$.

Dla ustalonego $\omega \in \Omega$ i dowolnego $t \in T$ przyjmujemy

$$x(t) = X(t, \omega)$$

Funkcja x określona na T nie ma charakteru losowego, nazywamy ją **realizacją procesu stochastycznego** (wyraża ewolucję w czasie wybranego zdarzenia losowego).

W powyższym przykładzie proces ma nieskończenie wiele realizacji.

Np. dla wartości zmiennej losowej A równej 230 otrzymujemy realizację w postaci sinusoidy o amplitudzie 230 i ustalonej częstotliwości, dla wartości zmiennej losowej A z przedziału $[225, 235]$ otrzymujemy rodzinę realizacji w postaci zbioru sinusoid o amplitudach z przedziału $[225, 235]$ i ustalonej częstotliwości (można powiedzieć, że są to najbardziej typowe realizacje).

Wartości procesu nazywamy **stanami**.

Zbiór wszystkich stanów nazywamy **przestrzenią stanów**.

Przykładowe rodzaje procesów

Stany	Czas	Przykład	nazwa procesu
C	C	jak wyżej, lub proces Gaussa,	CC
C	D	n - wymiarowy rozkład normalny,	CD
D	C	proces Poissona,	DC
D	D	łańcuchy Markowa.	DD

Przykład.

X_t – czas uzyskania połączenia z określoną stroną internetową, jeśli polecenie połączenia zostało wydane na przeglądarce w chwili t . Jest to proces typu CC.

Przykład.

$\{X_n, n = 1, 2, \dots, 7\}$ – czas efektywnej pracy modemu danego komputera w poszczególne dni konkretnego tygodnia. Jest to proces typu CD.

Przykład.

X_t – liczba uczestników forum dyskusyjnego na określonej stronie internetowej, zalogowanych w chwili t . Jest to proces typu DC.

Przykład.

$\{X_n, n = 1, 2, \dots, 365 \text{ (366)}\}$ – liczba zalogowań komputerów do danego serwera w poszczególne dni konkretnego roku. Jest to proces typu DD.

Niech $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Rozpatrzmy n wymiarową zmienną losową

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$$

Rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej nazywamy **n -wymiarowym rozkładem procesu stochastycznego** a dystrybucję tej zmiennej losowej nazywamy **n -wymiarową dystrybucją procesu stochastycznego**.

Uwaga.

- 1) Nie każda funkcja która dla ustalonego t jest dystrybucją n -wymiarowej zmiennej losowej może być dystrybucją procesu stochastycznego. Muszą być dodatkowo spełnione tzw. warunki zgodności.
- 2) Znajomość dystrybucji n -wymiarowej dla dowolnego n , tzn. znajomość wszystkich rozkładów skończenie wymiarowych procesu stochastycznego nie określa w sposób jednoznaczny procesu stochastycznego. Niektóre procesy mają taką własność, są to np. procesy ośrodkowe.

Parametry procesu stochastycznego.

Wartość oczekiwana procesu.

$$m(t) = E(X_t)$$

Wariancja procesu.

$$V(t) = D^2(t) = \sigma^2(t) = E((X_t - m(t))^2)$$

Odchylenie standardowe procesu to pierwiastek z wariancji procesu.

Autokowariancja

$$K(t_1, t_2) = E((X_{t_1} - m(t_1))(X_{t_2} - m(t_2)))$$

Autokowariancja unormowana (współczynnik autokorelacji procesu)

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{\sqrt{V(t_1)}\sqrt{V(t_2)}} = \frac{K(t_1, t_2)}{D(t_1)D(t_2)}$$

Autokorelacja

$$R(t_1, t_2) = E(X_{t_1} X_{t_2})$$

Własności:

- 1) $V(t) = D^2(t) = \sigma^2(t) = K(t, t)$
- 2) $K(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2)$
- 3) $|K(t_1, t_2)| \leq \sqrt{V(t_1)V(t_2)} = D(t_1)D(t_2)$
- 4) $V(t) = D^2(t) = \sigma^2(t) = E(X_t^2) - (EX_t)^2$

Uwaga.

1. Z powyższych własności wynika, że praktycznie wystarczy wyliczyć $m(t)$ i $R(t_1, t_2)$ a pozostałe parametry uzyskamy na ich podstawie.
2. Przy obliczaniu $m(t)$ i $R(t_1, t_2)$ przydatne bywają następujące zależności znane z rachunku prawdopodobieństwa

$$EX^2 = D^2X + (EX)^2, \quad \text{bo} \quad D^2X = EX^2 - (EX)^2$$

$$EXY = \text{Cov}(X, Y) + EXEY \quad \text{bo} \quad \text{Cov}(X, Y) = EXY - EXEY$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \rho D^2X D^2Y \quad \text{bo} \quad \rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{D^2X D^2Y}$$

Przykład.

Obliczymy parametry procesu $X(t) = A \sin \omega t$, $t \in \mathbb{R}$.

ω - stała,

A - zmienna losowa o rozkładzie np. $N(230, 5)$,

Rozwiązanie.

Wartość oczekiwana wynosi

$$m(t) = E(X_t) = \sin \omega t EA = 230 \sin \omega t$$

Autokorelacja wynosi

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E(X_{t_1} X_{t_2}) = E(A \sin \omega t_1 A \sin \omega t_2) = \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 E(A^2) = \\ &= \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 (D^2 A + (EA)^2) = \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 (25 + 230^2) = \\ &= 52925 \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 \end{aligned}$$

Autokowariancja wynosi

$$K(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) = 25 \sin \omega t_1 \sin \omega t_2$$

Wariancja wynosi

$$V(t) = 25(\sin \omega t)^2$$

Zauważmy, że dla wartości parametru $t = \frac{k\pi}{\omega}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ otrzymujemy zmienną losową o rozkładzie jednopunktowym i wtedy wariancja procesu jest zerowa.

Współczynnik autokorelacji procesu wynosi

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{\sqrt{V(t_1)}\sqrt{V(t_2)}} = \frac{25 \sin \omega t_1 \sin \omega t_2}{\sqrt{25 \sin \omega t_1} \sqrt{25 \sin \omega t_2}} = 1$$

Oznacza to, że zmienne losowe tworzące proces są w pełni skorelowane, tzn. zmienna losowa X_{t_2} jest funkcją liniową od X_{t_1} .

Mamy $X_{t_2} = kX_{t_1}$, gdzie $k = \frac{\sin \omega t_2}{\sin \omega t_1}$.

Przykład.

Obliczymy parametry procesu $X(t) = At^2$, $t \in \mathbb{R}$.

A - zmienna losowa skokowa o funkcji prawdopodobieństwa

-1	1
0,5	0,5

Rozwiązanie.

Zauważmy, że rozpatrywany proces ma tylko dwie realizacje: parabolę $y = t^2$ i parabolę $y = -t^2$.

Wartość oczekiwana wynosi

$$m(t) = E(X_t) = -0,5 + 0,5 = 0$$

Autokorelacja wynosi

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E(X_{t_1} X_{t_2}) = E(At_1^2 At_2^2) = t_1^2 t_2^2 E(A^2) = \\ &= t_1^2 t_2^2 (D^2 A + (EA)^2) = t_1^2 t_2^2 (1 + 0) = t_1^2 t_2^2 \end{aligned}$$

Autokowariancja wynosi

$$K(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) = t_1^2 t_2^2$$

Wariancja wynosi

$$V(t) = t^4$$

Zauważmy, że dla wartości parametru $t = 0$ otrzymujemy zmienną losową o rozkładzie jednopunktowym i wtedy wariancja procesu jest zerowa. Wraz z bezwzględnym wzrostem t wariancja gwałtownie rośnie.

Współczynnik autokorelacji procesu wynosi

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{\sqrt{V(t_1)}\sqrt{V(t_2)}} = \frac{t_1^2 t_2^2}{\sqrt{t_1^4} \sqrt{t_2^4}} = 1$$

Oznacza to, że zmienne losowe tworzące proces są w pełni skorelowane, tzn. zmienna losowa X_{t_2} jest funkcją liniową od X_{t_1} .

Mamy $X_{t_2} = kX_{t_1}$, gdzie $k = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2$.

Przykład.

Obliczmy parametry procesu

$$X(t) = At + B, \quad t \in \mathbb{R}$$

A, B - zmienne losowe o parametrach $EA = 0$; $EB = 1$, i $D^2A = 1$, $D^2B = 2$; $\text{cov}(A, B) = -1$.
Rozwiązanie.

Wartość oczekiwana wynosi

$$m(t) = E(X_t) = E(At + B) = tEA + EB = 1$$

Autokorelacja wynosi

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E(X_{t_1} X_{t_2}) = E((At_1 + B)(At_2 + B)) = \\ &= E(A^2 t_1 t_2 + AB(t_1 + t_2) + B^2) = \\ &= t_1 t_2 E(A^2) + (t_1 + t_2) E(AB) + E(B^2) = \\ &= t_1 t_2 (D^2 A + (EA)^2) + (t_1 + t_2) (\text{cov}(A, B) + EAE B) + D^2 B + (EB)^2 = \\ &= t_1 t_2 (1 + 0) + (t_1 + t_2) (-1 + 0 \cdot 1) + 2 + 1 = t_1 t_2 - t_1 - t_2 + 3 \end{aligned}$$

Autokowariancja wynosi

$$K(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) = t_1 t_2 - t_1 - t_2 + 2$$

Wariancja wynosi

$$V(t) = t^2 - 2t + 2 = (t - 1)^2 + 1$$

Zauważmy, że wariancja tego procesu jest nie mniejsza niż 1 dla dowolnego t.

Współczynnik autokorelacji procesu wynosi

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{\sqrt{V(t_1)}\sqrt{V(t_2)}} = \frac{t_1 t_2 - t_1 - t_2 + 2}{\sqrt{(t_1 - 1)^2 + 1}\sqrt{(t_2 - 1)^2 + 1}}$$

Proces stochastyczny X nazywamy **procesem o przyrostach niezależnych**, jeśli dla dowolnego naturalnego n, dowolnych $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ zmienne losowe

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

są niezależne.

Przykład: proces Poissona, proces Wienera.

Proces stochastyczny X o przyrostach niezależnych nazywamy **jednorodnym**, jeśli dla dowolnego nieujemnego t , $X(0, \omega) = 0$ i dla dowolnych $t_1 < t_2$ rozkład różnicy zmiennych losowych

$$X_{t_2} - X_{t_1}$$

zależy tylko od różnicy $t_2 - t_1$ (nie zależy od t_1).

Przykład: proces Poissona.

Proces stochastyczny nazywamy **procesem normalnym (procesem Gaussa)** jeśli wszystkie n -wymiarowe rozkłady tego procesu są normalne.

Jednorodny proces normalny o przyrostach niezależnych dla którego

$$m(t) = 0$$

$$V(t) = ct \quad c = \text{const}, \quad c > 0$$

nazywamy **procesem Wienera (procesem ruchu Browna)**.

Procesy stacjonarne to procesy, których realizacje mają postać losowych odchyłeń od pewnej wartości i charakter tych odchyłeń nie ulega zmianie w czasie np. napięcie w sieci energetycznej, szumy losowe w radiotechnice. Dla procesów stacjonarnych łatwo eksperymentalnie wyznaczyć charakterystyki.

Proces jest **stacjonarny w węższym sensie** (ściśle stacjonarny) gdy wszystkie jego charakterystyki nie zależą od czasu.

Proces jest **stacjonarny w szerszym sensie** (słabo stacjonarny) gdy ma stałą wartość oczekiwaną a jego funkcja autokowariancyjna zależy wyłącznie od różnicy argumentów tzn.

$$m(t) = m = \text{const}$$

$$K(s, t) = k(t - s) = k(\tau) \quad \tau = t - s$$

Jeśli charakterystyki istnieją to każdy proces ściśle stacjonarny jest słabo stacjonarny, odwrotna własność nie musi zachodzić (wyjątek - procesy gaussowskie).

Zadania

Zadanie 1.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At^2 + Be^t$, gdzie A, B to nieskorelowane zmienne losowe o parametrach: $EA = 2$; $EB = -3$, $D^2A = 1$, $D^2B = 3$.

Zadanie 2.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At + B$, gdzie A, B to zmienne losowe

o parametrach: $EA = 0$; $EB = 0$, i macierzy kowariancji $K = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 \\ 0,4 & 1,5 \end{bmatrix}$.

Zadanie 3.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At + 1$, gdzie A jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w przedziale $(0, 1)$. Jak wyglądają realizacje tego procesu? Które z poniższych funkcji są realizacjami tego procesu? $x_1(t) = 0,3t + 1$; $x_2(t) = -0,3t + 1$; $x_3(t) = 2t + 1$.

Zadanie 4.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At - 3$, gdzie A jest zmienną losową o rozkładzie $N(3, 1)$. Jak wyglądają realizacje tego procesu?

Zadanie 5.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = \cos(t + B)$, gdzie B to zmienna losowa o rozkładzie jednostajnym w przedziale $\langle -\Pi, \Pi \rangle$.

Zadanie 6.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = A \sin(t + B)$, gdzie A, B to zmienne losowe niezależne o rozkładach jednostajnych w przedziałach odpowiednio $\langle -0,5; 0,5 \rangle$ i $\langle -\Pi, \Pi \rangle$.

Zadanie 7.

Proces $X(t)$ ma tylko 3 realizacje: $x_1(t) = t$; $x_2(t) = t + 1$; $x_3(t) = t + 2$. Realizacje te są przyjmowane odpowiednio z prawdopodobieństwami: $1/2$, $1/3$; $1/6$. Wyznaczyć parametry tego procesu.

Zadanie 8.

Proces $X(t)$ ma tylko 4 realizacje: $x_1(t) = t$; $x_2(t) = t + 1$; $x_3(t) = t + 2$; $x_4(t) = t - 1$. Realizacja ostatnia jest przyjmowana z prawdopodobieństwem $0,1$, a pozostałe realizacje są przyjmowane z takim samym prawdopodobieństwem. Wyznaczyć parametry tego procesu.

Zadanie 9.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = Ae^t + Be^{-t}$, gdzie A, B to zmienne losowe o parametrach: $EA = 0$; $EB = 0$, i $D^2A = 1$, $D^2B = 2$; $\text{cov}(A, B) = -1$.

Zadanie 10.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = A + Bt$, gdzie A, B to zmienne losowe o parametrach: $EA = -1$; $EB = 1$, i $D^2A = 1$, $D^2B = 4$; $\rho_{AB} = -0,5$.

Zadanie 11.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At^2 + B$, gdzie A, B to zmienne losowe nieskorelowane. A ma rozkład wykładniczy z parametrem $1,5$, B jest zmienną losową skokową o funkcji prawdopodobieństwa: $P(B = -1) = 0,5$; $P(B = 1) = 0,5$;

Zadanie 12.

Dany jest proces $Y(t) = f(t)X(t) + g(t)$, gdzie f, g są funkcjami rzeczywistymi (nielosowymi). Wyrazić parametry procesu $Y(t)$ za pomocą parametrów procesu $X(t)$.

Łańcuchy Markowa

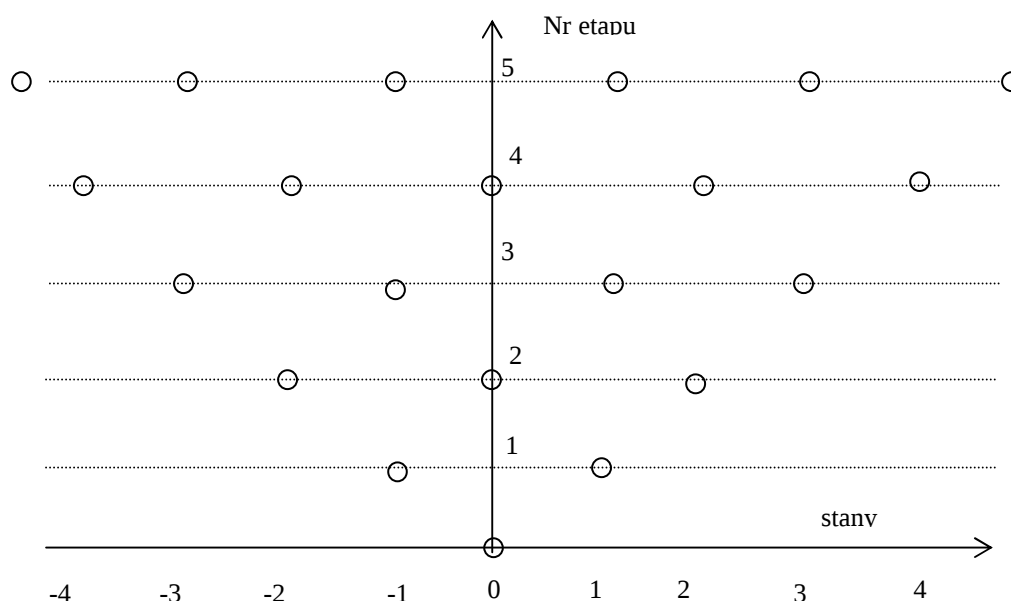
Przykład.

Symetryczne błądzenie przypadkowe.

Jako zbiór stanów rozpatrujemy zbiór liczb całkowitych. Kolejne etapy błądzenia będziemy numerować jako chwile czasu $0, 1, 2, \dots$.

Założmy, że w chwili 0 proces jest w stanie 0. Następnie w kolejnych etapach z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{2}$ przechodzimy do stanu o numerze wyższym lub z prawdopodobieństwem $q = 1 - p = \frac{1}{2}$ przechodzimy do stanu o numerze niższym (możemy sobie wyobrazić, że rzucamy monetą symetryczną i „orzeł” powoduje przesunięcie w prawo, a „reszka” w lewo).

Na wykresie możliwe do osiągnięcia stany w poszczególnych etapach możemy przedstawić następująco (zauważmy, że w parzystych numerach etapów można być tylko w stanach o numerach parzystych).



Jeśli Z_i to niezależne zmienne losowe o rozkładzie dwupunktowym

$$P(Z_i = -1) = P(Z_i = 1) = \frac{1}{2}$$

to rozpatrywany proces stochastyczny możemy zapisać następująco

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_n = \sum_{k=1}^n Z_k, \quad n > 0 \end{cases}$$

Zauważmy, że jeśli po pewnej liczbie etapów n chcemy określić prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie k , w etapie następnym, to prawdopodobieństwo to zależy tylko od tego gdzie jesteśmy po n etapach a nie zależy od tego w jakich stanach byliśmy „wcześniej”, tzn.

$$P(X_{n+1} = k \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = 0) = P(X_{n+1} = k \mid X_n = i_n)$$

Uzasadnienie

Ponieważ $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$ więc ciąg (X_n) ma przyrosty niezależne, oraz Z_{n+1} jest niezależny od X_m , $m < n$.

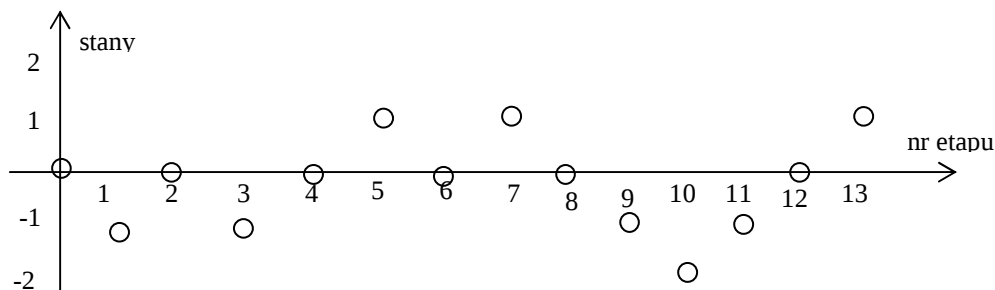
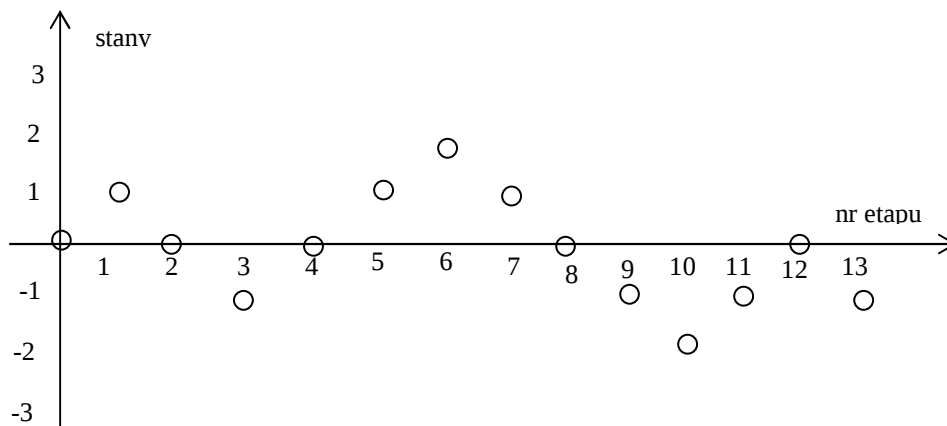
Mamy

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = 0) &= P(X_n + Z_{n+1} = k \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = 0) = \\ &= P(Z_{n+1} = k - i_n \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = 0) = P(Z_{n+1} = k - i_n) \end{aligned}$$

Również

$$P(X_{n+1} = k \mid X_n = i_n) = P(X_{n+1} = k \mid X_n = i_n) = P(X_n + Z_{n+1} = k \mid X_n = i_n) = P(Z_{n+1} = k - i_n)$$

Przykładowe realizacje tego procesu można przedstawić następująco



Można też rozpatrywać bardziej ogólne błądzenie przypadkowe gdy zmienne Z_i to niezależne zmienne losowe o dowolnym rozkładzie dwupunktowym

$$P(Z_i = 1) = p > 0, \quad P(Z_i = -1) = 1 - p = q > 0$$

Powyższy proces można też przedstawić w postaci grafu

$$\dots \xrightarrow[p]{-2} \xrightarrow[p]{-1} \xrightarrow[p]{0} \xrightarrow[p]{1} \xrightarrow[p]{2} \dots$$

pamiętając o stanie z którego rozpoczynamy błądzenie.

Można też rozpatrywać błądzenie rozpoczynające się w dowolnym punkcie prostej.

Łańcuchy Markowa to procesy dyskretne w czasie i o dyskretnym zbiorze stanów, "bez pamięci".

Zwykle będziemy zakładać, że zbiór stanów to podzbiór zbioru liczb całkowitych Z lub zbioru $\{0, 1, 2, \dots\}$ jako uproszczenie zapisu $\{S_0, S_1, S_2, \dots\}$.

Łańcuchem Markowa nazywamy proces będący ciągiem zmiennych losowych

$$X_0, X_1, \dots$$

Określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej, przyjmujących wartości całkowite i spełniające warunek

$$P(X_n = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = \\ = P(X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}) \bigwedge_{i_0, \dots, i_{n-1}, j \in \{0, 1, 2, \dots\}}$$

Zatem dla łańcucha Markowa rozkład prawdopodobieństwa warunkowego położenia w n -tym kroku zależy tylko od prawdopodobieństwa warunkowego położenia w kroku poprzednim a nie od wcześniejszych punktów trajektorii (historia).

Niech

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_{n-1} = i)$$

oznacza prawdopodobieństwo warunkowe przejścia w n -tym kroku ze stanu i do stanu j .

Jeśli $p_{ij}^{(n)}$ nie zależą od n to łańcuch nazywamy **jednorodnym (jednorodnym w czasie)**

i stosujemy zapis p_{ij} .

Zakładając, że numery stanów są całkowite, nieujemne można prawdopodobieństwa przejść zapisać w macierzy

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \dots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

W pierwszym wierszu mamy kolejno prawdopodobieństwo pozostania w stanie 0 w n-tym kroku i prawdopodobieństwa przejścia w n-tym kroku ze stanu o numerze 0 do stanów o numerach 1, 2, itd. Analogicznie określone są pozostałe wiersze.

Dla łańcuchów jednorodnych powyższą macierz oznaczamy P i ma ona postać

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Własności macierzy prawdopodobieństw przejść:

- a) $p_{ij}^{(n)} \geq 0$ b) suma każdego wiersza jest równa 1.

Zauważmy też, że w macierzy tej nie może istnieć kolumna złożona z samych zer.

Każdą macierz spełniającą warunki a), b) nazywamy **macierzą stochastyczną**.

Uwaga.

Macierz stochastyczna i rozkład zmiennej losowej X_0 określają pewien łańcuch Markowa.

Własności macierzy stochastycznych są zatem ściśle związane z własnościami łańcuchów Markowa.

Własności macierzy stochastycznych.

A - dowolna macierz kwadratowa stopnia r .

Wielomianem charakterystycznym tej macierzy nazywamy wielomian

$$W(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

Równanie $W(\lambda) = 0$ nazywamy **równaniem charakterystycznym**. Pierwiastki tego równania to **wartości własne** lub pierwiastki charakterystyczne tej macierzy.

Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - wartości własne macierzy A o krotnościach $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k \leq r$).

Wektorem własnym operatora f odpowiadającym wartości własnej λ nazywamy niezerowy wektor v spełniający warunek $f(v) = \lambda v$.

Własność:

- I) suma wartości własnych (z krotnościami) jest równa śladowi macierzy tzn. sumie elementów jej przekątnej.
- II) Macierz jest osobliwa wtedy i tylko wtedy gdy zero jest jej wartością własną

Przykład.

Macierz $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ma równanie charakterystyczne

$$W(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = 0$$

i wartości własne: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{5}{12}$.

Własności macierzy stochastycznych:

- a) Wartością własną każdej macierzy stochastycznej jest $\lambda = 1$ (oznaczamy $\lambda_1 = 1$),
- b) Moduły wszystkich wartości własnych dowolnej macierzy stochastycznej są mniejsze od 1,

- c) (tw. Dooba) istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k = A$,

Macierz A ma własność $PA = AP = A = A^2$ (macierz idempotentna),

Klasyfikacja macierzy stochastycznych.

	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 > 1$
$\bigwedge_{i>1} \lambda_i \neq 1$	Regularne (tzn. nierozkładalne i niecykliczne)	rozkładalne niecykliczne
$\bigvee_{i>1} \lambda_i = 1$	nierozkładalne cykliczne	rozkładalne cykliczne

Tw. Frecheta (tw. Dooba dla macierzy nierozkładalnych)

Dla każdej nierozkładalnej macierzy stochastycznej P istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k = E, \quad E = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_r \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_r \end{bmatrix} \quad (\text{macierz ergodyczna})$$

Macierz E ma własność $PE = EP = E = E^2$ i spełnia warunki a), b) definicji macierzy stochastycznej. Elementy macierzy E możemy wyznaczyć z warunków:

$$(P - I)e^T = 0, \quad \sum_{i=1}^r e_i = 1, \quad \text{gdzie } e = (e_1, \dots, e_r)$$

Dla macierzy regularnych tw. Dooba ma postać:

Twierdzenie.

Jeśli macierz stochastyczna P jest regularna to istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = E,$$

gdzie E - macierz ergodyczna.

Stochastyczne macierze regularne charakteryzuje też tzw. twierdzenie ergodyczne:

Twierdzenie.

Jeśli macierz stochastyczna P jest regularna to istnieje taka jej potęga w której co najmniej jedna kolumna ma wszystkie elementy dodatnie.

Przykład.

Macierz $P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$ ma wartości własne

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8}, \quad \lambda_3 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{8} \text{ więc jest macierzą regularną.}$$

Przykład.

Macierz $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ma wartości własne

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 0 \text{ o krotności 2, więc jest macierzą cykliczną nierozkładalną.}$$

Macierz ta ma własność

$$P^n = \begin{cases} P & \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \\ P^2 & \text{gdy } n \text{ parzyste} \end{cases}.$$

Przykład.

$$\text{Macierz } P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \text{ma wartości własne}$$

$\lambda_1 = 1$ o krotności 3, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \frac{1}{12}$, więc jest macierzą niecykliczną rozkładalną.

Macierz stochastyczna rozkładalna (po ewentualnym przestawieniu wierszy i kolumn) ma bloki diagonalne, które są macierzami stochastycznymi. Wartościami własnymi macierzy P są wartości własne poszczególnych bloków. W tym przykładzie są trzy bloki diagonalne.

Przykład.

$$\text{Macierz } P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ma wartości własne}$$

$\lambda_1 = 1$ o krotności 2, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$, więc jest macierzą cykliczną rozkładalną.

Łańcuchy Markowa (jednorodne).

Będziemy dalej przyjmować najczęściej, że rozpatrywane łańcuchy Markowa mają skończoną liczbę stanów.

$p_i(n)$ - prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie i po n krokach (rozkład zmiennej losowej X_n). Prawdopodobieństwa te stanowią składowe wektora $p(n)$.

$p_i(0)$ - prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie i w chwili początkowej (rozkład zmiennej losowej X_0 - rozkład początkowy). Prawdopodobieństwa te stanowią składowe wektora $p(0)$.

Przykład.

Błądzenie przypadkowe z odbiciem. Np. gdy stany 0 i 4 są odbijające

$$[0] \xrightarrow{1} [1] \xrightarrow{p} [2] \xrightarrow{p} [3] \xrightarrow{p} [4]$$

$$\xleftarrow{q} \xleftarrow{q} \xleftarrow{q} \xleftarrow{1}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład.

Błądzenie przypadkowe z pochłanianiem. Np. gdy stany 0 i 4 są pochłaniające

$$1 \hookrightarrow [0] \xleftarrow{q} [1] \xrightarrow{p} [2] \xrightarrow{p} [3] \xrightarrow{p} [4] \hookleftarrow 1$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problem ruiny gracza jest szczególnym przypadkiem błądzenia przypadkowego z pochłanianiem. Gracz dysponuje początkowo kwotą k zł. W kolejnych etapach z prawdopodobieństwem p wygrywa 1zł albo z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$ przegrywa 1zł. Gra kończy się gdy gracz osiągnie kwotę $w > k$ zł lub przegra wszystko.

Zatem mamy dwa stany pochłaniające 0 i w .

Graf i macierz rozpatrywanego łańcucha są następujące.

$$1 \hookrightarrow [0] \xleftarrow{q} [1] \xrightarrow{p} \dots \xrightarrow{p} [k] \xrightarrow{p} \dots \xrightarrow{p} [w-1] \xrightarrow{p} [w] \hookleftarrow 1$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

rozkład początkowy określa kwota początkowa k , tzn. $X_0 = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, (jedyńska na pozycji odpowiadającej stanowi o numerze k).

Przykład.

Elektron może znajdować się w jednym ze stanów (orbit) 1, 2, ..., w zależności od posiadanej energii. Przejście z i -tej do j -tej orbity w ciągu 1 sekundy zachodzi z prawdopodobieństwem $c_i e^{-\alpha|j-i|}$, $\alpha > 0$ jest dane.

Wyznacz c_i i macierz P .

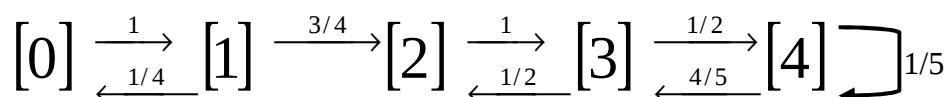
Przykład.

Narysuj graf łańcucha Markowa odpowiadający macierzy prawdopodobieństw przejść

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład.

Zapisz macierz P dla łańcucha Markowa przedstawionego grafem



Oznaczenia.

p_{ij} - prawdopodobieństwo przejścia od stanu i do stanu j w jednym (dowolnym) kroku,

$p_{ij}(n)$ - prawdopodobieństwo przejścia od stanu i do stanu j w n krokach,

$P = [p_{ij}]$ - **macierz prawdopodobieństw przejść** (w jednym kroku), jest **to macierz stochastyczna**.

$P(n) = P^n = [p_{ij}(n)]$ - macierz prawdopodobieństw przejść od stanu i do stanu j w n krokach,

Równanie Chapmana, - Kołmogorowa:

$$p_{ij}(k+l) = \sum_m p_{im}(k) p_{mj}(l)$$

Własność:

Znając rozkład początkowy i macierz P możemy wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X_n , czyli prawdopodobieństwo znalezienia się w poszczególnych stanach po n krokach:

$$(p_0(n), p_1(n), \dots) = (p_0(0), p_1(0), \dots) P^n.$$

czyli

$$p(n) = p(0) P^n$$

Mamy też własność:

$$p(m+n) = p(m) P^n$$

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa o macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

i rozkładzie początkowym $p(0) = (1, 0, 0)$.

Po pierwszym kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(1) = p(0)P = [1,0,0] \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} = [0,5;0;0,5]$$

Po drugim kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

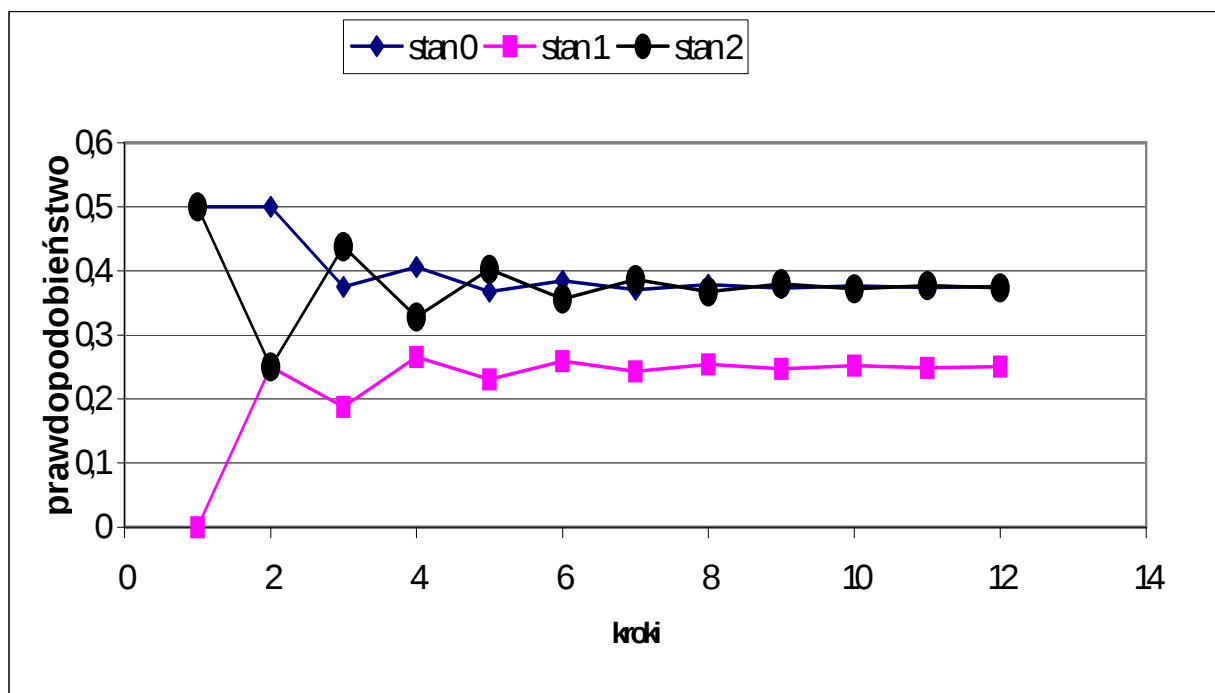
$$p(2) = p(0)P^2 = [1,0,0] \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,375 & 0,438 & 0,188 \\ 0,25 & 0,125 & 0,625 \end{bmatrix} = [0,5;0,25;0,25]$$

Po trzecim kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(3) = p(0)P^3 = [1,0,0] \begin{bmatrix} 0,375 & 0,188 & 0,438 \\ 0,281 & 0,203 & 0,516 \\ 0,438 & 0,344 & 0,219 \end{bmatrix} = [0,375; 0,188; 0,438]$$

Obliczając kolejne potęgi macierzy P możemy wyliczone wartości $p(n)$ zestawzić dla $n = 1, \dots, 12$ w następującej tabeli i przedstawić na wykresie.

krok	Stan 0	Stan 1	Stan 2
1	0,5	0	0,5
2	0,5	0,25	0,25
3	0,375	0,188	0,438
4	0,406	0,266	0,328
5	0,367	0,23	0,402
6	0,385	0,259	0,356
7	0,371	0,243	0,386
8	0,379	0,254	0,367
9	0,373	0,247	0,38
10	0,376	0,252	0,372
11	0,374	0,249	0,377
12	0,376	0,251	0,374



Zauważmy, że rozpatrywane prawdopodobieństwa stabilizują się na określonym poziomie i dążą do pewnych granic, co związane jest z regularności rozpatrywanej macierzy stochastycznej.

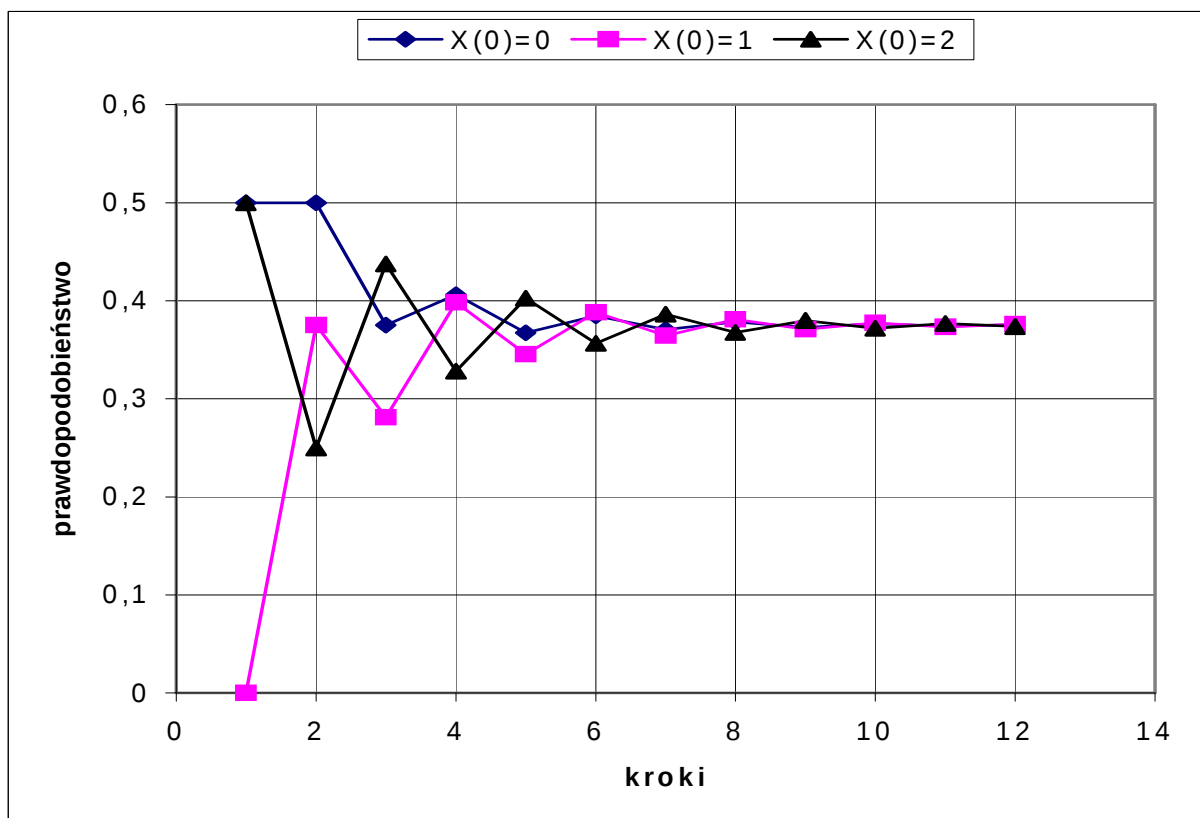
Jak pokażemy wkrótce, istnieją sposoby wyznaczania tych granicznych prawdopodobieństw bez obliczania potęg macierzy P .

Zobaczmy teraz jak zmienia się prawdopodobieństwo znalezienia się w ustalonym stanie w poszczególnych krokach, gdy zmienia się rozkład początkowy.

Rozpatrzmy stan 0 i rozkłady początkowe $p(0) = (1, 0, 0)$, $p(0) = (0, 1, 0)$, $p(0) = (0, 0, 1)$.

Obliczone prawdopodobieństwa (w podobny sposób jak wyżej) zestawiono w tabeli i przedstawiono na wykresie dla $n = 1, \dots, 12$.

$p(0) \setminus \text{krok}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(0) = (1, 0, 0)$	0,5	0,5	0,375	0,406	0,367	0,385	0,371	0,379	0,373	0,376	0,374	0,376
$p(0) = (0, 1, 0)$	0	0,375	0,281	0,398	0,346	0,388	0,364	0,381	0,371	0,378	0,373	0,376
$p(0) = (0, 0, 1)$	0,5	0,25	0,438	0,328	0,402	0,356	0,386	0,367	0,38	0,372	0,377	0,374



Zauważmy, że rozpatrywane prawdopodobieństwo dla dużych n nie zależy od rozkładu początkowego.

Granice $\Pi = p(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(n)$ (o ile istnieje) nazywamy **rozkładem granicznym** łańcuch Markowa.

$$\Pi = (\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \dots).$$

Łańcuch Markowa dla którego istnieje rozkład graniczny niezależny od rozkładu początkowego $p(0)$ nazywamy **łańcuchem ergodycznym**.

Twierdzenie.

Rozkład graniczny nie zależy od rozkładu początkowego $p(0)$ wtedy i tylko wtedy gdy wiersze macierzy granicznej $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = E$ są takie same.

Warunek ten jest spełniony dla macierzy P regularnej (jedynokrotna wartość własna równa 1).

Uwaga.

Jeśli pewna potęga macierzy przejścia P ma co najmniej jedną kolumnę złożoną wyłącznie z wyrazów dodatnich to rozpatrywany łańcuch jest ergodyczny o dodatnich prawdopodobieństwach granicznych.

Sposoby wyznaczania rozkładu granicznego:

Sposób I.

Rozkład graniczny Π jest jedynym niezerowym rozwiązaniem układu

$$(P^T - I) \Pi^T = 0, \quad \text{spełniającym warunek} \quad \sum_{i=1} \Pi_i = 1,$$

Uwaga.

Z powyższej równości wynika, że $\Pi P = \Pi$ co oznacza, że wektor Π jest wektorem własnym macierzy P odpowiadającym wartości własnej równej 1.

Przykład.

Wyznaczyć rozkład ergodyczny łańcucha Markowa o macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że w ostatniej kolumnie macierz P ma tylko wartości dodatnie.

Należy rozwiązać równanie jednorodne

$$\begin{bmatrix} -0,7 & 0,6 & 0 \\ 0,5 & -1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & -0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_0 \\ \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jest to układ nieoznaczony z jednym parametrem. Przyjmijmy np. $\Pi_0 = 1$, wtedy $\Pi_1 = 28/24$, $\Pi_2 = 40/24$. Dzieląc te rozwiązania przez ich sumę otrzymamy rozwiązanie unormowane $\Pi = [6/23, 7/23, 10/23]$.

Sposób II.

$$\Pi_j = \frac{A_{jj}}{\sum_k A_{kk}}$$

gdzie A_{kk} to dopełnienia algebraiczne macierzy $I - P$ (wyznacznik macierzy otrzymanej przez skreślenie k -tego wiersza i k -tej kolumny).

Przykład.

Wyznaczyć drugim sposobem rozkład ergodyczny łańcucha z poprzedniego przykładu.

Zadania.

Zadanie 1. Wyznaczyć parametry procesu symetrycznego błądzenia przypadkowego.

Zadanie 2. Narysuj graf łańcucha Markowa - błądzenie przypadkowe z odbiciem. Przyjmij liczbę stanów równą 6. Zapisz macierz prawdopodobieństw przejść tego łańcucha.

Zadanie 3. Wyznaczyć wartości własne macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Czy odpowiedni łańcuch Markowa jest ergodyczny. Narysować graf tego łańcucha.

Zadanie 4. Wyznaczyć wartości własne macierzy a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Czy odpowiedni łańcuch Markowa jest ergodyczny. Narysować graf tego łańcucha.

Sprawdzić, czy dla tego łańcucha istnieje rozkład graniczny.

Zadanie 5. Wyznaczyć kolejne potęgi macierzy $P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Czy odpowiedni łańcuch Markowa jest ergodyczny. Narysować graf tego łańcucha.

Porównać wiersze macierzy P^n i składowe wektora rozkładu granicznego.

Odp. np. $P^6 = \begin{bmatrix} 0,671875 & 0,328125 \\ 0,65625 & 0,34375 \end{bmatrix}$ $\Pi = [2/3, 1/3]$

Zadanie 6. Łańcuch Markowa ma dwa stany i rozkład graniczny $[p, q]$. Wyznaczyć macierz P tego łańcucha.

Odp. $P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ \frac{pa}{1-p} & 1-\frac{pa}{1-p} \end{bmatrix}$, a - nieujemny parametr.

Zadanie 7. Rozkład początkowy łańcucha Markowa określonego macierzą prawdopodobieństw przejść

$$P = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

wyraża się wektorem

a) $(1, 0, 0)$,

b) (0,5; 0; 0,5),

Wyznaczyć prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach tego łańcucha po

1) dwóch etapach,

2) trzech etapach.

Zadanie 8. Rozkład początkowy łańcucha Markowa określonego macierzą prawdopodobieństw przejść

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wyraża się wektorem (1, 0, 0).

Wyznaczyć prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach tego łańcucha po kolejnych etapach. Czy łańcuch ten ma określone prawdopodobieństwa graniczne?

Zadanie 9. Wyznaczyć rozkłady graniczne łańcuchów wyznaczonych przez macierze

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{4} & \frac{2}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \text{b)} & P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Narysuj odpowiednie grafy.

Wyznacz graniczne wartości oczekiwane i graniczne wariancje.

Odp. a) [6/17, 7/17, 2/17, 2/17] b) [1/12, 3/12, 5/12, 1/12, 2/12]

Zadanie 10. Podaj przykład łańcucha, którego rozkłady graniczne zależą od rozkładu początkowego.

Zadanie 11. Wyznaczyć rozkład graniczny łańcucha wyznaczonego przez macierz

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

Narysuj odpowiedni graf.

Klasyfikacja stanów łańcucha Markowa.

Niekiedy będziemy utożsamiać stan s_k z liczbą k .

Stan s_k jest **osiągalny** ze stanu s_j jeśli $p_{jk}(n) > 0$ dla pewnego n ,

Stany s_k i s_j nazywamy **wzajemnie komunikującymi się** jeśli stan s_k jest osiągalny ze stanu s_j , i odwrotnie.

Relacja wzajemnego komunikowania się określona na zbiorze stanów łańcucha Markowa jest:

- symetryczna,
- przechodnia (z równości Chapmana-Kołmogorowa).

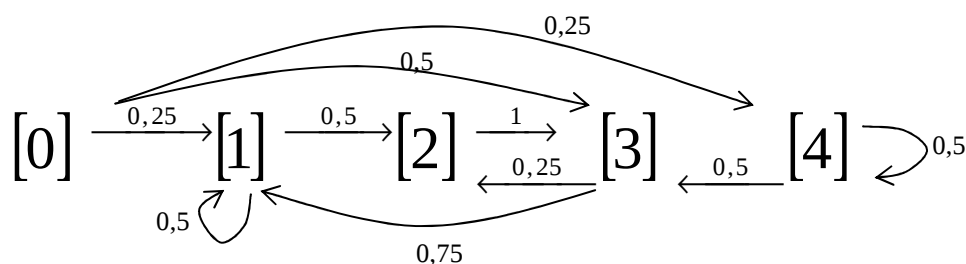
Zbiór stanów C nazywamy **zamkniętym**, jeżeli żaden stan spoza C nie da się osiągnąć wychodząc z dowolnego stanu w C .

Stan s_k jest **stanem nieistotnym (chwilowym)** gdy istnieje stan s_j osiągalny ze stanu s_k a stan s_k nie jest osiągalny ze stanu s_j ,

Stan, który nie jest nieistotny nazywa się **istotny (powracający)**.

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa



Jego macierz P ma postać

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Stany 0 i 4 są nieistotne.

Stany 1, 2 i 3 są istotne.

Zbiór stanów $\{1, 2, 3\}$ jest zamknięty.

Pojedynczy stan zamknięty (musi być $p_{kk} = 1$) nazywamy stanem **pochłaniającym**.

Stan s_k jest **odbijający** gdy $p_{kk} = 0$. Stan odbijający może być zarówno chwilowy jak i powracający.

Łańcuch Markowa jest **nieprzywiedlny**, gdy wszystkie jego stany wzajemnie komunikują się, w przeciwnym przypadku łańcuch jest **przywiedlny**.

Macierz kwadratowa jest **przywiedlna** jeśli istnieje permutacja pewnej liczby wierszy i kolumn o tych samych numerach, która pozwala ją zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ A & P_2 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } P_1, P_2 \text{ to macierze kwadratowe}$$

W przeciwnym przypadku macierz jest **nieprzywiedlna**.

Przy badaniu ewolucji łańcucha Markowa w czasie chcemy wiedzieć, do których stanów łańcuch powraca nieskończenie wiele razy, a które po pewnym czasie opuszcza bezpowrotnie.

Niech F_{kj} będzie prawdopodobieństwem, że łańcuch wychodząc ze stanu k dotrze kiedykolwiek do stanu j .

$$F_{kj} = P\left(\bigcup_n (X_n = j \mid X_0 = k)\right)$$

Jeśli $f_{kj}(n)$ - prawdopodobieństwo, że wychodząc ze stanu k łańcuch dojdzie po raz pierwszy do stanu j w n -tym kroku

$$f_{kj}(n) = P(X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j \mid X_0 = k)$$

to

$$F_{kj} = \sum_n f_{kj}(n)$$

Zatem stan j jest:

a) **Powracający (istotny)**, gdy $F_{jj} = 1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \infty \right)$.

b) **Chwilowy (nieistotny)** gdy $F_{jj} < 1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) < \infty \right)$.

Dla stanu powracającego j można określić **średni czas pierwszego powrotu**

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{jj}(n)$$

Jeśli $\mu_j = \infty$ to stan j jest **zerowy**.

Twierdzenie.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to aby stan powracający był zerowy jest aby

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \infty \quad \text{lecz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}(n) = 0$$

Twierdzenie.

W nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa wszystkie stany są tego samego typu: jeżeli jeden jest powracający (chwilowy) to wszystkie są powracające (chwilowe).

Dlatego możemy mówić, że łańcuch jest np. powracający.

Twierdzenie.

W jednorodnym skończonym łańcuchu Markowa

a) istnieje co najmniej jeden stan powracający,

b) nie ma stanów powracających zerowych.

Twierdzenie.

Przestrzeń stanów S łańcucha Markowa można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy:

$$S = T \cup S_1 \cup S_2 \cup \dots$$

gdzie T - zbiór stanów chwilowych (nieistotnych),

S_i - nieprzywiedlne zamknięte zbiory stanów powracających (istotnych). Wśród nich mogą być podzbiory jednoelementowe stanów pochłaniających.

Łańcuchy okresowe.

Okresem stanu powracającego j nazywamy liczbę:

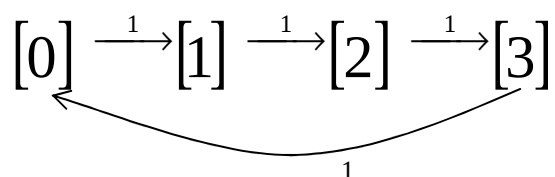
$$o(j) = \text{NWD}(n: p_{jj}(n) > 0)$$

jest to największy wspólny dzielnik takich liczb n , że powrót do stanu j może nastąpić po n krokach.

Stan j nazywamy **okresowym** gdy ma okres większy od 1 i **nieokresowym** gdy ma okres 1.

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa



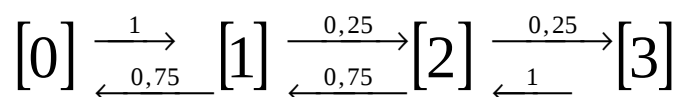
Jego macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie stany mają okres 4.

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa



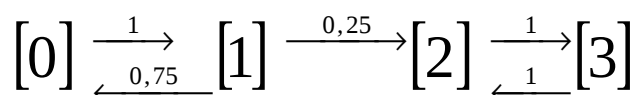
Jego macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,75 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie stany mają okres 2.

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa



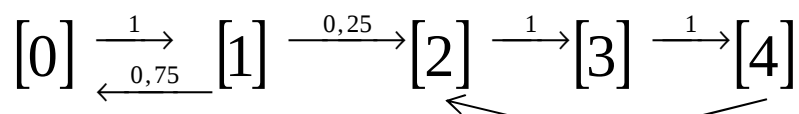
Jego macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,75 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie stany mają okres 2.

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa



Jego macierz P ma postać

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,75 & 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Stany 0 i 1 mają okres 2, Stany 2, 3 i 4 mają okres 3. Jest to możliwe bo rozpatrywany łańcuch jest przywiedlny.

Twierdzenie.

W skończonym nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa wszystkie stany mają ten sam okres.

Zatem nieprzywiedlny łańcuch Markowa nazywamy okresowym, gdy jego stany mają okres większy od 1, w przeciwnym przypadku łańcuch nazywamy nieokresowym.

Stan, który jest powracający, niezerowy i nieokresowy nazywa się **ergodyczny**.

Łańcuch ergodyczny.

Łańcuch jest **ergodyczny** jeśli istnieje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_j \quad \sum_j \pi_j = 1 \quad \Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \dots)$$

Rozkład Π nazywamy **rozkładem granicznym**.

Łańcuch stacjonarny .

Jednorodny łańcuch Markowa jest **stacjonarny** gdy istnieje rozkład Π jego stanów, **zwany rozkładem stacjonarnym**, że

$$\Pi P = \Pi$$

(tzn. Π jest wektorem własnym macierzy P dla wartości własnej 1).

Zatem dla dowolnego n, $\Pi P^n = \Pi$, oznacza to, że jeśli rozkład początkowy jest równy Π , to **rozkład łańcucha po dowolnej liczbie kroków jest taki sam i równy Π** .

Jeśli macierz P łańcucha jest nierozkładalna to rozkład stacjonarny jest dokładnie jeden. Jeśli macierz P łańcucha jest rozkładalna to rozkładów stacjonarnych jest więcej niż jeden.

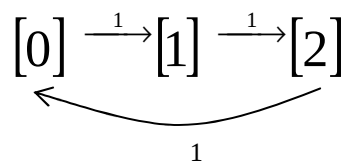
W łańcuchu ergodycznym rozkład stacjonarny (graniczny) nie zależy od rozkładu początkowego.

Uwaga.

$$\text{ergodyczny} \Rightarrow \text{stacjonarny}$$

Odwrotna implikacja nie musi zachodzić.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa


$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że wielomian charakterystyczny tej macierzy ma postać

$$W(\lambda) = \lambda^3 - 1$$

i jej wartości własne są równe: $\lambda_1=1, \lambda_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \lambda_3=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Łańcuch ten jest stacjonarny, jego rozkładem stacjonarnym jest $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Rozkład ten można wyznaczyć I lub II sposobem obliczania rozkładów granicznych.

Kolejne potęgi macierzy P są równe

$$P^2 = P^{3n+2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, P^3 = P^{3n+3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P^4 = P = P^{3n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

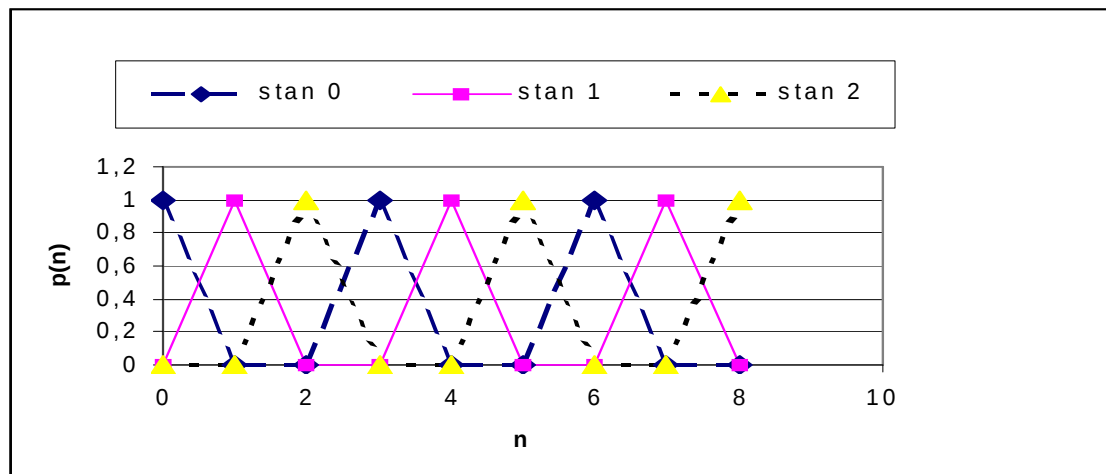
Zauważmy, że żadna kolumna P^n nie składa się wyłącznie z elementów dodatnich.

Rozkład graniczny nie istnieje. Weźmy np. rozkład początkowy $p(0) = (1, 0, 0)$.

Obliczone prawdopodobieństwa $p(0)$ zestawiono w tabeli i przedstawiono na wykresie dla

$$n = 0, \dots, 8.$$

p(n) \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Stan 0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
Stan 1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
Stan 2	0	0	1	0	0	1	0	0	1



Jak widać $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n)$ nie istnieje dla żadnej współrzędnej (dla żadnego stanu).

Wniosek.

Istnienie rozkładu stacjonarnego nie implikuje, że łańcuch jest ergodyczny.

Każdy łańcuch o skończonej liczbie stanów jest stacjonarny.

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch o macierzy P równej

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

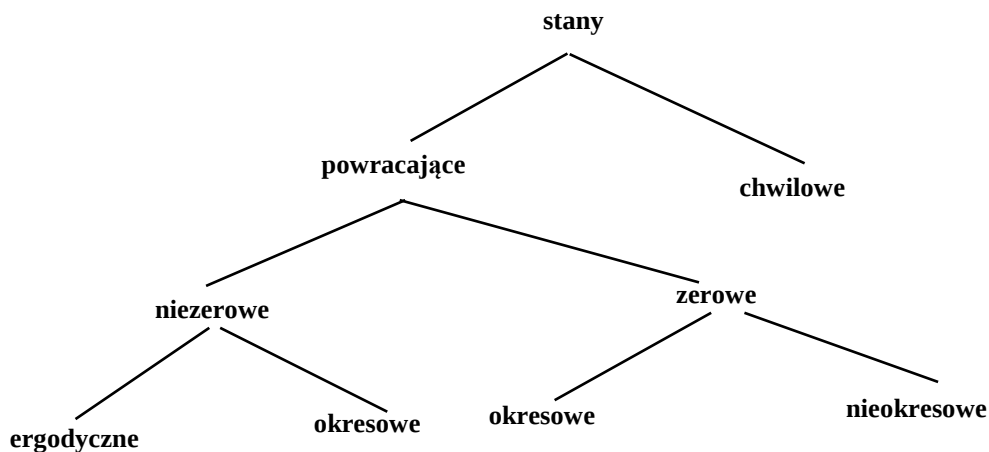
Łańcuch ten nie jest ergodyczny. Zauważmy, że rozkłady $(1/2, 1/2, 0, 0)$; $(0, 0, 1/2, 1/2)$; $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ są stacjonarne (rozkładów stacjonarnych może być więcej niż jeden bo rozpatrywana macierz jest rozkładalna).

Twierdzenie.

Dla nieprzywiedlnego, nieokresowego łańcucha Markowa (X_n) dla którego istnieje rozkład stacjonarny Π mamy:

- łańcuch (X_n) jest powracający,
- łańcuch (X_n) jest ergodyczny,
- rozkład stacjonarny jest jedyny oraz $\pi_j = 1/\mu_j$, gdzie μ_j jest średnim czasem powrotu łańcucha do stanu j .

Podsumowanie klasyfikacji:



Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch o macierzy P równej

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Stany 1 i 2 są istotne. Stan 3 jest nieistotny.

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch o macierzy P równej

$$P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0,9 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie stany są istotne i tworzą jedną klasę.

Zauważmy, że $P^2 = \begin{bmatrix} 0,46 & 0,45 & 0,09 \\ 0,35 & 0,45 & 0,12 \\ 0,05 & 0,15 & 0,8 \end{bmatrix}$

Jest to łańcuch nieprzywiedlny.

Wyznacz rozkład stacjonarny tego łańcucha.

Czy jest to łańcuch ergodyczny?

Czy otrzymany rozkład stacjonarny jest rozkładem granicznym?

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch o macierzy P równej

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie stany są okresowe (mają okres 2).

Wyznacz rozkład stacjonarny tego łańcucha.

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch o macierzy P równej

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznacz graf tego łańcucha.

Jakie są domknięte klasy tego łańcucha?, Czy jest to łańcuch nieprzywiedlny?

Czy łańcuch ten ma stany okresowe? Czy wszystkie stany są okresowe ?.

Sprawdź, że $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ nie istnieje i żadna kolumna P^n nie składa się wyłącznie z elementów dodatnich.

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch o macierzy P równej

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 \cdot 2} & \frac{1}{2 \cdot 3} & \frac{1}{3 \cdot 4} & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Wszystkie stany są zerowe, powracające.

Przykład.

Rzucamy symetryczną czworościenną kostką (na ściankach liczby 1, 2, 3, 4). Rozpatrujemy łańcuch Markowa X_n określony jako ciąg maksymalnych wyników spośród rzutów 1,2,3,...,n. Sprawdź, że łańcuch ten ma macierz P równą

$$P = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wyznacz graf tego łańcucha. Czy łańcuch ten ma stany okresowe?

Przykład.

Gracze A i B rozpoczynają grę z kapitałem 2zł każdy. W każdej partii gracz A wygrywa z prawdopodobieństwem 0,6, gracz B wygrywa z prawdopodobieństwem 0,4. Po każdej partii przegrywający płaci wygrywającemu 1 zł.

- jakie jest prawdopodobieństwo, że gra zakończy się po 2 partiach ?
- jakie jest prawdopodobieństwo, że po 4 partiach kapitał każdego gracza wyniesie 2 zł?
- Ile wynosi wartość oczekiwana kapitału gracza A po 2 partiach?

Przyjmijmy, że stany procesu to kapitał w posiadaniu gracza A czyli $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stany 0 i 1 są pochłaniające (osiągnięcie któregoś z tych stanów oznacza bankructwo jednego z graczy). Do jakiej klasy należą pozostałe stany? Narysuj odpowiedni graf.

Rozkład początkowy $p(0) = [0, 0, 1, 0, 0]$.

Ad. a) $p(2) = p(0)P^2 = [0,16; 0, 0,48, 0, 0,36]$, zatem prawdopodobieństwo zakończenia gry po 2 partiach wynosi $p_0(2) + p_4(2) = 0,16 + 0,36 = 0,52$.

Ad. b) $p(4) = p(0)P^4 = [0,2368; 0, 0,2304, 0, 0,5328]$, zatem prawdopodobieństwo, że każdy z graczy ma po 2 zł po 4 partiach wynosi $p_2(4) = 0,2304$.

Ad. c) na podstawie $p(2) = [0,16; 0, 0,48, 0, 0,36]$, obliczamy wartość oczekiwaną kapitału gracza A po 2 partiach: $0,48 \cdot 2\text{zł} + 0,36 \cdot 4\text{zł} = 2,4\text{zł}$.

Zatem gdyby gracze wielokrotnie rozegrali po 2 partie mając początkowo po 2 zł, to przeciętna wygrana gracza A wynosiłaby 40 gr.

Przykład.

Jeśli ciąg zmiennych losowych

$$X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$$

jest łańcuchem Markowa o macierzy P , to ciąg zmiennych losowych

$$X_0, X_2, X_4, \dots$$

jest łańcuchem Markowa o macierzy P^2 .

Wskazówka. Należy skorzystać z równości Chapmana-Kołmogorowa.

Zadanie.

Uzasadnij własność: Jeśli łańcuch ma dwa **różne** rozkłady stacjonarne to nie może być łańcuchem ergodycznym.

Dyskretne procesy Markowa.

Rozpatrujemy proces stochastyczny X_t , w którym parametr t jest ciągły (zwykle $t \geq 0$).
Będziemy zakładać, że zbiór stanów jest co najwyżej przeliczalny.

Proces X_t jest **procesem Markowa**, jeśli dla dowolnego n , dla dowolnych chwil czasu $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, oraz dowolnych stanów $x, y, x_0, \dots, x_n$ spełniona jest zależność:

$$P\{X_{t_n} = y | X_{t_{n-1}} = x, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \dots, X_{t_0} = x_0\} = P\{X_{t_n} = y | X_{t_{n-1}} = x\}$$

Proces Markowa jest jednorodny w czasie, jeżeli dla dowolnych stanów x, y oraz chwil czasu $t_1 < t_2$ mamy

$$P\{X_{t_2} = y | X_{t_1} = x\} = p(x, y, t_2 - t_1)$$

co oznacza, że prawdopodobieństwo przejścia ze stanu x do stanu y w czasie od momentu t_1 do momentu t_2 zależy tylko od różnicy $t_2 - t_1$, a nie zależy od momentu wyjściowego t_1 .

Przyjmijmy oznaczenie $P\{X_{t_n} = j | X_{t_0} = i\} = p_{ij}(t)$, gdzie $t = t_n - t_0$, $t_n > t_0$.

Niech $P(t) = [p_{ij}(t)]$ **macierz prawdopodobieństw przejścia**
 $i, j = 0, 1, \dots, N$ (dla skończonej liczby stanów).

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & \dots & p_{0N}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \dots & p_{1N}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N0}(t) & p_{N1}(t) & \dots & p_{NN}(t) \end{bmatrix}$$

Jest to macierz stochastyczna.
Zależność

$$p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(s)$$

nazywamy **równaniem Chapmana - Kołmogorowa**.

Wynika z niej, że

$$P(s+t) = P(s)P(t) = P(t)P(s)$$

Zakładamy, że funkcje $p_{ij}(t)$ są ciągłe w punkcie $t = 0$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = i \\ 0 & \text{dla } j \neq i \end{cases}$$

Wtedy są ciągłe w dowolnym innym punkcie.

Istnieje też (choć może być nieskończona) granica $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = -p'_{ii}(0)$

oraz skończona granica $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = p'_{ij}(0)$

Dla wygody przyjmijmy oznaczenia

$$p'_{ij}(0) = \begin{cases} -\lambda_{ii} & \text{dla } j = i \\ \lambda_{ij} & \text{dla } j \neq i \end{cases}$$

Wielkości te nazywamy **intensywnościami przejścia** ze stanu i do stanu j gdy $j \neq i$, oraz **intensywnościami wyjścia** ze stanu i (do pozostałych stanów) gdy $i = j$.

Ponieważ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = p'_{ij}(0) = \lambda_{ij}$, to λ_{ij} dla $j \neq i$ są gęstościami prawdopodobieństwa przejścia ze stanu i do stanu j , oraz dla małych t mamy

$$p_{ij}(t) \approx \lambda_{ij} \cdot t,$$

co oznacza, że dla małych t prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j jest proporcjonalne do t , współczynnikiem proporcjonalności jest intensywność λ_{ij} .

Dalej będziemy rozpatrywali jednorodne procesy Markowa, dla których wszystkie intensywności są skończone. Taki proces spełnia równania Kołmogorowa:

$$(*) \quad \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = -\lambda_{ii} p_{i,j}(t) + \sum_{k \neq j} p_{i,k}(t) \lambda_{kj} \quad \text{dla ustalonego } i$$

(równanie prospektywne - odnosi się do przyszłości)

$$(**) \quad \frac{dp_{ij}(s)}{dt} = -\lambda_{ii} p_{i,j}(s) + \sum_{k \neq i} \lambda_{ik} p_{k,j}(s) \quad \text{dla ustalonego } j$$

(równanie retrospektywne - odnosi się do przeszłości)

przy warunkach początkowych $p_{i,i}(0) = 1, p_{i,j}(0) = 0$ dla $i \neq j$.

Jeśli określimy macierz Λ o elementach równym intensywnościom $\begin{cases} -\lambda_{ii} & \text{dla } j = i \\ \lambda_{ij} & \text{dla } j \neq i \end{cases}$
 $i, j = 0, 1, \dots, N$ (dla skończonej liczby stanów)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} & \dots & \lambda_{0N} \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{N0} & \lambda_{N1} & \dots & \lambda_{NN} \end{bmatrix}$$

(**macierz intensywności**), to możemy powyższe układy równań zapisać w postaci macierzowej:

$$(*) \quad P'(t) = P(t) \cdot \Lambda \quad \text{czyli} \quad \frac{d}{dt} P(t) = P(t) \Lambda$$

oraz

$$(**) \quad P'(t) = \Lambda \cdot P(t) \quad \text{czyli} \quad \frac{d}{dt} P(t) = \Lambda P(t)$$

W zastosowaniach częściej stosuje się równanie prospektywne.

dowód

Dla równania prospektywnego.

W równaniu $p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(s)$ (Chapmana - Kołmogorowa) podstawiamy $s = \Delta t$

$$p_{ij}(\Delta t + t) = \sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t)$$

następnie od obu stron odejmujemy $p_{ij}(t)$ i dzielimy obie strony otrzymanej równości przez Δt

$$\frac{p_{ij}(\Delta t + t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = \frac{\sum_{k \neq j} p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t) - p_{ij}(t)[1 - p_{jj}(\Delta t)]}{\Delta t}$$

Zakładając, że rozpatrywane intensywności istnieją, gdy przejdziemy do granicy $\Delta t \rightarrow 0$ wtedy po uwzględnieniu

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = -p'_{ii}(0) = \lambda_{ii} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = p'_{ij}(0) = \lambda_{ij}$$

otrzymamy prospektywne równanie Kołmogorowa.

Dla równania retrospektywnego.

Analogicznie w równaniu Chapmana - Kołmogorowa podstawiamy $t = \Delta s$, następnie od obu stron odejmujemy $p_{ij}(s)$ i dzielimy obie strony otrzymanej równości przez Δs i przechodzimy do granicy $\Delta s \rightarrow 0$.

Oznaczając $p_i(t) = P\{X_t = i\}$ mamy $p_k(t) = \sum_i p_i(0)p_{ik}(t)$ i po zróźniczkowaniu względem czasu otrzymamy inny zapis równania prospektywnego

$$(***) \quad \frac{dp_j(t)}{dt} = -\lambda_{jj}p_j(t) + \sum_{k \neq j} \lambda_{kj}p_k(t) \quad j = 0, 1, \dots$$

Przyjmując $p(t) = [p_0(t), p_1(t), \dots]$ (**wektor rozkładu procesu** w momencie t) i macierz Λ o elementach równym intensywnościom $\begin{cases} -\lambda_{ii} & \text{dla } j = i \\ \lambda_{ij} & \text{dla } j \neq i \end{cases}$ (macierz intensywności) możemy powyższy układ równań zapisać w postaci wektorowej:

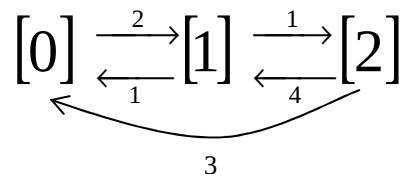
$$p'(t) = p(t) \cdot \Lambda \quad \text{czyli} \quad \frac{d}{dt} p(t) = p(t) \Lambda$$

Rozwiązanie tego równania ma postać $p(t) = p(0)e^{\Lambda t}$

Przykład.

Narysować graf i wyznaczyć równania prospektywne Kołmogorowa procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -2p_0(t) + p_1(t) + 3p_2(t) \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = 2p_0(t) - 2p_1(t) + 4p_2(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = p_1(t) - 7p_2(t) \end{cases}$$

Praktyczny sposób tworzenia takich równań na podstawie grafu jest następujący:

- Liczba równań jest równa liczbie stanów,
- Lewa strona każdego równania to pochodna prawdopodobieństwa danego stanu,
- Prawa strona ma tyle składników ile krawędzi grafu związanych jest z danym wierzchołkiem,
- Strzałkom wchodzącym odpowiada składnik równy intensywności przy tej strzałce pomnożonej przez prawdopodobieństwo stanu z którego ona wychodzi,
- Strzałkom wychodzącym odpowiada składnik równy intensywności przy tej strzałce pomnożonej przez prawdopodobieństwo stanu do którego ona dochodzi **poprzedzony znakiem minus** (ponieważ strzałki wychodzą z jednego stanu, to intensywności można zsumować).

Macierzą intensywności nazywamy każdą macierz Λ taką, że:

- elementy pozadiagonalne są nieujemne,
- elementy diagonalne są niedodatnie,
- suma elementów w każdym wierszu wynosi 0.

Uwaga.

Jeśli Λ jest macierzą intensywności to macierz

$$P = \frac{1}{m} \Lambda + I$$

(gdzie $-m < 0$ jest najmniejszym elementem macierzy Λ (leży na głównej przekątnej Λ)) jest macierzą stochastyczną.

Wartości własne macierzy intensywności mają zawsze moduł nie większy niż $2m$, ich część rzeczywista mieści się w przedziale $[-2m, 0]$.

Przykład.

$$\text{Jeśli } \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{to } m = 2, \text{ zatem} \quad P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Wartości własne macierzy Λ są równe 0; -3; -1.

Wartości własne macierzy P są równe 1; -0,5; 0,5.

Ponieważ układ równań Kołmogorowa (*) można zapisać też w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)\Lambda$$

z warunkiem początkowym $P(0) = I$, to rozwiązanie można zapisać w postaci wykładniczej

$$P(t) = e^{\Lambda t} \quad \text{gdzie}$$

$$e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \frac{t^2}{2!}\Lambda^2 + \frac{t^3}{3!}\Lambda^3 + \dots$$

W prostych przypadkach rozwiązanie układu równań $p'(t) = p(t) \cdot \Lambda$ można wyznaczyć metodą przekształcenia Laplace'a.

Przykład.

System składa się z jednego elementu podstawowego i dwóch elementów zapasowych.

Element podstawowy jest obciążony i psuje się z intensywnością λ . Elementy zapasowe są nieobciążone i nie psują się. Gdy popsuje się element podstawowy jego funkcję przejmuje element zapasowy i wtedy psuje się z intensywnością λ . System przestaje pracować z chwilą popsucia się wszystkich elementów. Niech $X(t)$ będzie procesem oznaczającym liczbę zepsutych elementów w czasie t . Przyjmijmy, że rozkład początkowy ma postać $[1, 0, 0, 0]$. Narysujemy graf procesu i jego macierz intensywności. Rozwiązując równanie Kołmogorowa wyznaczmy wektor $p(t)$ i rozkład graniczny.

$$[0] \xrightarrow{\lambda} [1] \xrightarrow{\lambda} [2] \xrightarrow{\lambda} [3]$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Układ $p'(t) = p(t) \cdot \Lambda$ zapisujemy po współrzędnych w postaci

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) \\ p'_1(t) = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t) \\ p'_2(t) = \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t) \\ p'_3(t) = \lambda p_2(t) \end{cases}$$

Pochodne transformujemy wg wzoru: $f'(t) \rightarrow s\hat{f}(s) - f(0)$ i otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} s\hat{p}_0(s) - 1 = -\lambda \hat{p}_0(s) \\ s\hat{p}_1(s) = \lambda \hat{p}_0(s) - \lambda \hat{p}_1(s) \\ s\hat{p}_2(s) = \lambda \hat{p}_1(s) - \lambda \hat{p}_2(s) \\ s\hat{p}_3(s) = \lambda \hat{p}_2(s) \end{cases}$$

Rozwiązując otrzymany układ równań wyznaczamy oryginały (retransformaty) na podstawie

zależności $\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}$ (w szczególności $e^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{s + \alpha}$)

$$p_0(t) = e^{-\lambda t} ; p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} ; p_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t} ; p_3(t) = 1 - p_0(t) - p_1(t) - p_2(t)$$

Zauważmy, że prawdopodobieństwo, że w chwili t układ pracuje wynosi $1 - e^{-\lambda t}$.

Prawdopodobieństwa graniczne są równe $\Pi = [0, 0, 0, 1]$.

Uwaga.

Niech $p_i(t)$ - prawdopodobieństwo, że w chwili t proces znajdzie się w stanie i .

Wtedy
$$p_i(t) = \sum_{j=0}^N p_j(0) p_{ji}(t)$$

Niech
$$p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_N(t))$$

Wtedy
$$p(t) = p(0)P(t)$$

Rozkład graniczny, ergodyczność dla procesów Markowa.

$$\Pi = p(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$$

Twierdzenie.

Macierz intensywności Λ ma zawsze wartość własną równą 0.

Twierdzenie.

Rozkład graniczny nie zależy od rozkładu początkowego $\Leftrightarrow$ macierz intensywności Λ ma jednokrotną wartość własną równą 0.

(Wtedy odpowiadająca jej macierz stochastyczna jest nierozkładalna).

Twierdzenie.

Jeśli skończona macierz intensywności Λ ma poza przekątną tylko dodatnie elementy to proces ten jest ergodyczny i ma dodatnie prawdopodobieństwa graniczne.

Dwa sposoby wyznaczania rozkładu granicznego określają następujące twierdzenia:

Twierdzenie.

Rozkład graniczny Π jest niezerowym rozwiązaniem układu $\Pi\Lambda = \mathbf{0}$ spełniającym warunek unormowania (suma składowych zero).

Równanie $\Pi\Lambda = \mathbf{0}$ wynika z równania różniczkowego $\frac{d}{dt} p(t) = p(t)\Lambda$, bowiem jeśli istnieje rozkład graniczny to nie zależy on od t zatem jego pochodna po t jest równa zero.

Twierdzenie.

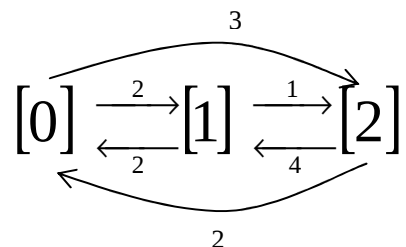
Rozkład graniczny Π można wyznaczyć za pomocą dopełnień algebraicznych M_{kk} elementów z przekątnej macierzy $-\Lambda$:

$$\Pi_j = \frac{M_{jj}}{\sum_k M_{kk}}$$

Przykład.

Narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$



odp. [14/49; 24/49; 11/49]

Przykład.

Narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

Przyjmując, że proces ma stany 0, 1, 2; obliczyć graniczną wartość oczekiwaną. Czy jest to proces ergodyczny?

Przykład.

Przyjmując, że proces ma stany 0, 1, 2, 3; narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Wypisać równania Kołmogorowa tego procesu. Obliczyć graniczną wartość oczekiwaną. Odp. [5/37; 7/37; 8/37; 11/37], 2.

Przykład.

Proces Markowa jest określony grafem

$$[0] \xleftarrow{4} [1] \xrightarrow{2} [2]$$

Wyznaczyć jego macierz intensywności i równania Kołmogorowa.

Wyznaczyć wektor $p(t)$ dla rozkładu początkowego (0, 1, 0).

Wyznaczyć rozkład graniczny.

Po jakim czasie $p_0(t)$ osiągnie wartość 0,25?

Czy kiedykolwiek $p_0(t) = p_2(t)$?

Przykład.

Proces Markowa jest określony grafem

$$[0] \xrightleftharpoons[2]{2} [1] \xrightleftharpoons[4]{1} [2] \xrightleftharpoons[3]{1} [3]$$

Wyznaczyć jego macierz intensywności i równania Kołmogorowa.

Wyznaczyć rozkład graniczny tego procesu. Obliczyć graniczną wartość oczekiwaną.

Odp. [0,42; 0,42; 0,107; 0,03], ok. 0,75.

Przykład.

Sprawdź, że jeśli proces Markowa ma macierz intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -a & a \\ b & -b \end{bmatrix}$$

gdzie $a, b, a + b > 0$

to jego macierz prawdopodobieństw przejść jest równa

$$P(t) = \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b + ae^{(-a-b)t} & a - ae^{(-a-b)t} \\ b - be^{(-a-b)t} & a + be^{(-a-b)t} \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć wektor $p(t)$ dla rozkładu początkowego (1, 0).

Wyznaczyć rozkład graniczny.

Proces Poissona.

Proces $\{N(t), t \geq 0\}$ nazywamy **procesem zliczającym** jeśli $N(t)$ oznacza całkowitą liczbę badanych zdarzeń zaobserwowanych do chwili t .

Proces zliczający musi spełniać warunki:

- 1) $N(t) \geq 0$,
 - 2) $N(t)$ przyjmuje tylko całkowite własności,
 - 3) Jeśli $s < t$ to $N(s) \leq N(t)$,
 - 4) Dla $s < t$ $N(t) - N(s)$ jest równe liczbie zdarzeń zaobserwowanych w przedziale $(s, t]$,
- Proces zliczający jest procesem o **przyrostach niezależnych** jeśli rozkłady liczby zdarzeń obserwowanych w rozłącznych przedziałach czasu są niezależne, np. $N(t)$ nie zależy od $N(t + s) - N(t)$.

Uwaga.

Każdy proces o przyrostach niezależnych jest procesem Markowa.

Proces zliczający jest **procesem jednorodnym** (w czasie) gdy rozkład liczby zaobserwowanych zdarzeń w przedziale czasu zależy tylko od długości tego przedziału, np. $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$ ma taki sam rozkład jak $N(t_2) - N(t_1)$.

Proces Poissona jest jednorodnym procesem Markowa o przyrostach niezależnych o rozkładzie.

$$P(X_0 = 0) = 1$$

$$P(X_t = k) = P(X_{t+\tau} - X_\tau = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$k = 0, 1, \dots$ λ - intensywność procesu, $\lambda > 0$

parametry procesu Poissona:

$$m(t) = \lambda t \quad t \geq 0,$$

$$K(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2), \quad \rho(t_1, t_2) = \begin{cases} \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} & \text{dla } t_2 \leq t_1 \end{cases}$$

Uzasadnienie.

Ponieważ $P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ to

$$m(t) = E(X_t) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X_t = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t$$

$$\begin{aligned}
E(X_t^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X_t = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \\
&= \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \\
&= (\lambda t)^2 e^{-\lambda t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = (\lambda t)^2 + \lambda t
\end{aligned}$$

Zatem

$$D^2(t) = E(X_t^2) - (E(X_t))^2 = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t$$

Z jednorodności procesu dla $t_1 < t_2$ mamy $X_{t_2} - X_{t_1} = X_{t_2-t_1} - X_0 = X_{t_2-t_1}$, zatem stąd i z niezależności otrzymamy

$$\begin{aligned}
R(t_1, t_2) &= E(X_{t_1} \cdot X_{t_2}) = E[X_{t_1} (X_{t_1} + X_{t_2-t_1})] = E(X_{t_1}^2) + E(X_{t_1} \cdot X_{t_2-t_1}) = \\
&= E(X_{t_1}^2) + E(X_{t_1}) \cdot E(X_{t_2-t_1})
\end{aligned}$$

$$R(t_1, t_2) = (\lambda t_1)^2 + \lambda t_1 + \lambda t_1 \cdot \lambda(t_2 - t_1) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2$$

ogólnie

$$R(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & \text{dla } t_2 \leq t_1 \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
K(t_1, t_2) &= R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) = \begin{cases} \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 - \lambda t_1 \lambda t_2 & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 - \lambda t_1 \lambda t_2 & \text{dla } t_2 \leq t_1 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \lambda t_1 & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \lambda t_2 & \text{dla } t_2 \leq t_1 \end{cases} = \lambda \min(t_1, t_2)
\end{aligned}$$

oraz

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{D(t_1)D(t_2)} = \begin{cases} \frac{\lambda t_1}{\sqrt{\lambda t_1} \sqrt{\lambda t_2}} & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \frac{\lambda t_2}{\sqrt{\lambda t_1} \sqrt{\lambda t_2}} & \text{dla } t_2 \leq t_1 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} & \text{dla } t_2 \leq t_1 \end{cases}$$

Zauważmy, że X_{t_2}, X_{t_1} są zawsze dodatnio skorelowane i siła zależności między nimi znacznie spada gdy jedna z chwil jest wielokrotnie większa od drugiej.

Przykłady zjawisk modelowanych procesem Poissona.

- liczba wyemitowanych cząstek przez ciało promieniotwórcze w pewnym przedziale czasu,
- liczba awarii systemu komunikacyjnego promieniotwórcze w pewnym przedziale czasu,
- liczba zgłoszeń do portalu internetowego w pewnym przedziale czasu,

Uwaga.

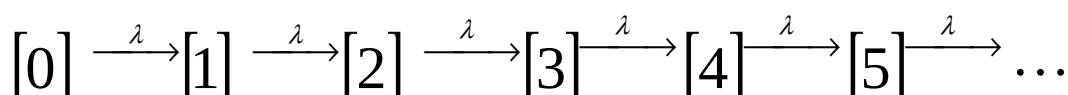
Funkcja f ma własność $o(h)$ jeśli $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

Inna (**równoważna definicja procesu Poissona**).

Proces zliczający $X(t)$ jest procesem Poissona o intensywności λ ($\lambda > 0$) gdy:

- $X(0) = 0$,
- $X(t)$ jest stacjonarny i ma przyrosty niezależne,
- $P\{X(t) = 1\} = \lambda t + o(t)$,
- $P\{X(t) \geq 2\} = o(t)$

Graf procesu Poissona jest następujący



Macierz intensywności procesu Poissona ma postać

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Przyjmując $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)$ (**wektor rozkładu procesu** w momencie t), to równanie Kołmogorowa $p'(t) = p(t) \cdot \Lambda$ zapisujemy po współrzędnych w postaci

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) \\ p'_1(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda p_0(t) \\ p'_2(t) = -\lambda p_2(t) + \lambda p_1(t) \\ p'_3(t) = -\lambda p_3(t) + \lambda p_2(t) \\ \dots \\ p'_k(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) \\ \dots \end{cases}$$

Przyjmujemy rozkład początkowy $p(0) = (1, 0, 0, \dots)$.

Rozwiązaniem tego układu jest

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

czyli

$$p(t) = \left(e^{-\lambda t}, \frac{\lambda t}{1!} e^{-\lambda t}, \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}, \dots, \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \dots \right)$$

(zauważmy, że suma elementów tego wektora wynosi jeden).

Zatem jednowymiarowy rozkład tego procesu (tzn. rozkład w dowolnej ustalonej chwili t) jest wyznaczony przez rozkład Poissona.

Uzasadnienie.

Sposób I.

Pochodne i funkcje transformujemy wg wzoru: $f'(t) \rightarrow s\hat{f}(s) - f(0)$, $f(t) \rightarrow \hat{f}(s)$ i otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} s\hat{p}_0(s) - 1 = -\lambda \hat{p}_0(s) \\ s\hat{p}_1(s) = \lambda \hat{p}_0(s) - \lambda \hat{p}_1(s) \\ s\hat{p}_2(s) = \lambda \hat{p}_1(s) - \lambda \hat{p}_2(s) \\ s\hat{p}_3(s) = \lambda \hat{p}_2(s) - \lambda \hat{p}_3(s) \\ \dots\dots\dots \\ s\hat{p}_k(s) = \lambda \hat{p}_{k-1}(s) - \lambda \hat{p}_k(s) \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Rozwiązujemy otrzymany układ równań. Z pierwszego równania wyznaczamy $\hat{p}_0(s) = \frac{1}{s + \lambda}$ i przez podstawianie wyznaczamy kolejno

$$\hat{p}_1(s) = \frac{\lambda}{(s + \lambda)^2}, \quad \hat{p}_2(s) = \frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^3}, \quad \dots\dots, \quad \hat{p}_k(s) = \frac{\lambda^k}{(s + \lambda)^{k+1}}, \quad \dots$$

Następnie wyznaczamy oryginały (retransformaty) na podstawie zależności

$$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}$$

$$p_0(t) = e^{-\lambda t} ; \quad p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} ; \quad p_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t} ; \quad \dots; \quad p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} ; \quad \dots$$

Sposób II.

Rozpatrujemy funkcję tworzącą wektora rozkładu $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)$

$$\Psi(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) s^k$$

Jeśli pomnożymy poszczególne równania różniczkowe rozpatrywanego układu odpowiednio przez 1, s , s^2 , ..., s^k , ..., i dodamy stronami to otrzymamy zależność

$$\sum_{k=0}^{\infty} p'_k(t) s^k = -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) s^k + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) s^{k+1} = \lambda(s-1) \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) s^k = \lambda(s-1) \Psi(s, t)$$

Ponieważ

$$\frac{\partial \Psi(s,t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} p'_k(t) s^k$$

to porównując powyższe równości otrzymamy równanie różniczkowe

$$\frac{\partial \Psi(s,t)}{\partial t} = \lambda(s-1)\Psi(s,t)$$

z warunkiem początkowym

$$\Psi(s,0) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(0) s^k = 1$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$\Psi(s,t) = e^{\lambda(s-1)t} = e^{\lambda st - \lambda t} = e^{-\lambda t} e^{\lambda st}$$

Rozwijając drugi czynnik w szereg potęgowy otrzymamy

$$\Psi(s,t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda ts)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} s^k$$

Lecz $\Psi(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) s^k$, więc porównując współczynniki przy poszczególnych potęgach zmiennej s , otrzymamy jak poprzednio

$$p_0(t) = e^{-\lambda t} ; p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} ; p_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t} ; \dots ; p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} ; \dots$$

Problem.

T_1 - czas pierwszego zgłoszenia,

T_n - czas między $n-1$ a n -tym zgłoszeniem,

Wyznaczyć rozkład tych zmiennych losowych.

Rozwiązanie.

$\{T_1 > t\}$ oznacza zdarzenie, że nie było zgłoszenia w $[0, t]$,

$$P(T_1 > t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

zatem $P(T_1 < t) = 1 - e^{-\lambda t} = F(t)$ (dystrybuenta rozkładu wykładniczego).

Następnie zauważmy, że z niezależności wynika

$$P(T_2 > t | T_1 = s) = P\{\text{brak zgłoszeń w } (s, s+t] | T_1 = s\} = P\{\text{brak zgłoszeń w } (s, s+t]\} = e^{-\lambda t}$$

Zatem T_2 też ma rozkład wykładniczy i jest niezależny od T_1 .

Itd.

Wniosek.

Odstępy czasu między kolejnymi zmianami stanów w jednorodnym procesie Poissona są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym **rozkładzie wykładniczym**:

$$P(T < t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{dla } t > 0 \end{cases}$$

Parametry tego rozkładu to $ET = \frac{1}{\lambda}$, $D^2T = \frac{1}{\lambda^2}$.

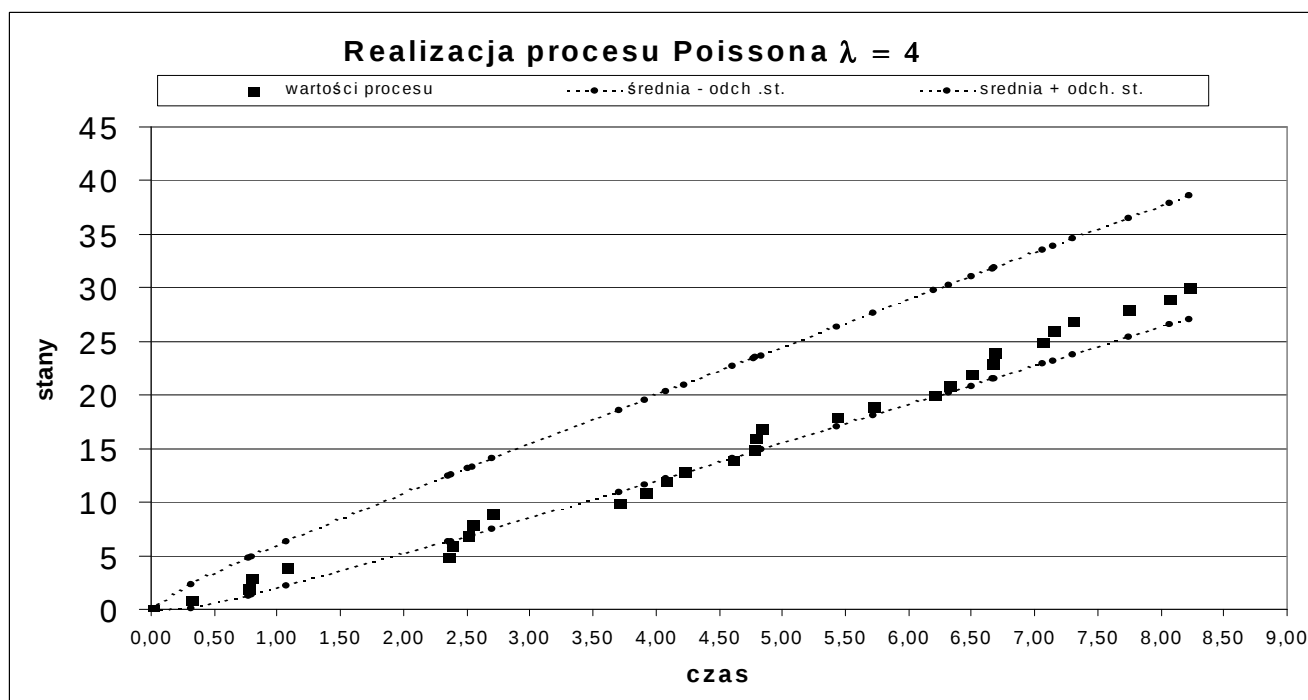
Twierdzenie.

Suma skończonej liczby niezależnych procesów Poissona jest procesem Poissona, którego parametr jest sumą parametrów poszczególnych procesów.

Przykładowa realizacja procesu Poissona dla $\lambda = 4$.

czas	stan	$\lambda t - \sqrt{\lambda t}$	$\lambda t + \sqrt{\lambda t}$
0,00	0	0,00	0,00
0,08	1	-0,24	0,91
0,33	2	0,18	2,48
0,41	3	0,36	2,93
0,76	4	1,29	4,77
1,13	5	2,38	6,63
1,29	6	2,90	7,46
1,45	7	3,39	8,20
1,61	8	3,90	8,97
1,64	9	4,01	9,13
1,77	10	4,43	9,76
2,47	11	6,74	13,03
2,85	12	8,03	14,79
3,02	13	8,59	15,54
3,07	14	8,78	15,79
3,61	15	10,63	18,22
3,81	16	11,32	19,12
3,88	17	11,59	19,47
4,00	18	11,99	19,99
4,07	19	12,26	20,33
5,16	20	16,11	25,20
5,88	21	18,67	28,37
5,96	22	18,96	28,73
6,02	23	19,16	28,97
6,39	24	20,50	30,61
6,94	25	22,50	33,03
7,28	26	23,71	34,50
7,41	27	24,18	35,07
7,45	28	24,35	35,27
7,59	29	24,85	35,87

8,11	30	26,74	38,13
------	----	-------	-------



Uwaga.

$$p_{ij}(t) = P(X_{\tau+t} = j \mid X_{\tau} = i) = P(X_{\tau+t} - X_{\tau} = j - i) =$$

$$= P(X_t = j - i) = p_{j-i}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} \quad \text{dla } j \geq i,$$

$$p_{ij}(t) = 0 \quad \text{dla } j < i,$$

tzn.

$$P(t) = [p_{ij}(t)] = \begin{bmatrix} e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t} & \dots \\ 0 & e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \dots \\ 0 & 0 & e^{-\lambda t} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Przykład.

Sprawdzić, że dla procesu Poissona zachodzi:

$$p(t) = p(0)P(t)$$

Przykład.

Sprawdzić, że dla procesu Poissona równania Kołmogorowa mają postać:

$$(*) \quad \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = -\lambda p_{i,j}(t) + \lambda p_{i+1,j}(t) \quad \text{dla ustalonego } i$$

(równanie prospektywne)

$$(**) \quad \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \lambda p_{i,j}(t) - \lambda p_{i,j-1}(t) \quad \text{dla ustalonego } j$$

(równanie retrospektywne)

a ich rozwiązaniem jest

$$p_{ij}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}$$

Przykład.

Strumień zgłoszeń do systemu telekomunikacyjnego jest procesem Poissona. Wiadomo, że intensywność tego procesu wynosi $\lambda = 3$ zgł/min.

- obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najwyżej jednego zgłoszenia w ciągu 30 sekund,
- obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia trzech zgłoszeń w ciągu 30 sekund,
- obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi zgłoszeniami będzie większy niż 12 sekund,
- ile sekund wynosi średni czas oczekiwania na pierwsze zgłoszenie?

Rozwiązanie.

Ad. a) 30 sekund to 0,5 minuty, zatem odczytując z tablicy rozkładu Poissona dla $\lambda t = 1,5$ mamy.

$$P(X_{0,5} \leq 1) = P(X_{0,5} = 0) + P(X_{0,5} = 1) = 0,223 + 0,335 = 0,558$$

Ad. b) analogicznie $P(X_{0,5} = 3) = 0,126$

Ad. c) T – czas między zgłoszeniami. Jest to zmienna losowa o rozkładzie wykładniczym.

Ponieważ 12 sekund to 0,2 minuty dla $\lambda t = 0,6$ mamy.

$$P(T \geq 0,2) = e^{-0,6} = 0,5488 \text{ (odczyt z tablicy dla } k = 0, \lambda t = 0,6).$$

Ad. d) $E(T) = 1/\lambda = 1/3 = 20$ sek.

Przykład.

Strumień awarii pewnego systemu jest modelowany procesem Poissona. Wiadomo, że przeciętnie jedna awaria zdarza się raz na 50 godzin (zatem intensywność tego procesu wynosi $\lambda = 0,02$ awarii/godz.).

- obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najwyżej jednej awarii w ciągu 20 godzin,
- obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej dwóch awarii w ciągu 20 godzin,
- obliczyć prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy w ciągu 20 godzin,
- obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi awariami będzie większy niż 100 godzin,
- obliczyć wartość oczekiwaną bezawaryjnego czasu pracy tego systemu.

Przykład.

Wyznaczyć parametry i narysować przykładowa realizację procesu

$$Z(t) = X(t) - \lambda t$$

gdzie $X(t)$ jest jednorodnym procesem Poissona o intensywności λ .

Przykład.

Sprawdź, że dla jednorodnego procesu Poissona o intensywności λ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X(n)}{n} = \lambda$$

Wskazówka.

Zauważ, że $X(n)$ jest sumą niezależnych zmiennych losowych

$X(1), X(2) - X(1), X(3) - X(2), \dots, X(n) - X(n-1)$, o jednakowym rozkładzie Poissona

z parametrem λ . Należy zastosować do tego ciągu mocne prawo wielkich liczb.

Przykład.

Sprawdź, że macierz prawdopodobieństw przejścia procesu przełączania między stanami $\{-1, 1\}$ generowanego procesem Poissona, tzn. procesu

$$Z(t) = Z(0)(-1)^{X(t)}, \quad t \geq 0$$

gdzie $X(t)$ jest jednorodnym procesem Poissona o intensywności λ ma postać

$$P(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda t}) & \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda t}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda t}) & \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda t}) \end{bmatrix}$$

Wskazówka.

$$\begin{aligned} p_{-1,1}(t) &= p_{1,-1}(t) = p(X(t) = \text{l.nieparzysta}) = \sum_{n=0}^{\infty} p(X(t) = 2n+1) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda t}) \\ p_{-1,-1}(t) &= 1 - p_{-1,1}(t), \quad p_{1,1}(t) = 1 - p_{1,-1}(t). \end{aligned}$$

Przykład.

Oblicz $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(X(t) \geq 1)}{P(X(t) = 1)}$

gdzie $X(t)$ jest jednorodnym procesem Poissona o intensywności λ .

Odp. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(X(t) \geq 1)}{P(X(t) = 1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - P(X = 0)}{P(X = 1)} = 1.$

Proces urodzeń i śmierci.

λ_i - intensywności urodzeń, $i = 0, 1, \dots$

μ_j - intensywności śmierci, $j = 1, 2, \dots$

$$[0] \xrightleftharpoons[\mu_1]{\lambda_0} [1] \xrightleftharpoons[\mu_2]{\lambda_1} [2] \xrightleftharpoons[\mu_3]{\lambda_2} \dots$$

$p_{ij}(t)$ - prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j po czasie t ,
 $p_{ij}(t)$ mają własności:

$$\begin{aligned} p_{i,i-1}(t) &= \mu_i t + o(t), \\ p_{i,i+1}(t) &= \lambda_i t + o(t), \\ p_{i,i}(t) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)t + o(t), \\ p_{i,j}(t) &= o(t), \text{ dla } |i - j| > 1 \end{aligned}$$

i spełniają układ równań Kołmogorowa:

$$(*) \quad \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_{i,j}(t) + \mu_{j+1} p_{i,j+1}(t)$$

i warunki początkowe $p_{i,i}(0) = 1$, $p_{i,j}(0) = 0$ dla $i \neq j$.

Dalej rozpatrujemy proces urodzeń i śmierci ze skończoną liczbą stanów $0, 1, \dots, N$.

$$[0] \xrightleftharpoons[\mu_1]{\lambda_0} [1] \xrightleftharpoons[\mu_2]{\lambda_1} [2] \xrightleftharpoons[\mu_3]{\lambda_2} \dots \xrightleftharpoons[\mu_N]{\lambda_{N-1}} [N]$$

Niech $P(t) = [p_{ij}(t)]$ stochastyczna macierz przejścia $i, j = 0, 1, \dots, N$.

Proces urodzeń i śmierci jest jednorodnym procesem Markowa.

Dla procesu urodzeń i śmierci macierz intensywności ma postać:

$$\Lambda = [\lambda_{ij}] = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{N-1} & -(\lambda_{N-1} + \mu_{N-1}) & \lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_N & -\mu_N \end{bmatrix}$$

układ równań Kołmogorowa można zapisać w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt} P(t) = P(t) \Lambda$$

Rozwiązanie tego równania ma postać $P(t) = P(0)e^{\Lambda t}$

Gdzie $e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \frac{t^2}{2!} \Lambda^2 + \frac{t^3}{3!} \Lambda^3 + \dots$

Przyjmując $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_N(t))$ (wektor rozkładu procesu w momencie t), to równanie Kołmogorowa $p'(t) = p(t) \cdot \Lambda$ zapisujemy po współrzędnych w postaci

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p'_1(t) = \lambda_0 p_0(t) - (\lambda_1 + \mu_1) p_1(t) + \mu_2 p_2(t) \\ p'_2(t) = \lambda_1 p_1(t) - (\lambda_2 + \mu_2) p_2(t) + \mu_3 p_3(t) \\ \dots \\ p'_N(t) = \lambda_{N-1} p_{N-1}(t) - \mu_N p_N(t) \end{cases}$$

Przyjmujemy rozkład początkowy $p(0) = (1, 0, 0, \dots)$.

Układ równań Kołmogorowa:

$$\frac{d}{dt} p(t) = p(t) \Lambda$$

ma rozwiązanie postaci $p(t) = p(0)e^{\Lambda t}$

gdzie $e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \frac{t^2}{2!} \Lambda^2 + \frac{t^3}{3!} \Lambda^3 + \dots$

Uwaga.

Proces urodzeń i śmierci ma dla intensywności dodatnich rozkład graniczny postaci:

$$\Pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \Pi_0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

gdzie

$$\Pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}}$$

Zauważmy, że składowe wektora rozkładu granicznego mają sumę równą 1.

Dowód.

Zastosujemy sposób pierwszy. Rozpatrzmy równanie $\Pi\Lambda = 0$

$$[\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \dots \quad \Pi_N] \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{N-1} & -(\lambda_{N-1} + \mu_{N-1}) & \lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_N & -\mu_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

czyli układ równań

$$\begin{cases} -\lambda_0 \Pi_0 + \mu_1 \Pi_1 = 0 \\ \lambda_0 \Pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1) \Pi_1 + \mu_2 \Pi_2 = 0 \\ \lambda_1 \Pi_1 - (\lambda_2 + \mu_2) \Pi_2 + \mu_3 \Pi_3 = 0 \\ \dots \\ \lambda_{N-1} \Pi_{N-1} - \mu_N \Pi_N = 0 \end{cases}$$

Jeśli przyjąć, że $-\lambda_0 \Pi_0 + \mu_1 \Pi_1 = z_1$; $-\lambda_1 \Pi_1 + \mu_2 \Pi_2 = z_2$; itd. to

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 - z_1 = 0 \\ z_3 - z_2 = 0 \\ \dots \\ z_N = 0 \end{cases}$$

stąd $z_i = 0$ i przyjmując Π_0 jako parametr mamy z warunków unormowania poszukiwane wzory.

Uwaga.

Jeśli proces urodzeń i śmierci ma przeliczalną liczbę stanów, to rozkład graniczny jest postaci

$$\Pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \Pi_0, \quad i = 1, 2, \dots$$

gdzie

$$\Pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}}$$

(zakładamy, że szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}$ jest zbieżny).

Przykład.

Niech $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = i\lambda$, $i = 0, 1, \dots$, gdzie $\lambda > 0$, dana stała.

Zbadaj istnienie w tym przypadku prawdopodobieństw granicznych.

Przykład (proces urodzeń).

λ_i - intensywności urodzeń, $i = 0, 1, \dots$

$$[0] \xrightarrow{\lambda_0} [1] \xrightarrow{\lambda_1} [2] \xrightarrow{\lambda_2} [3] \xrightarrow{\lambda_3} \dots$$

Dla procesu urodzeń macierz intensywności ma postać:

$$\Lambda = [\lambda_{ij}] = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_k & \lambda_k & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Przyjmujemy, że $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)$ (wektor rozkładu procesu w momencie t), oraz początkowy $p(0) = (1, 0, 0, \dots)$.

Sprawdź, że równanie Kołmogorowa $p'(t) = p(t) \cdot \Lambda$ ma dla tego procesu postać

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) \\ p'_1(t) = \lambda_0 p_0(t) - \lambda_1 p_1(t) \\ p'_2(t) = \lambda_1 p_1(t) - \lambda_2 p_2(t) \\ \dots \end{cases}$$

Przykład (proces Yule'a).

Jest to proces urodzeń dla którego intensywności urodzeń są równe $\lambda_i = i\lambda$, $i = 0, 1, \dots$.

Przyjmujemy, że $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)$ (wektor rozkładu procesu w momencie t), oraz początkowy $p(0) = (0, 1, 0, 0, \dots)$.

Sprawdź, że równanie Kołmogorowa $p'(t) = p(t) \cdot \Lambda$ ma dla tego procesu postać

$$\begin{cases} p'_0(t) = 0 \\ p'_1(t) = -\lambda p_1(t) \\ p'_2(t) = \lambda p_1(t) - 2\lambda p_2(t) \\ \dots \\ p'_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) - k\lambda p_k(t) \\ \dots \end{cases}$$

a prawdopodobieństwa

$$p_k(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1} & \text{dla } k > 0 \\ 0 & \text{dla } k = 0 \end{cases}$$

spełniają to równanie.

Przykład.

W zakładzie pracują maszyny, z których każda psuje się niezależnie od pozostałych z intensywnością $\lambda = 3$ maszyny/godz. Maszyny te są naprawiane przez robotników. Niech $X(t)$ oznacza liczbę zepsutych maszyn w chwili t . Rozpatrzmy następujące przypadki:

1) są 3 maszyny i 1 robotnik pracujący z intensywnością 1maszyna/godz.

- 2) są 3 maszyny i 2 robotników pracujących bez współpracy z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
- 3) są 4 maszyny i 2 robotników pracujących bez współpracy z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
- 4) są 3 maszyny i 3 robotników pracujących z pełną współpracą z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
- 5) są 3 maszyny i 2 robotników pracujących z pełną współpracą z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
- 6) są 3 maszyny i 2 robotników pracujących z ograniczoną współpracą (z intensywnością 1maszyna/godz. każdy gdy pracują osobno i z intensywnością 1,5maszyny/godz. gdy pracują razem).

W każdym przypadku:

- a) narysować graf,
- b) wyznaczyć prawdopodobieństwa graniczne,
- c) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że żaden robotnik nie pracuje,
- d) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że przynajmniej jedna maszyna jest sprawna,
- e) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że przynajmniej jedna maszyna czeka na naprawę,
- f) obliczyć średnia liczbę zepsutych maszyn,
- g) obliczyć średnia liczbę zajętych robotników.

Ad. 2, [0,0129; 0,1164; 0,348; 0,523]; $E_{zm} = 2,38$; $E_{zr} = 1,86$.

Ad. 4, [1/16; 3/16; 6/16; 6/16]; $E_{zm} = 2,06$; $E_{zr} = 2,8$.

SMO

Systemy masowej obsługi (zastosowanie procesu urodzeń i śmierci) - przykłady:

- centrala telefoniczna,
- stacja benzynowa,
- kasa biletowa,
- system informatyczny.

Założenia:

n - liczba stanowisk obsługi,

m - liczba miejsc w poczekalni.

- strumień zgłoszeń jest procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$,
- czas obsługi ma rozkład wykładniczy z parametrem $\mu > 0$ (intensywność obsługi),
- stanowiska działają niezależnie,
- zgłoszenia które następują gdy wszystkie stanowiska obsługi są zajęte przechodzą do poczekalni (jeśli jest),
- jeśli wszystkie stanowiska obsługi są zajęte i wszystkie miejsca w poczekalni są zajęte to zgłoszenie opuszcza SMO.

$X(t)$ - proces stochastyczny oznaczający liczbę klientów w SMO w chwili t ,

$p_j(t) = P(X(t) = j)$, $j = 0, 1, 2, \dots$ jest rozkładem tego procesu w chwili t

Najczęściej interesują nas prawdopodobieństwa graniczne

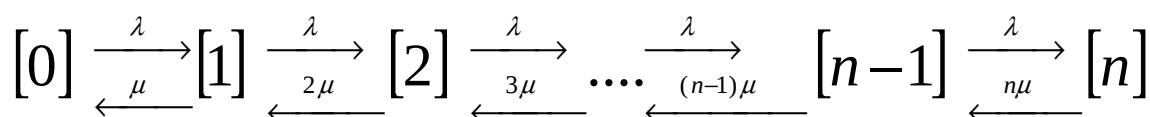
$$C_0 = \Pi_0, C_1 = \Pi_1, \dots, C_n = \Pi_n, \dots$$

SMO ze stratami (bez poczekalni), bez współpracy.

$$0 < n < \infty, \quad m = 0$$

$\lambda_i = \lambda$ intensywność zgłoszeń,

$\mu_j = j\mu$ intensywność obsługi j - tego stanowiska,



Prawdopodobieństwa graniczne (wzory Erlanga):

$$C_0 = \Pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 2!} + \frac{\lambda^3}{\mu^3 3!} + \dots + \frac{\lambda^n}{\mu^n n!}} = \left(\sum_{j=0}^n \frac{\lambda^j}{\mu^j j!} \right)^{-1} = \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} \right)^{-1}$$

gdzie $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$

$$C_j = \Pi_j = \frac{\lambda^j}{\mu^j j!} C_0 = \frac{\alpha^j}{j!} C_0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Wzory te wynikają bezpośrednio ze wzorów na rozkład graniczny dla procesu urodzeń i śmierci bowiem:

$$\begin{aligned}
 C_0 = \Pi_0 &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot 2\mu} + \frac{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu} + \dots + \frac{\overbrace{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda \cdot \dots \cdot \lambda}^{n \text{ czynników}}}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \cdot \dots \cdot (n-1)\mu \cdot n\mu}} = \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 2!} + \frac{\lambda^3}{\mu^3 3!} + \dots + \frac{\lambda^n}{\mu^n n!}}
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$C_j = \frac{\frac{\lambda^j}{\mu^j j!}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 2!} + \frac{\lambda^3}{\mu^3 3!} + \dots + \frac{\lambda^n}{\mu^n n!}} = \frac{\frac{\alpha^j}{j!}}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!}}$$

i mnożąc licznik oraz mianownik przez $e^{-\alpha}$ widzimy, że poszczególne składniki są równe funkcji prawdopodobieństwa rozkładu Poissona z parametrem α

$$C_j = \frac{\frac{\lambda^j}{\mu^j j!} e^{-\alpha}}{e^{-\alpha} + \frac{\lambda}{\mu} e^{-\alpha} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 2!} e^{-\alpha} + \frac{\lambda^3}{\mu^3 3!} e^{-\alpha} + \dots + \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} e^{-\alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{\alpha^j}{j!} e^{-\alpha}}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} e^{-\alpha}} = \frac{P_{\alpha}(j)}{\sum_{j=0}^n P_{\alpha}(j)} \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

zatem możemy wyznaczać wartości C_j za pomocą tablic rozkładu Poissona $P_{\alpha}(j)$ ($P_{\alpha}(j) = P(X = j)$ jest funkcją prawdopodobieństwa rozkładu Poissona z parametrem α).

Uwaga

Jeśli dysponujemy skumulowanym RPS i nieskumulowanym RPN rozkładem Poissona

(np. funkcja EXCELA) to $C_j = \frac{RPN(j)}{RPS(n)}$.

Prawdopodobieństwo odmowy = $P_{odm} = C_n$.

Prawdopodobieństwo obsługi = $P_{obsł} = 1 - C_n$.

Średnia (graniczna) liczba zajętych stanowisk obsługi.

0	1	...	n
C_0	C_1	...	C_n

$$m_{zs} = \lim_{t \rightarrow \infty} E(X(t)) = \sum_{k=1}^n k \cdot C_k = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{\alpha^k}{k!} C_0 = \alpha \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} C_0 =$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha^i}{i!} C_0 = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} C_i = \alpha(C_0 + C_1 + \dots + C_{n-1}) = \alpha(1 - C_n) = \alpha \cdot P_{obsł}$$

Uwaga

Jeśli $n=1$ to $C_0 = \frac{1}{1+\alpha}$ $C_1 = \alpha C_0 = \frac{\alpha}{1+\alpha}$.

W tym przypadku $m_{zs} = \alpha(1 - C_1) = \alpha \cdot C_0 = C_1 = P_{odm}$.

Przykład.

Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy, $n = 5$, wyznaczymy prawdopodobieństwa

graniczne dla różnych wartości $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ i zbadamy zależność prawdopodobieństwa odmowy

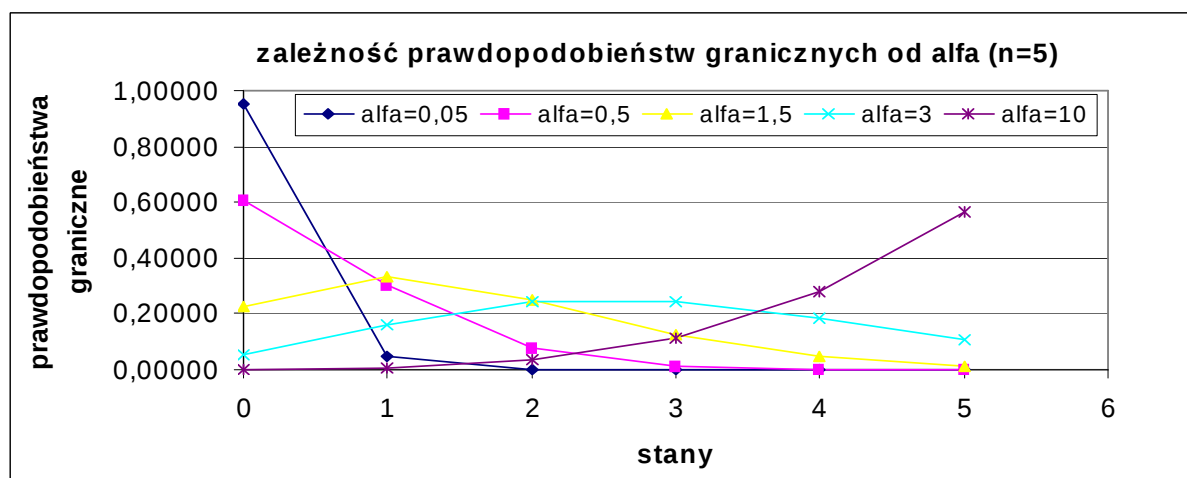
obsługi i średniej liczby zajętych stanowisk od α .

W poszczególnych kolumnach wpisane są prawdopodobieństwa graniczne dla wartości α podanej w nagłówku kolumny. Pod tabelką podano średnie liczby zajętych stanowisk.

j	alfa	0,05	0,1	0,5	1	1,5	2	3	5	7	10
0		0,95123	0,90484	0,60654	0,36810	0,22413	0,13761	0,05435	0,01094	0,00303	0,00068
1		0,04756	0,09048	0,30327	0,36810	0,33619	0,27523	0,16304	0,05469	0,02123	0,00677
2		0,00119	0,00452	0,07582	0,18405	0,25214	0,27523	0,24457	0,13674	0,07429	0,03384
3		0,00002	0,00015	0,01264	0,06135	0,12607	0,18349	0,24457	0,22789	0,17335	0,11279
4		0,00000	0,00000	0,00158	0,01534	0,04728	0,09174	0,18342	0,28487	0,30337	0,28198
5		0,00000	0,00000	0,00016	0,00307	0,01418	0,03670	0,11005	0,28487	0,42472	0,56395

m_{zs}	0,05	0,1	0,4999	0,9969	1,4787	1,9266	2,6698	3,57566	4,02696	4,36
----------	------	-----	--------	--------	--------	--------	--------	---------	---------	------

Dla pięciu wybranych wartości α rozkłady graniczne zilustrowano graficznie.

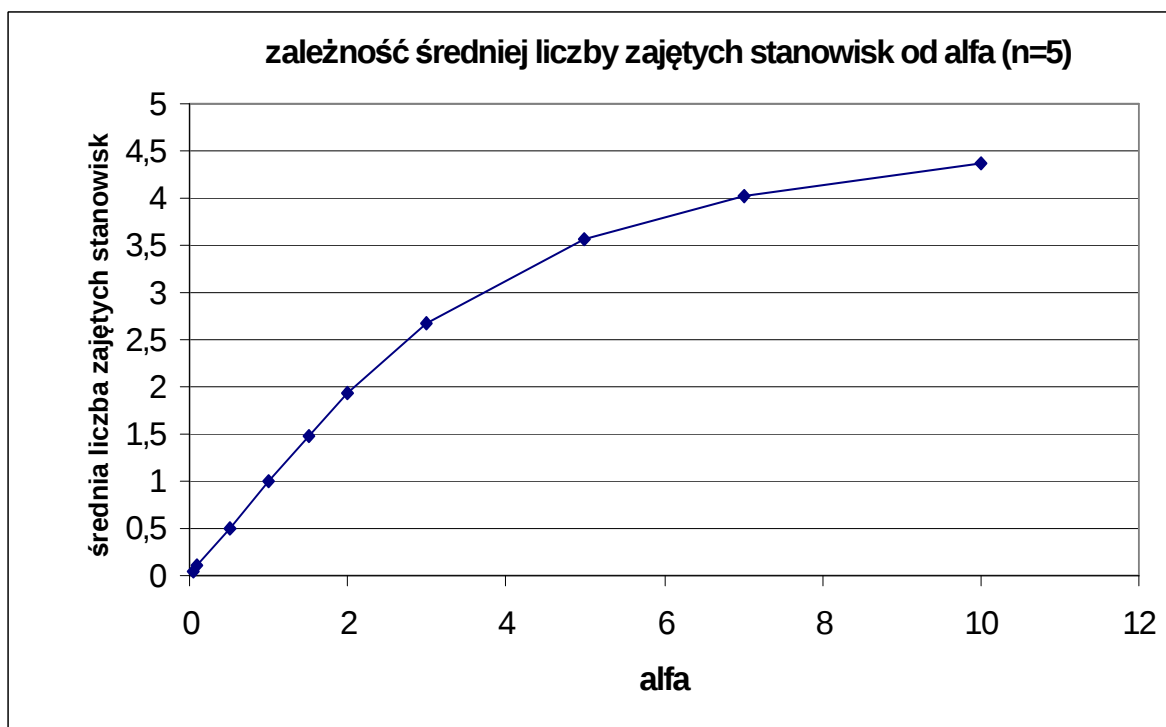


Zauważmy, że wraz ze wzrostem alfy rośnie prawdopodobieństwo, że zajęta będzie większa liczba stanowisk.

Na drugim wykresie przedstawiono zależność prawdopodobieństwa odmowy obsługi (C_5) od alfa. Wzrost intensywności zgłoszeń w stosunku do intensywności obsługi tzn. wzrost α powoduje wzrost prawdopodobieństwa odmowy obsługi.

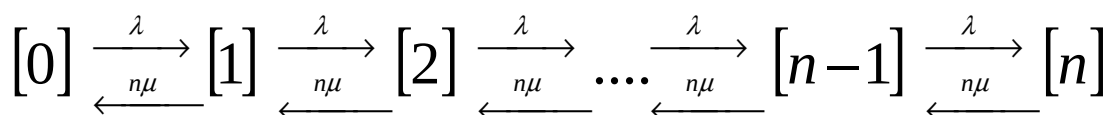


Na trzecim wykresie przedstawiono zależność średniej liczby zajętych stanowisk (m_{zs}) od alfa. Wzrost α powoduje wzrost średniej liczby zajętych stanowisk.



SMO ze stratami (bez poczekalni), z pełną współpracą.

$0 < n < \infty$, $m = 0$ $\mu_j = n\mu$ intensywność obsługi j - tego stanowiska,



Prawdopodobieństwa graniczne:

$$C_0 = \frac{1}{1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^n} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{gdy } \beta = 1 \\ \left(\frac{1 - \beta^{n+1}}{1 - \beta} \right)^{-1} & \text{gdy } \beta \neq 1 \end{cases}$$

gdzie $\beta = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\alpha}{n}$

$$C_j = \beta^j C_0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Prawdopodobieństwo odmowy obsługi to $P_{odm} = C_n$.

SMO z ograniczonymi stratami, bez współpracy.

$m > 0$

stanowiska obsługi

poczekalnia

$$[0] \xrightarrow[\mu]{\lambda} [1] \dots \xrightarrow[n\mu]{\lambda} [n] \xrightarrow[n\mu]{\lambda} [n+1] \dots [n+m-1] \xrightarrow[n\mu]{\lambda} [n+m]$$

Prawdopodobieństwa graniczne:

$$C_0 = \left(1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^n}{n!} (\beta + \beta^2 + \dots + \beta^m) \right)^{-1}$$

gdzie $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, $\beta = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\alpha}{n}$ zatem

$$C_0 = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\beta(1-\beta^m)}{1-\beta} \right)^{-1} & \text{gdyn } \beta \neq 1 \\ \left(\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} m \right)^{-1} & \text{gdyn } \beta = 1 \end{cases}$$

$$C_k = \frac{\alpha^k}{k!} C_0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad C_{n+j} = \beta^j C_n, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Uwaga. dla $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$C_k = \begin{cases} \frac{\frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} + \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha} \frac{\beta(1-\beta^m)}{1-\beta}} = \frac{P_\alpha(k)}{\sum_{k=0}^n P_\alpha(k) + P_\alpha(n) \frac{\beta(1-\beta^m)}{1-\beta}} & \text{gdyn } \beta \neq 1 \\ \frac{P_\alpha(k)}{\sum_{k=0}^n P_\alpha(k) + P_\alpha(n) m} & \text{gdyn } \beta = 1 \end{cases}$$

zatem do obliczeń można wykorzystać tablice rozkładu Poissona.

SMO z ograniczonymi stratami, z pełną współpracą.

$m > 0$

stanowiska obsługi

poczekalnia

$$[0] \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} [1] \dots \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} [n] \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} [n+1] \dots [n+m-1] \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} [n+m]$$

Prawdopodobieństwa graniczne:

$$C_0 = \frac{1}{1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{n+m}} = \begin{cases} \frac{1}{m+n+1} & \text{gdy } \beta = 1 \\ \left(\frac{1 - \beta^{n+m+1}}{1 - \beta} \right)^{-1} & \text{gdy } \beta \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{gdzie } \beta = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\alpha}{n}$$

$$C_j = \beta^j C_0, \quad j = 1, 2, \dots, n+m$$

Prawdopodobieństwo odmowy obsługi $P_{\text{odm}} = C_{n+m}$.

SMO bez strat (nieskończenie wiele stanowisk), bez współpracy.

$n = \infty$, $\lambda_i = \lambda$ intensywność zgłoszeń, $\mu_j = j\mu$ intensywność obsługi j -tego stanowiska,

$$[0] \xrightleftharpoons[\mu]{\lambda} [1] \xrightleftharpoons[2\mu]{\lambda} \dots \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} [n] \xrightleftharpoons[(n+1)\mu]{\lambda} [n+1] \dots$$

Prawdopodobieństwa graniczne:

$$C_0 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \right)^{-1} = e^{-\alpha} \quad \text{gdzie } \alpha = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$C_j = \frac{\lambda^j}{\mu^j j!} C_0 = \frac{\alpha^j}{j!} C_0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \dots$$

Uwaga.

$$C_j = \frac{\alpha^j}{j!} e^{-\alpha} = P_{\alpha}(j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$$

zatem do obliczeń można wykorzystać tablice rozkładu Poissona.

Uwaga. Ten typ SMO nie może być rozpatrywany z pełną współpracą obsługi.

SMO bez strat (nieskończenie długa kolejka), bez współpracy.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{stanowiska obsługi} & & & & \text{poczekalnia} & & \\ [0] \xrightleftharpoons[\mu]{\lambda} [1] \dots \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} [n] \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} [n+1] \dots \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} [n+m] \dots \xrightleftharpoons[n\mu]{\lambda} & & & & & & \end{array}$$
$$C_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\beta}{1-\beta} \right)^{-1}$$
$$C_k = \frac{\alpha^k}{k!} C_0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad C_{n+j} = \beta^j C_n, \quad j = 1, 2, \dots$$

Uwaga. Podobnie dla $\beta < 1$ można rozpatrywać przypadek SMO z nieskończoną poczekalnią i pełną współpracą stanowisk. Wtedy

$$C_0 = \frac{1}{1 + \beta + \beta^2 + \dots} = \left(\frac{1}{1 - \beta} \right)^{-1}; \quad C_j = \beta^j C_0, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$m = \infty$$
$$P(T_1 < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\nu t} & \text{gdy } t > 0 \\ 0 & \text{gdy } t \leq 0 \end{cases}$$
$$\begin{array}{ccccccc} \text{stanowiska obsługi} & & & & \text{poczekalnia} & & \\ [0] & \xrightarrow{\lambda} & [1] & \dots & \xrightarrow{\lambda} & [n] & \xrightarrow{\lambda} & [n+1] & \dots & \xrightarrow{\lambda} & [n+m] & \dots \\ & \xleftarrow{\mu} & & \xleftarrow{n\mu} & & \xleftarrow{n\mu+\nu} & & \xleftarrow{n\mu+m\nu} & & & & \end{array}$$

60

$$C_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{\lambda}{n\mu + \nu} + \frac{\lambda^2}{(n\mu + \nu)(n\mu + 2\nu)} + \dots + \frac{\lambda^m}{(n\mu + \nu) \dots (n\mu + m\nu)} + \dots \right) \right)^{-1}$$

zakładamy, że powyższy szereg jest zbieżny.

Zatem

$$C_k = \frac{\alpha^k}{k!} C_0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad C_n = \frac{\alpha^n}{n!} C_0$$

$$C_{n+j} = C_n \frac{\lambda^j}{(n\mu + \nu) \dots (n\mu + j\nu)}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Charakterystyki SMO.

m_{kl} - średnia liczba klientów w SMO (st. obsł. lub poczekalnia),

m_k - średnia długość kolejki,

m_{zs} - średnia liczba zajętych stanowisk,

SMO z ograniczonymi stratami, bez współpracy.

Y - liczba zajętych stanowisk obsługi,

Y	0	1	...	n - 1	n
p	C_0	C_1	...	C_{n-1}	$C_n + C_{n+1} + \dots + C_{n+m}$

$$m_{zs} = EY = \alpha(1 - C_{n+m}) = \alpha P_{obsł}$$

Z - liczba zajętych miejsc w poczekalni,

Z	0	1	...	m
p	$\sum_{i=0}^n C_i$	C_{n+1}	...	C_{n+m}

$$m_k = EZ = \begin{cases} C_n \left(\frac{m(m+1)}{2} \right) & \text{dla } \beta = 1 \\ C_n \beta \left(\frac{1 - (m+1)\beta^m + m\beta^{m+1}}{(1-\beta)^2} \right) & \text{dla } \beta \neq 1 \end{cases}$$

X - liczba zgłoszeń w SMO, $X = Y + Z$,

Zatem

$$m_{kl} = EX = EY + EZ = m_{zs} + m_k$$

Wniosek.

Jeśli $m = 0$ (brak poczekalni) to

$$EZ = 0, \quad EX = EY = \alpha(1 - C_n)$$

Wniosek.

Jeśli $m = \infty$ to $C_{n+m} \rightarrow 0$ (gdy $m \rightarrow \infty$) oraz

$$EY = \alpha \quad EZ = C_n \beta \frac{1}{(1-\beta)^2}$$

t_{syst} - średni czas przebywania w SMO,

$$t_{\text{syst}} = m_{kl}/\lambda$$

t_{kol} - średni czas przebywania w kolejce,

$$t_{\text{kol}} = m_k/\lambda$$

Niech $m = \infty$ (wtedy $\beta < 1$)

Z - czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce.

$$P(Z > z) = \begin{cases} 1 & \text{dla } z < 0 \\ \frac{C_n}{1-\beta} e^{-n\mu z(1-\beta)} & \text{dla } z \geq 0 \end{cases}$$

Klasyfikacja kolejek.

Priorytety obsługi:

FIFO (first in first of),

SIRO (selection in random order),

LIFO (last in first out).

Rozpatrywany przez nas priorytet to FIFO.

Klasyfikacja Kendalla:

$$X_1/X_2/n : (N, m),$$

X_1 - rozkład czasu między kolejnymi zgłoszeniami,

X_2 - rozkład czasu obsługi jednego zgłoszenia,

n - liczba stanowisk obsługi,

N - liczebność obsługiwanej populacji,

m - liczba miejsc w poczekalni.

Dla rozkładów X_1, X_2 przyjęto m in. oznaczenia:

D - rozkład deterministyczny (równe odstępy czasu),

M - rozkład wykładniczy,

G - dowolny rozkład,

Rozpatrywany przez nas markowski SMO ma oznaczenie

$$M/M/n : (\infty, m)$$

Przykład.

Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy, $\lambda = 2$ zgł./h; $\mu = 4$ zgł./h ($\alpha = \lambda/\mu = 0,5$).

Wyznacz minimalną liczbę stanowisk obsługi tak aby $P_{odm} < 0,05$.

Sposób I.

Rozpatrujemy na przykład $n = 2$.

$$C_0 = \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)^{-1} = \frac{8}{13} \quad C_1 = \frac{\alpha}{1!} C_0 = \frac{4}{13} \quad C_2 = \frac{\alpha^2}{2!} C_0 = \frac{1}{13} > 0,05$$

Należy zatem zwiększyć n .

Rozpatrujemy $n = 3$.

$$C_0 = \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48}\right)^{-1} = \frac{48}{79}$$

$$\text{wtedy } C_1 = \frac{\alpha}{1!} C_0 = \frac{24}{79} \quad C_2 = \frac{\alpha^2}{2!} C_0 = \frac{6}{79} \quad C_3 = \frac{\alpha^3}{3!} C_0 = \frac{1}{79} < 0,05$$

Ponieważ $C_3 = P_{odm} = 1/79 < 0,05$ zatem powinny być przynajmniej 3 stanowiska.

Sposób II (z wykorzystaniem tablic rozkładu Poissona)

Rozpatrujemy na przykład $n = 2$.

$$C_2 = \frac{P_{\alpha}(j)}{\sum_{j=0}^n P_{\alpha}(j)} = \frac{P_{0,5}(2)}{P_{0,5}(0) + P_{0,5}(1) + P_{0,5}(2)} = \frac{0,0758}{0,6065 + 0,3033 + 0,0758} = 0,077$$

Należy zatem zwiększyć n .

Rozpatrujemy $n = 3$.

$$C_3 = \frac{P_{0,5}(3)}{P_{0,5}(0) + P_{0,5}(1) + P_{0,5}(2) + P_{0,5}(3)} = \frac{0,0126}{0,6065 + 0,3033 + 0,0758 + 0,0126} = 0,0126$$

Ponieważ $C_3 = P_{odm} = 0,0126 < 0,05$ zatem powinny być przynajmniej 3 stanowiska.

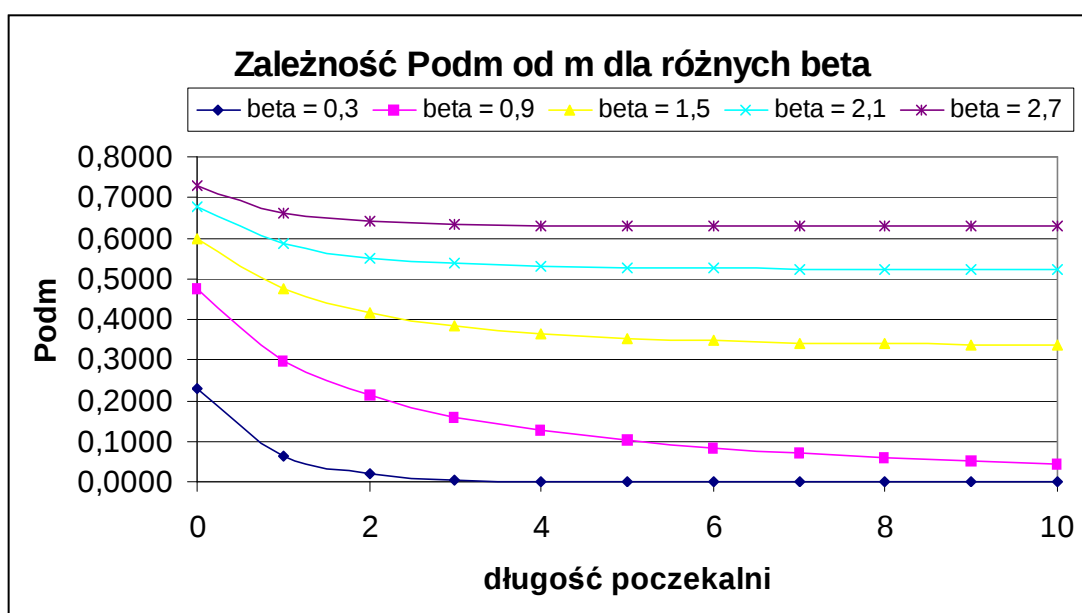
Przykład.

Rozpatrujemy SMO z jednym stanowiskiem obsługi. Zbadamy jak zmienia się P_{odm} dla różnych wartości α gdy długość poczekalni rośnie od $m = 0$ do $m = 10$.

W tym przypadku $\alpha = \beta$. Poszczególne kolumny zawierają P_{odm} dla ustalonego β i różnych m .

beta	0,3	0,9	1,5	2,1	2,7
------	-----	-----	-----	-----	-----

m	Podm	Podm	Podm	Podm	Podm
0	0,2308	0,4737	0,6000	0,6774	0,7297
1	0,0647	0,2989	0,4737	0,5872	0,6633
2	0,0191	0,2120	0,4154	0,5522	0,6417
3	0,0057	0,1602	0,3839	0,5370	0,6340
4	0,0017	0,1260	0,3654	0,5300	0,6313
5	0,0005	0,1019	0,3541	0,5267	0,6302
6	0,0002	0,0840	0,3469	0,5252	0,6299
7	0,0000	0,0703	0,3422	0,5245	0,6297
8	0,0000	0,0595	0,3392	0,5241	0,6297
9	0,0000	0,0508	0,3372	0,5240	0,6296
10	0,0000	0,0437	0,3359	0,5239	0,6296



Jak widać P_{odm} maleje gdy rośnie liczba miejsc w poczekalni.

Zadanie 1.

Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy, średnio klienci zgłaszają się co 20 minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi 5 minut.

Wyznacz minimalną liczbę stanowisk obsługi tak aby $P_{odm} < 0,01$.

Dla tak wyznaczonej liczby stanowisk oblicz prawdopodobieństwo:

- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest przynajmniej jeden klient,
- tego, że w SMO jest najwyżej jeden klient,
- tego, że czas między kolejnymi zgłoszeniami przekracza 0,5 godziny,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO. Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.

Odp. $n = 3$, $m_{zs} = 0,25$.

Zadanie 2.

Rozpatrujemy SMO ze stratami z jednym stanowiskiem obsługi. Wiadomo, że prawdopodobieństwa odmowy obsługi wynosi 0,375 oraz, że średnio klienci zgłaszają się co 20 minut. Ile wynosi średni czas obsługi jednego klienta w tym SMO?

Odp. 12 minut

Zadanie 3.

Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy z dwoma stanowiskami obsługi. Wiadomo, że prawdopodobieństwa odmowy obsługi wynosi 0,2 oraz, że średni czas obsługi jednego klienta w tym SMO wynosi 10 minut. Ile wynosi intensywność zgłoszeń w tym SMO?

Odp. $\alpha = 1$ więc $\lambda = \mu = 6 \text{ zgł./godz}$

Zadanie 4.

Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy. Wiadomo, że intensywność zgłoszeń jest równa intensywności obsługi. Średnia liczba zajętych stanowisk wynosi a) 0,5 b) 0,8

Ile jest stanowisk obsługi w tym SMO?

Odp. a) 1 b) 2

Zadanie 5.

Rozpatrujemy SMO z ograniczonymi stratami, bez współpracy z jednym stanowiskiem obsługi i jednym miejscem w poczekalni. . Wiadomo, że intensywność zgłoszeń jest równa intensywności obsługi. Wyznacz P_{odm} i m_{zs} .

Odp. $C_0 = C_1 = C_2 = 1/3$ więc $P_{\text{odm}} = 1/3$ i $m_{\text{zs}} = 2/3$

Zadanie 6.

Rozpatrujemy SMO z ograniczonymi stratami, bez współpracy, średnio klienci zgłaszają się co 30 minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi również 30 minut. W poczekalni są 2 miejsca. Wyznacz minimalną liczbę stanowisk obsługi tak aby $P_{\text{odm}} < 0,001$.

Dla tak wyznaczonej liczby stanowisk oblicz prawdopodobieństwo:

- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest przynajmniej dwóch klientów,
- tego, że w poczekalni jest najwyżej jeden klient,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO. Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.

Wyznacz średnią liczbę zajętych miejsc w poczekalni.

Odp. $n = 4$, $m_{\text{zs}} = 0,999$.

Zadanie 7.

Rozpatrujemy SMO bez strat (nieskończona poczekalnia), mamy dwa kanały obsługi bez współpracy, średnio klienci zgłaszają się co 15 minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi również 15 minut. Oblicz prawdopodobieństwo:

- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest przynajmniej dwóch klientów,
- tego, że w poczekalni jest najwyżej trzech klientów,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO. Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.

Wyznacz średnią liczbę zajętych miejsc w poczekalni.

Odp. $m_{\text{zs}} = 1$, $m_k = 1/3$.

Zadania powtórzeniowe z procesów stochastycznych.

Zadanie 1.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At^2 + B$, gdzie A , B to zmienne losowe nieskorelowane. A ma rozkład Poissona z parametrem 2, B jest zmienną losową skokową

o funkcji prawdopodobieństwa: $P(B = -1) = 0,25$; $P(B = 0) = 0,5$; $P(B = 1) = 0,25$

Zadanie 2.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = Ae^t + Be^{-t}$, gdzie A, B to zmienne losowe o parametrach: $EA = 1$; $EB = 0$, i $D^2A = 2$, $D^2B = 2$; współczynnik korelacji między tymi zmiennymi wynosi $-0,75$.

Zadanie 3.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At + B$, gdzie A, B to zmienne losowe o parametrach: $EA = 0$; $EB = -1$, i macierzy kowariancji $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4.

Wyznaczyć wartości własne macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

Czy odpowiedni łańcuch Markowa jest ergodyczny. Narysować graf tego łańcucha.

Jeśli istnieje rozkład ergodyczny tego łańcucha, to wyznaczyć go.

Zadanie 5.

Wyznaczyć rozkład ergodyczny łańcucha Markowa o macierzy (jeśli istnieje).

Narysować graf łańcucha.

a) $P = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$

b)

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Zadanie 6.

Proces (łańcuch Markowa) przyjmuje wartości $-1, 0, 1$. Rozkład początkowy $p(0) = [0, 0, 1]$. Macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Narysować graf łańcucha. Wyznaczyć:

d) Rozkład prawdopodobieństwa po 2 krokach (tzn. wektor $p(2)$)

e) Wartość oczekiwaną procesu po 2 krokach.

f) Graniczną wartość oczekiwaną.

Zadanie 7.

Niech $X(t)$ będzie procesem Markowa przyjmującym wartości 0 i 1.

Przyjmijmy, że rozkład początkowy ma postać $[1, 0]$.

Narysuj graf procesu i jego macierz intensywności. Ułóż i rozwiąż równanie Kołmogorowa, wyznacz wektor $p(t)$ i rozkład graniczny.

$$\begin{array}{c} [0] \xrightarrow{2} [1] \\ \xleftarrow{4} \end{array}$$

Wyznaczyć wartość oczekiwaną $m(t)$ i graniczną wartość oczekiwaną.

Wyznaczyć wariancję $D^2(t)$ i graniczną wariancję.

Zadanie 8.

Narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Zapisać równanie wektorowe Kołmogorowa dla tego procesu.

Wyznaczyć graniczną wartość oczekiwaną. Wyznaczyć graniczną wariancję.

Zadanie 9.

W zakładzie pracują maszyny, z których każda psuje się niezależnie od pozostałych z intensywnością $\lambda = 2$ maszyny/godz. Maszyny te są naprawiane przez robotników z intensywnością 4 maszyny/godz. każdy.

Niech $X(t)$ oznacza liczbę zepsutych maszyn w chwili t . Rozpatrzmy następujące przypadki:

7) są 4 maszyny i 2 robotników pracujących bez współpracy.

8) są 4 maszyny i 2 robotników pracujących z pełną współpracą.

9) są 4 maszyny i 2 robotników pracujących z ograniczoną współpracą (z intensywnością 4maszyny/godz. każdy gdy pracują osobno i z intensywnością 2 maszyny/godz. gdy pracują razem).

W każdym przypadku:

h) narysować graf,

i) wyznaczyć prawdopodobieństwa graniczne,

j) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że żaden robotnik nie pracuje,

k) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że dokładnie jedna maszyna jest sprawna,

l) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że przynajmniej jedna maszyna czeka na naprawę,

m) obliczyć średnia liczbę zepsutych maszyn,

n) obliczyć średnia liczbę zajętych robotników.

Zadanie 10.

Strumień awarii pewnego systemu jest modelowany procesem Poissona. Wiadomo, że przeciętnie jedna awaria zdarza się raz na 20 godzin.

- e) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia dokładnie jednej awarii w ciągu 10 godzin,
- f) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia najwyżej dwóch awarii w ciągu 10 godzin,
- g) obliczyć prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy w ciągu 10 godzin,
- h) obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi awariami będzie większy niż 50 godzin,
- i) obliczyć wartość oczekiwaną bezawaryjnego czasu pracy tego systemu.

Zadanie 11.

Strumień zgłoszeń abonentów do centrali telefonicznej jest procesem Poissona. Średnio zgłasza się 15 abonentów w ciągu godziny.

- a) oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu 20 minut do centrali zgłosi się
 - I) czterech abonentów,
 - II) co najwyżej jeden abonent,
- b) oblicz prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania na kolejnego klienta będzie wynosił od 20 do 40 minut,

Zadanie 12.

Do SMO napłynęło zgłoszenie i rozpoczęła się jego obsługa. Wiadomo, że $\lambda = 4 \text{ zgł/h}$;

$$\mu = 2 \text{ zgł/h.}$$

Obliczyć prawdopodobieństwo, że w czasie $T = 15$ minut

- a) napłynie kolejne zgłoszenie,
- b) zakończy się obsługa zgłoszenia.

Zadanie 13.

Rozpatrujemy SMO ze stratami, z pełną współpracą, średnio klienci zgłaszają się co 30 minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi 15 minut.

Wyznacz minimalną liczbę stanowisk obsługi tak aby $P_{\text{odm}} < 0,02$.

Dla tak wyznaczonej liczby stanowisk oblicz prawdopodobieństwo:

- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest dokładnie jeden klient,
- tego, że w SMO jest najwyżej jeden klient,
- tego, że czas między kolejnymi zgłoszeniami przekracza 0,25 godziny,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO.

Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.

Zadanie 14.

Rozpatrujemy SMO z ograniczonymi stratami, z pełną współpracą, średnio klienci zgłaszają się co 20 minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi

10 minut. W poczekalni jest 1 miejsce. Wyznacz minimalną liczbę stanowisk obsługi tak aby $P_{odm} < 0,01$.

Dla tak wyznaczonej liczby stanowisk oblicz prawdopodobieństwo:

- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest dokładnie dwóch klientów,
- tego, że w poczekalni nie ma klientów,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO.

Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.

Wyznacz średnią liczbę zajętych miejsc w poczekalni.

Zadanie 15.

Rozpatrujemy SMO bez strat (nieskończona poczekalnia), mamy jeden kanał obsługi, średnio klienci zgłaszają się co 30 minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi również 20 minut. Oblicz prawdopodobieństwo:

- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest dokładnie jeden klient,
- tego, że w poczekalni jest najwyżej dwóch klientów,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO.

Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.

Wyznacz średnią liczbę zajętych miejsc w poczekalni.

Zadanie 16.

W SMO z ograniczonymi stratami bez współpracy stanowisk jest jedno stanowisko obsługi, $\lambda = 4 \text{ zgł/h}$; $\mu = 4 \text{ zgł/h}$.

Wyznaczyć minimalną liczbę miejsc w poczekalni tak, aby $p_{odm} < 0,005$.

Dla tak wyznaczonego m oblicz

- a) średnią liczbę klientów w SMO,
- b) średnią liczbę zajętych stanowisk,
- c) średnią liczbę klientów w poczekalni,

Obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między zgłoszeniami przekroczy 30 minut.

Procesy stochastyczne. Uzupełnienie.

Niestacjonarny strumień Poissona to strumień zdarzeń w którym intensywność jest funkcją czasu $\lambda(t)$. Dla takiego strumienia liczba zdarzeń zachodzących w przedziale $(t_0; \tau + t_0)$ ma rozkład Poissona

$$P(X(t_0, \tau) = k) = p_k(t_0, \tau) = \frac{\tilde{\lambda}}{k!} e^{-\tilde{\lambda}} \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\text{gdzie } \tilde{\lambda} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt$$

Rozkład czasu między kolejnymi zdarzeniami ma gęstość

$$f_{t_0}(t) = \lambda(t_0 + t) e^{-\int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(t) dt} \quad t > 0$$

Przykład.

- Wyznacz powyższą gęstość gdy $\lambda(t) = 2 + 3t$.
- Dla $\lambda(t)$ z punktu a) oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się co najmniej jednego zdarzenia w przedziale czasu (2, 5).
- Dla $\lambda(t)$ z punktu a) oblicz $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(X(0, \Delta t) \geq 1)}{P(X(0, \Delta t) = 1)}$

Strumień Palmy (strumień o ograniczonej pamięci) to strumień w którym czasy między kolejnymi zgłoszeniami są niezależne. Gdy ich rozkład jest ustalony to strumień Palmy jest **stacjonarny**.

(Jednorodny (stacjonarny) strumień Poissona jest stacjonarnym strumieniem Palmy, niestacjonarny strumień Poissona nie jest strumieniem Palmy bo początek kolejnego przedziału zależy od końca przedziału poprzedniego).

Twierdzenie. Jeśli strumień zgłoszeń systemu kolejkowego jest strumieniem Palmy o wykładniczym czasie obsługi to strumień zgłoszeń otrzymujących odmowę obsługi jest również strumieniem Palmy.

W szczególności jeśli strumień wejściowy jest prosty (Poissona) to strumień zgłoszeń nie obsłużonych nie jest prosty.

Strumień Erlanga rzędu k to strumień Poissona w którym k kolejnych zgłoszeń odrzucamy akceptując $(k + 1)$ - sze zgłoszenie itd. Dla $k = 0$ strumień Erlanga jest strumieniem Poissona.

Rozkład czasu między zgłoszeniami w strumieniu Erlanga ma rozkład Erlanga k - tego rzędu (suma k niezależnych rozkładów wykładniczych) o gęstości

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad t > 0$$

i dystrybuancie

$$F_k(t) = P(T < t) = 1 - \sum_{s=0}^k \frac{(\lambda t)^s}{s!} e^{-\lambda t} \quad t > 0$$

Strumień Erlanga jest strumieniem Palmy.

Przykład.

Strumień próbkowanych sygnałów pewnego systemu jest strumieniem Erlanga 5 - tego rzędu. Wiadomo, że intensywność wyjściowego strumienia wynosi $\lambda = 0,1$ sygn./min.).

- j) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najwyżej jednego sygnału w ciągu 10 min,
- k) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej trzech sygnału w ciągu 10 min,
- l) obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi sygnałami będzie większy niż 20 min,
- m) obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu Erlanga.

p - przekształcenie strumienia Palmy.

Każde zgłoszenie z prawdopodobieństwem p pozostaje w strumieniu a z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$ jest odrzucane.

p - przekształcenie strumienia Palmy jest strumieniem Palmy.

Dla strumienia Poissona p - przekształcenie jest strumieniem Poissona z parametrem λp .

Przykład.

Strumień zgłoszeń jest modelowany procesem Poissona. Wiadomo, że przeciętnie jedno zgłoszenie zdarza się raz na 20 godzin . Zgłoszenia z tego strumienia podlegają akceptacji z prawdopodobieństwem 0,25 ($p = 0,25$).

- a) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najwyżej jednego zgłoszenia w ciągu 40 godzin,
- b) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej czterech zgłoszeń w ciągu 40 godzin,
- c) obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi zgłoszeniami będzie większy niż 200 godzin,
- d) obliczyć wartość oczekiwaną czasu między zgłoszeniami.

Dodatek 1.**Przekształcenie Laplace'a.**

Przekształcenie Laplace'a (transformata Laplace'a) funkcji $f(t)$ określonej na półprostej

$t \in [0, \infty)$ to funkcja zespolona określona przez całkę
$$L[f(t)] = \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Funkcja $\hat{f}(s)$ jest określona w obszarze zbieżności powyższej całki (aby był to obszar niepusty wystarczy aby $f(t)$ miała najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości I rodzaju i wzrost najwyżej wykładniczy, tzn. $|f(t)| \leq M e^{at}$ $M, a > 0$).

Krótko powyższe przekształcenie oznaczamy $f(t) \rightarrow \hat{f}(s)$.

Funkcję $f(t)$ nazywamy **oryginałem** a funkcję $\hat{f}(s)$ **obrazem**.

Jeśli $\hat{f}(s)$ jest określona dla $\text{Res} > a$, to w każdym punkcie ciągłości funkcji $f(t)$ jest określone odwrotne przekształcenie Laplace'a (retransformata)

$$f(t) = L^{-1}(\hat{f}(s)) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{c-ix}^{c+ix} e^{st} \hat{f}(s) ds \quad \text{dla dowolnego } c > a$$

Niekiedy powyższa całkę można zamienić na całkę po krzywej zamkniętej, którą można policzyć za pomocą twierdzeń o residuach. Gdy obraz jest funkcją wymierną to rozkładamy ją na ułamki proste i retransformujemy je.

Transformata Laplace'a jest przekształceniem liniowym (dla odpowiednich s), tzn.

$$a_1 f(t) + a_2 g(t) \rightarrow a_1 \hat{f}(s) + a_2 \hat{g}(s)$$

Retransformata również jest przekształceniem liniowym.

Pochodne transformujemy wg wzoru: $f'(t) \rightarrow s\hat{f}(s) - f(0)$.

Zestawienie najważniejszych oryginałów i obrazów:

$f(t)$	$\hat{f}(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^r ($r > -1$)	$\frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}$ ($\Gamma(n+1) = n!$, $n \in N$)
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$
$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}$
$\frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta}$	$\frac{1}{(s - \alpha)(s - \beta)}$
$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$
$\cos \alpha t$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$

Dodatek 2.

Funkcja tworząca.

Jeśli X jest zmienną losową przyjmującą nieujemne wartości całkowite i mającą rozkład określony funkcją prawdopodobieństwa $P(X = k) = p_k$ $k = 0, 1, 2, \dots$ to jej **funkcją tworzącą** nazywamy zespolony szereg potęgowy

$$\Psi(s) = \Psi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

Przy czym jeśli pewne wartości k nie są punktami skokowymi to odpowiednie składniki powyższej sumy są równe zero.

Zauważmy, że powyższą funkcję można formalnie określić jako $\Psi(s) = E(s^X)$.

Z własności funkcji prawdopodobieństwa wynika, że powyższy szereg potęgowy jest zbieżny przynajmniej dla $|s| \leq 1$. Zatem z własności zespolonych szeregów potęgowych wynika, że $\Psi(s)$ jest funkcją analityczną wewnątrz koła jednostkowego $|s| < 1$.

Funkcja tworząca jednoznacznie określa rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej o nieujemnych wartościach całkowitych, bowiem

$$p_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \Psi(s) \Big|_{s=0} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Niekiedy do wyznaczania k stosuje się całkę Cauchy'ego

$$p_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=r} \frac{\Psi(s)}{s^{k+1}} ds \quad 0 < r \leq 1$$

(wartość tej całki można wyznaczyć za pomocą twierdzenia o residuach).

Jeśli $\Psi(s)$ jest funkcją wymierną to stosujemy rozkład na ułamki proste.

Przykład.

Rozkład zerojedynkowy $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = q$ gdzie $q = 1 - p$
ma funkcję tworzącą

$$\Psi(s) = q + ps$$

Funkcja tworząca sumy niezależnych zmiennych losowych jest równa iloczynowi funkcji tworzących poszczególnych składników.

Przykład.

Rozkład dwumianowy $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$ gdzie $q = 1 - p$

ma funkcję tworzącą

$$\Psi(s) = (q + ps)^n$$

Uzasadnienie: rozkład dwumianowy jest sumą n niezależnych rozkładów zerojedynkowych.

Przykład.

Rozkład Poissona $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \lambda > 0$

ma funkcję tworzącą

$$\Psi(s) = e^{-\lambda(1-s)}$$

Jeśli dla zmiennej losowej X istnieje moment rzędu drugiego, to

$$m = \Psi'(1)$$

$$m_2 = \Psi''(1) + \Psi'(1)$$

zatem

$$D^2 X = \Psi''(1) + \Psi'(1) - [\Psi'(1)]^2$$

Uwaga.

Ponieważ $\Psi_X(e^{it}) = \varphi_X(t)$, gdzie $\varphi_X(t)$ jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X , to własności funkcji tworzących wynikają z własności funkcji charakterystycznych z uwzględnieniem zamiany argumentu.

Np.

$$m = \frac{\varphi'_X(0)}{i} = \frac{\Psi'_X(e^{i0}) \cdot e^{i0} \cdot i}{i} = \Psi'_X(1)$$

$$m_2 = \frac{\varphi''_X(0)}{i^2} = \frac{(\Psi'_X(e^{it}) \cdot e^{it} \cdot i)' \Big|_{t=0}}{i^2} = \frac{(\Psi''_X(e^{it}) \cdot e^{it} \cdot i \cdot e^{it} \cdot i + \Psi'_X(e^{it}) \cdot e^{it} \cdot i \cdot i) \Big|_{t=0}}{i^2} = \Psi''(1) + \Psi'(1)$$

Funkcja tworząca momenty (transformata Laplace'a).

Jeśli X jest zmienną losową dla której istnieją momenty dowolnego rzędu to jej **funkcją tworzącą momenty** nazywamy funkcję zespoloną

$$M(t) = M_X(t) = E(e^{tx})$$

zatem dla zmiennej losowej skokowej o funkcji prawdopodobieństwa $P(X = x_k) = p_k$

$$M(t) = \sum_k e^{tx_k} p_k$$

a dla zmiennej losowej ciągłej o gęstości $f(x)$

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

W obu przypadkach rozwijając funkcję e^{tx} w szereg Taylora możemy funkcję tworzącą momenty zapisać w postaci

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} m_k$$

zatem

$$m_k = \frac{d^k M(t)}{dt^k} \Big|_{t=0}$$

co wyjaśnia nazwę rozpatrywanej funkcji.

Uwaga.

Między funkcją tworzącą momenty a funkcją tworzącą zachodzi zależność

$$M(t) = \Psi(e^t)$$

(dla zmiennej losowej o nieujemnych wartościach całkowitych).

Dodatek 3. Tablica rozkładu Poissona i tablica skumulowanego rozkładu Poissona.

Poisson-f.prawdopodobieństwa

alfa	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0,01		0,9900	0,0099	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,05		0,9512	0,0476	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1		0,9048	0,0905	0,0045	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,2		0,8187	0,1637	0,0164	0,0011	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,3		0,7408	0,2222	0,0333	0,0033	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,4		0,6703	0,2681	0,0536	0,0072	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,5		0,6065	0,3033	0,0758	0,0126	0,0016	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,6		0,5488	0,3293	0,0988	0,0198	0,0030	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,7		0,4966	0,3476	0,1217	0,0284	0,0050	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,8		0,4493	0,3595	0,1438	0,0383	0,0077	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,9		0,4066	0,3659	0,1647	0,0494	0,0111	0,0020	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1		0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,1		0,3329	0,3662	0,2014	0,0738	0,0203	0,0045	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,2		0,3012	0,3614	0,2169	0,0867	0,0260	0,0062	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,3		0,2725	0,3543	0,2303	0,0998	0,0324	0,0084	0,0018	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,4		0,2466	0,3452	0,2417	0,1128	0,0395	0,0111	0,0026	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,5		0,2231	0,3347	0,2510	0,1255	0,0471	0,0141	0,0035	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,6		0,2019	0,3230	0,2584	0,1378	0,0551	0,0176	0,0047	0,0011	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,7		0,1827	0,3106	0,2640	0,1496	0,0636	0,0216	0,0061	0,0015	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,8		0,1653	0,2975	0,2678	0,1607	0,0723	0,0260	0,0078	0,0020	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,9		0,1496	0,2842	0,2700	0,1710	0,0812	0,0309	0,0098	0,0027	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2		0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034	0,0009	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,2		0,1108	0,2438	0,2681	0,1966	0,1082	0,0476	0,0174	0,0055	0,0015	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,4		0,0907	0,2177	0,2613	0,2090	0,1254	0,0602	0,0241	0,0083	0,0025	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,5		0,0821	0,2052	0,2565	0,2138	0,1336	0,0668	0,0278	0,0099	0,0031	0,0009	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,6		0,0743	0,1931	0,2510	0,2176	0,1414	0,0735	0,0319	0,0118	0,0038	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,8		0,0608	0,1703	0,2384	0,2225	0,1557	0,0872	0,0407	0,0163	0,0057	0,0018	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3		0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1680	0,1008	0,0504	0,0216	0,0081	0,0027	0,0008	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
3,5		0,0302	0,1057	0,1850	0,2158	0,1888	0,1322	0,0771	0,0385	0,0169	0,0066	0,0023	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000
4		0,0183	0,0733	0,1465	0,1954	0,1954	0,1563	0,1042	0,0595	0,0298	0,0132	0,0053	0,0019	0,0006	0,0002	0,0001	0,0000
5		0,0067	0,0337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1755	0,1462	0,1044	0,0653	0,0363	0,0181	0,0082	0,0034	0,0013	0,0005	0,0002
8		0,0003	0,0027	0,0107	0,0286	0,0573	0,0916	0,1221	0,1396	0,1396	0,1241	0,0993	0,0722	0,0481	0,0296	0,0169	0,0090
10		0,0000	0,0005	0,0023	0,0076	0,0189	0,0378	0,0631	0,0901	0,1126	0,1251	0,1251	0,1137	0,0948	0,0729	0,0521	0,0347

Poisson p-stwo skumulowane (dystrybuanta prawostronnie ciągła)

alfa	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0,01		0,9900	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,05		0,9512	0,9988	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1		0,9048	0,9953	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2		0,8187	0,9825	0,9989	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,3		0,7408	0,9631	0,9964	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,4		0,6703	0,9384	0,9921	0,9992	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,5		0,6065	0,9098	0,9856	0,9982	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,6		0,5488	0,8781	0,9769	0,9966	0,9996	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,7		0,4966	0,8442	0,9659	0,9942	0,9992	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,8		0,4493	0,8088	0,9526	0,9909	0,9986	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,9		0,4066	0,7725	0,9371	0,9865	0,9977	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1		0,3679	0,7358	0,9197	0,9810	0,9963	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,1		0,3329	0,6990	0,9004	0,9743	0,9946	0,9990	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,2		0,3012	0,6626	0,8795	0,9662	0,9923	0,9985	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,3		0,2725	0,6268	0,8571	0,9569	0,9893	0,9978	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,4		0,2466	0,5918	0,8335	0,9463	0,9857	0,9968	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,5		0,2231	0,5578	0,8088	0,9344	0,9814	0,9955	0,9991	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,6		0,2019	0,5249	0,7834	0,9212	0,9763	0,9940	0,9987	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,7		0,1827	0,4932	0,7572	0,9068	0,9704	0,9920	0,9981	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,8		0,1653	0,4628	0,7306	0,8913	0,9636	0,9896	0,9974	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,9		0,1496	0,4337	0,7037	0,8747	0,9559	0,9868	0,9966	0,9992	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2		0,1353	0,4060	0,6767	0,8571	0,9473	0,9834	0,9955	0,9989	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,2		0,1108	0,3546	0,6227	0,8194	0,9275	0,9751	0,9925	0,9980	0,9995	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,4		0,0907	0,3084	0,5697	0,7787	0,9041	0,9643	0,9884	0,9967	0,9991	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,5		0,0821	0,2873	0,5438	0,7576	0,8912	0,9580	0,9858	0,9958	0,9989	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,6		0,0743	0,2674	0,5184	0,7360	0,8774	0,9510	0,9828	0,9947	0,9985	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,8		0,0608	0,2311	0,4695	0,6919	0,8477	0,9349	0,9756	0,9919	0,9976	0,9993	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3		0,0498	0,1991	0,4232	0,6472	0,8153	0,9161	0,9665	0,9881	0,9962	0,9989	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3,5		0,0302	0,1359	0,3208	0,5366	0,7254	0,8576	0,9347	0,9733	0,9901	0,9967	0,9990	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
4		0,0183	0,0916	0,2381	0,4335	0,6288	0,7851	0,8893	0,9489	0,9786	0,9919	0,9972	0,9991	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000
5		0,0067	0,0404	0,1247	0,2650	0,4405	0,6160	0,7622	0,8666	0,9319	0,9682	0,9863	0,9945	0,9980	0,9993	0,9998	0,9999
8		0,0003	0,0030	0,0138	0,0424	0,0996	0,1912	0,3134	0,4530	0,5925	0,7166	0,8159	0,8881	0,9362	0,9658	0,9827	0,9918
10		0,0000	0,0005	0,0028	0,0103	0,0293	0,0671	0,1301	0,2202	0,3328	0,4579	0,5830	0,6968	0,7916	0,8645	0,9165	0,9513

L.Kowalski 15.04.2005