Procesy stochastyczne

WYKŁAD 5

Proces Poissona.

Proces $\{N(t),\ t \geq 0\}$ nazywamy **procesem zliczającym** jeśli N(t) oznacza całkowitą liczbę badanych zdarzeń zaobserwowanych do chwili t.

Proces zliczający musi spełniać warunki:

1) $N(t) \geq 0$,
2) $N(t)$ przyjmuje tylko całkowite własności,
3) Jeśli $s < t$ to $N(s) \leq N(t)$,
4) Dla $s < t$ $N(t) - N(s)$ jest równe liczbie zdarzeń zaobserwowanych w przedziale $(s, t]$,

Proces zliczający jest procesem o **przyrostach niezależnych** jeśli rozkłady liczby zdarzeń obserwowanych w rozłącznych przedziałach czasu są niezależne, np. $N(t)$ nie zależy od $N(t + s) - N(t)$.

Proces zliczający jest **procesem jednorodnym w czasie (stacjonarnym)** gdy rozkład liczby zaobserwowanych zdarzeń w przedziale czasu zależy tylko od długości tego przedziału, np. $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$ ma taki sam rozkład jak $N(t_2) - N(t_1)$.

Proces Poissona jest jednorodnym procesem Markowa o przyrostach niezależnych

$$[0] \xrightarrow{\lambda} [1] \xrightarrow{\lambda} [2] \xrightarrow{\lambda} [3] \xrightarrow{\lambda} \cdots$$

o rozkładzie (por. przykład z poprzedniego wykładu):

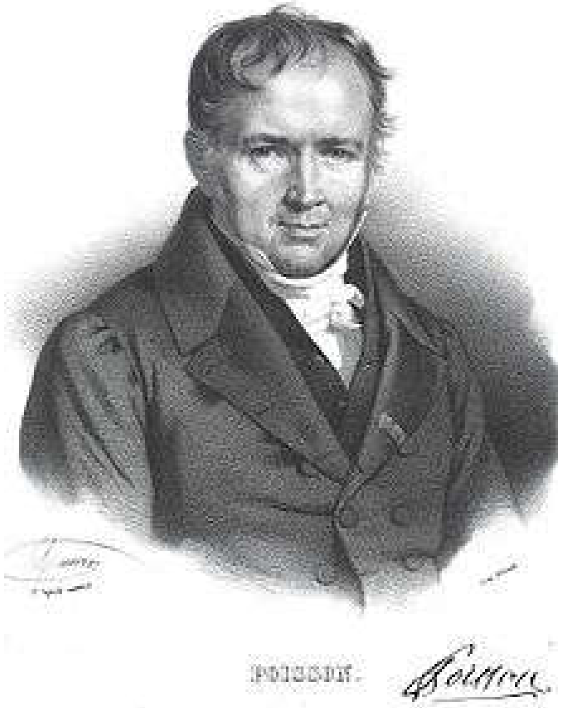
$$P(X_0 = 0) = 1$$

$$P(X_t = k) = P(X_{\tau+t} - X_\tau = k) =$$

$$= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

k = 0, 1, ...

λ - intensywność procesu, λ > 0



Siméon Denis Poisson (1781–1840), francuski mechanik teoretyk, fizyk i matematyk. W matematyce zajmował się całkami oznaczonymi, równaniami różnicowymi i różniczkowymi oraz teorią prawdopodobieństwa.

parametry procesu Poissona:

$m(t) = \lambda t \qquad t \geq 0,$

$K(s, t) = \lambda \min(s, t)$

Przykłady zjawisk modelowanych procesem Poissona.

- liczba wyemitowanych cząstek przez ciało promieniotwórcze w pewnym przedziale czasu,
- liczba awarii systemu komunikacyjnego w pewnym przedziale czasu,
- liczba zgłoszeń do portalu internetowego w pewnym przedziale czasu,

Uwaga.

$$\boxed{\begin{aligned} & p_{ij}(t) = P(X_{\tau+t} = j \mid X_\tau = i) = \\ & = P(X_{\tau+t} - X_\tau = j - i) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} \end{aligned}}$$ dla j ≥ i,

$$\boxed{p_{ij}(t) = 0}$$ dla j < i,

Problem.

T_1 - czas pierwszego zgłoszenia,

T_n - czas między n - 1 a n-tym zgłoszeniem,

Wyznaczyć rozkład tych zmiennych losowych.

Rozwiązanie.
$\{T_1 > t\}$ oznacza zdarzenie, że nie było zgłoszenia w $[0, t]$,

$$P(T_1 > t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

zatem $P(T_1 < t) = 1 - e^{-\lambda t} = F(t)$

(dystrybuanta **rozkładu wykładniczego**).

Następnie zauważmy, że z niezależności wynika

$$P(T_2 > t | T_1 = s) = P\{brak\ zgłoszeń\ w(s, s+t] | T_1 = s\} =$$

$$= P\{brak\ zgłoszeń\ w(s, s+t]\} = e^{-\lambda t}$$

Zatem T_2 też ma rozkład wykładniczy i jest niezależny od T_1.

Itd.

Wniosek.

Odstępy czasu między kolejnymi zmianami stanów w jednorodnym procesie Poissona są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym **rozkładzie wykładniczym**:

$$P(T < t) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & dla \quad t > 0 \end{cases}$$

Twierdzenie.
Suma skończonej liczby niezależnych procesów Poissona jest procesem Poissona, którego parametr jest **sumą** parametrów poszczególnych procesów.

Generowanie rozkładu wykładniczego.
x – liczby o rozkładzie jednostajnym w (0, 1),
y = $F^{-1}(x)$ rozkład wykładniczy
gdzie F to dystrybuanta rozkładu wykładniczego

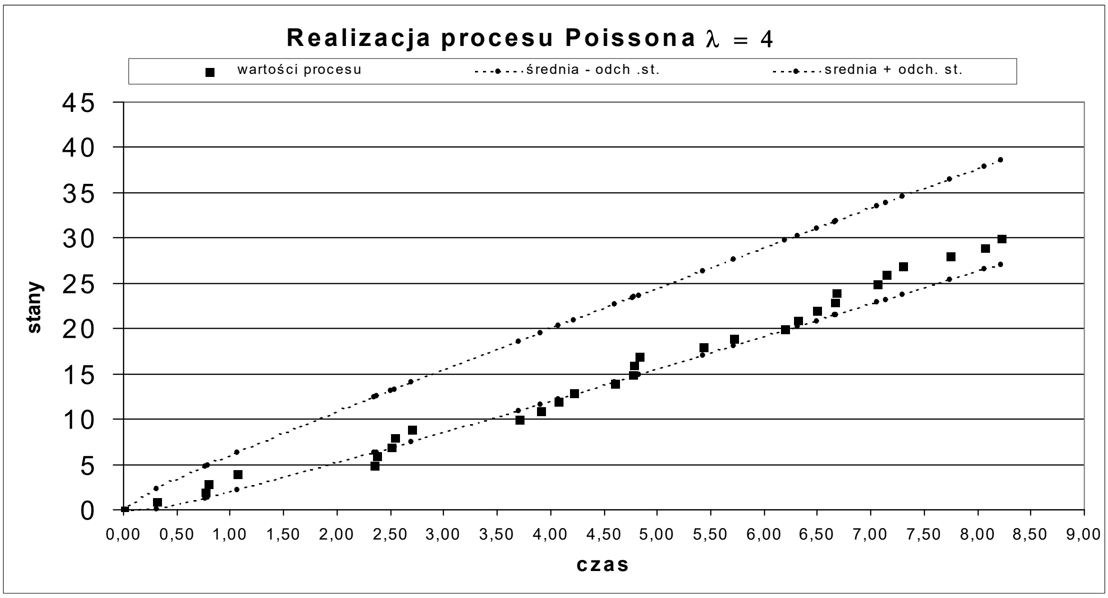
$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$F^{-1}(x) = ?$

$$y = F^{-1}(x) = -[\ln(1-x)]/a$$

Przykładowa realizacja procesu Poissona dla $\lambda = 4$.

czas	stan	$\lambda t - \sqrt{\lambda t}$	$\lambda t + \sqrt{\lambda t}$
0,00	0	0,00	0,00
0,08	1	-0,24	0,91
0,33	2	0,18	2,48
0,41	3	0,36	2,93
0,76	4	1,29	4,77
1,13	5	2,38	6,63
1,29	6	2,90	7,46
1,45	7	3,39	8,20
1,61	8	3,90	8,97
1,64	9	4,01	9,13
1,77	10	4,43	9,76
2,47	11	6,74	13,03
2,85	12	8,03	14,79
3,02	13	8,59	15,54
3,07	14	8,78	15,79
3,61	15	10,63	18,22
3,81	16	11,32	19,12
3,88	17	11,59	19,47
4,00	18	11,99	19,99
4,07	19	12,26	20,33
5,16	20	16,11	25,20
5,88	21	18,67	28,37
5,96	22	18,96	28,73
6,02	23	19,16	28,97
6,39	24	20,50	30,61
6,94	25	22,50	33,03
7,28	26	23,71	34,50
7,41	27	24,18	35,07
7,45	28	24,35	35,27
7,59	29	24,85	35,87
8,11	30	26,74	38,13


Realizacja procesu Poissona λ = 4
wartości procesu
średnia - odch .st.
srednia + odch. st.
stany
czas
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
0,00 0,50 1,00 1,50 2,00 2,50 3,00 3,50 4,00 4,50 5,00 5,50 6,00 6,50 7,00 7,50 8,00 8,50 9,00

Przykład.

Strumień awarii pewnego systemu jest modelowany procesem Poissona. Wiadomo, że przeciętnie jedna awaria zdarza się raz na 50 godzin (zatem intensywność tego procesu wynosi $\lambda = 0{,}02$ awarii/godz.).

a) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najwyżej jednej awarii w ciągu 20 godzin,
b) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej dwóch awarii w ciągu 20 godzin,
c) obliczyć prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy w ciągu 20 godzin,
d) obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi awariami będzie większy niż 100 godzin,
e) obliczyć wartość oczekiwaną bezawaryjnego czasu pracy tego systemu.

Rozrzedzanie strumienia Poissona.

Jaki jest rozkład przedziału czasu między n-tym i n+m tym zgłoszeniem?
Przedział ten jest sumą m przedziałów o rozkładzie wykładniczym.

Rozkład Erlanga

a > 0, $m \in N$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

(szczególny przypadek rozkładu gamma)

Dla m = 1 jest to rozkład wykładniczy.

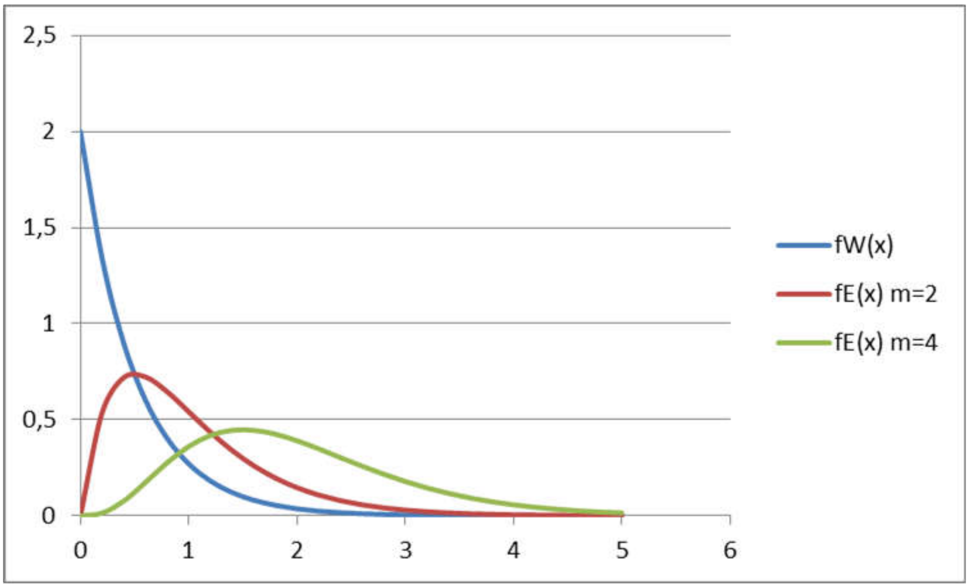
Uwaga. Suma m niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem a ma rozkład Erlanga.

$$EX = m/a; \qquad D^2X = m/a^2$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{m}} \qquad k = \frac{6}{m} + 3$$

$$d = (m - 1)/a$$

$$m_k = \frac{m(m+1)...(m+k-1)}{a^k}$$



Porównanie rozkładu wykładniczego i Erlanga (a=2, m=2, m=4)

Proces urodzeń i śmierci.

λ_i - intensywności urodzeń, i = 0, 1, ...

μ_j - intensywności śmierci, j = 1, 2, ...

$$[0] \underset{\mu_1}{\overset{\lambda_0}{\rightleftarrows}} [1] \underset{\mu_2}{\overset{\lambda_1}{\rightleftarrows}} [2] \underset{\mu_3}{\overset{\lambda_2}{\rightleftarrows}} \ldots.$$

Dalej rozpatrujemy proces urodzeń i śmierci ze skończoną liczbą stanów równą N.
Niech $P(t) = [p_{ij}(t)]$ stochastyczna macierz przejścia $i, j = 0, 1, ..., N$.

Proces urodzeń i śmierci jest jednorodnym procesem Markowa.

Dla procesu urodzeń i śmierci macierz intensywności ma postać:

$$\Lambda=\left[\lambda_{ij}\right]=\begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{N-1} & -(\lambda_{N-1}+\mu_{N-1}) & \lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_N & -\mu_N \end{bmatrix}$$

wtedy układ równań Kołmogorowa można zapisać w postaci wektorowej:

$$\frac{d}{dt}p(t) = p(t)\Lambda$$

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$p(t) = p(0)e^{\Lambda t}$$

gdzie $e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \frac{t^2}{2!}\Lambda^2 + \frac{t^3}{3!}\Lambda^3 + ...$

Uwaga.

Proces urodzeń i śmierci ma dla intensywności dodatnich rozkład graniczny postaci:

$$\Pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_i} \Pi_0 \text{、} \qquad i = 1, 2, ..., N$$

gdzie

$$\Pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_i}}$$

Wzory te można zapisać w postaci:

$$\Pi_i = \Pi_0 \prod_{k=1}^{i} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \text{、} \qquad i = 1, 2, ..., N$$

gdzie

$$\Pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} \prod_{k=1}^{i} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}} = \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \prod_{k=1}^{i} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right)^{-1}$$

czyli

$$\Pi_i = \prod_{k=1}^{i} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \prod_{k=1}^{i} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right)^{-1} \qquad i = 1, 2, ..., N$$

Uwaga

Wzory te można stosować również dla nieskończenie wielu stanów, gdy szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{i}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}$$

jest zbieżny.

Dowód.

Zastosujemy sposób pierwszy. Rozpatrzmy równanie $\Pi\Lambda = 0$

$$[\Pi_0 \ \ \Pi_1 \ \ \cdots \ \ \Pi_N]\begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{N-1} & -(\lambda_{N-1}+\mu_{N-1}) & \lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_N & -\mu_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

czyli układ równań

$$\begin{cases} -\lambda_0\Pi_0 + \mu_1\Pi_1 = 0 \\ \lambda_0\Pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\Pi_1 + \mu_2\Pi_2 = 0 \\ \lambda_1\Pi_1 - (\lambda_2 + \mu_2)\Pi_2 + \mu_3\Pi_3 = 0 \\ \cdots \\ \lambda_{n-1}\Pi_{n-1} - \mu_n\Pi_n = 0 \end{cases}$$

Jeśli przyjąć, że $-\lambda_0\Pi_0 + \mu_1\Pi_1 = z_1$; $-\lambda_1\Pi_1 + \mu_2\Pi_2 = z_2$; itd. to

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 - z_1 = 0 \\ z_3 - z_2 = 0 \\ \cdots \\ z_n = 0 \end{cases}$$

stąd $z_i = 0$ i przyjmując Π_0 jako parametr mamy z warunków unormowania poszukiwane wzory.

Przykład.
W zakładzie pracują maszyny, z których każda psuje się niezależnie od pozostałych z intensywnością $\lambda = 3$ maszyny/godz. Maszyny te są naprawiane przez robotników. Niech X(t) oznacza liczbę zepsutych maszyn w chwili t. Rozpatrzmy następujące przypadki:

1) są 3 maszyny i 1 robotnik pracujący z intensywnością 1maszyna/godz.
2) są 3 maszyny i 2 robotników pracujących bez współpracy z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
3) są 4 maszyny i 2 robotników pracujących bez współpracy z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
4) są 3 maszyny i 3 robotników pracujących z pełną współpracą z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
5) są 3 maszyny i 2 robotników pracujących z pełną współpracą z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
6) są 3 maszyny i 2 robotników pracujących z ograniczoną współpracą (z intensywnością 1maszyna/godz. każdy gdy pracują osobno

i z intensywnością 1,5maszyny/godz. gdy pracują razem).

W każdym przypadku:

a) narysować graf,
b) wyznaczyć prawdopodobieństwa graniczne,
c) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że żaden robotnik nie pracuje,
d) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że przynajmniej jedna maszyna jest sprawna,
e) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że przynajmniej jedna maszyna czeka na naprawę,
f) obliczyć średnia liczbę zepsutych maszyn,
g) obliczyć średnia liczbę zajętych robotników.

Przykład

Zgłoszenia do systemu informatycznego napływają z intensywnością λ i są obsługiwane (jeden kanał) z intensywnością μ. Gdy kanał jest zajęty zgłoszenia tworzą kolejkę (długość kolejki – nieograniczona).

X(t) liczba zgłoszeń w systemie w chwili t.

Jest to proces urodzeń i śmierci.

$$[0] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [2] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \ldots.$$

szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{i}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} = \sum_{i=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{i}\frac{\lambda}{\mu} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i}$$

jest zbieżny, gdy λ < μ.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Zatem rozkład graniczny gdy **λ < μ** istnieje i

$$\Pi_0 = \frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}} = 1-\frac{\lambda}{\mu} \qquad \Pi_i = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$$

Przykład

Rozpatrzmy proces którego graf jest następujący.

$$[0] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [2] \underset{3\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \ldots.$$

Jest to proces urodzeń i śmierci.

szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{i}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}=\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{i}\frac{\lambda}{k\mu}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$$

jest zbieżny.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i}=e^{\frac{\lambda}{\mu}}-1$$

Zatem rozkład graniczny istnieje i

$$\Pi_0=e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \qquad \Pi_i=e^{-\frac{\lambda}{\mu}}\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i}$$

Jest to rozkład Poissona.

Dodatek Tablica rozkładu Poissona i tablica skumulowanego rozkładu Poissona.

Poisson-f.prawdopodobieństwa nieskumulowana

alfa n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0,01	0,9900	0,0099	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,05	0,9512	0,0476	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,9048	0,0905	0,0045	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	0,8187	0,1637	0,0164	0,0011	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,3	0,7408	0,2222	0,0333	0,0033	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,4	0,6703	0,2681	0,0536	0,0072	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,5	0,6065	0,3033	0,0758	0,0126	0,0016	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,6	0,5488	0,3293	0,0988	0,0198	0,0030	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,7	0,4966	0,3476	0,1217	0,0284	0,0050	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,8	0,4493	0,3595	0,1438	0,0383	0,0077	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,9	0,4066	0,3659	0,1647	0,0494	0,0111	0,0020	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,1	0,3329	0,3662	0,2014	0,0738	0,0203	0,0045	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,2	0,3012	0,3614	0,2169	0,0867	0,0260	0,0062	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,3	0,2725	0,3543	0,2303	0,0998	0,0324	0,0084	0,0018	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,4	0,2466	0,3452	0,2417	0,1128	0,0395	0,0111	0,0026	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,5	0,2231	0,3347	0,2510	0,1255	0,0471	0,0141	0,0035	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,6	0,2019	0,3230	0,2584	0,1378	0,0551	0,0176	0,0047	0,0011	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,7	0,1827	0,3106	0,2640	0,1496	0,0636	0,0216	0,0061	0,0015	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,8	0,1653	0,2975	0,2678	0,1607	0,0723	0,0260	0,0078	0,0020	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,9	0,1496	0,2842	0,2700	0,1710	0,0812	0,0309	0,0098	0,0027	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034	0,0009	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,2	0,1108	0,2438	0,2681	0,1966	0,1082	0,0476	0,0174	0,0055	0,0015	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,4	0,0907	0,2177	0,2613	0,2090	0,1254	0,0602	0,0241	0,0083	0,0025	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,5	0,0821	0,2052	0,2565	0,2138	0,1336	0,0668	0,0278	0,0099	0,0031	0,0009	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,6	0,0743	0,1931	0,2510	0,2176	0,1414	0,0735	0,0319	0,0118	0,0038	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,8	0,0608	0,1703	0,2384	0,2225	0,1557	0,0872	0,0407	0,0163	0,0057	0,0018	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1680	0,1008	0,0504	0,0216	0,0081	0,0027	0,0008	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
3,5	0,0302	0,1057	0,1850	0,2158	0,1888	0,1322	0,0771	0,0385	0,0169	0,0066	0,0023	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000
4	0,0183	0,0733	0,1465	0,1954	0,1954	0,1563	0,1042	0,0595	0,0298	0,0132	0,0053	0,0019	0,0006	0,0002	0,0001	0,0000
5	0,0067	0,0337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1755	0,1462	0,1044	0,0653	0,0363	0,0181	0,0082	0,0034	0,0013	0,0005	0,0002
8	0,0003	0,0027	0,0107	0,0286	0,0573	0,0916	0,1221	0,1396	0,1396	0,1241	0,0993	0,0722	0,0481	0,0296	0,0169	0,0090
10	0,0000	0,0005	0,0023	0,0076	0,0189	0,0378	0,0631	0,0901	0,1126	0,1251	0,1251	0,1137	0,0948	0,0729	0,0521	0,0347

Poisson p-stwo skumulowane (dystrybuanta prawostronnie ciągła)

alfa n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0,01	0,9900	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,05	0,9512	0,9988	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,9048	0,9953	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	0,8187	0,9825	0,9989	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,3	0,7408	0,9631	0,9964	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,4	0,6703	0,9384	0,9921	0,9992	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,5	0,6065	0,9098	0,9856	0,9982	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,6	0,5488	0,8781	0,9769	0,9966	0,9996	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,7	0,4966	0,8442	0,9659	0,9942	0,9992	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,8	0,4493	0,8088	0,9526	0,9909	0,9986	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,9	0,4066	0,7725	0,9371	0,9865	0,9977	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,3679	0,7358	0,9197	0,9810	0,9963	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,1	0,3329	0,6990	0,9004	0,9743	0,9946	0,9990	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,2	0,3012	0,6626	0,8795	0,9662	0,9923	0,9985	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,3	0,2725	0,6268	0,8571	0,9569	0,9893	0,9978	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,4	0,2466	0,5918	0,8335	0,9463	0,9857	0,9968	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,5	0,2231	0,5578	0,8088	0,9344	0,9814	0,9955	0,9991	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,6	0,2019	0,5249	0,7834	0,9212	0,9763	0,9940	0,9987	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,7	0,1827	0,4932	0,7572	0,9068	0,9704	0,9920	0,9981	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,8	0,1653	0,4628	0,7306	0,8913	0,9636	0,9896	0,9974	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,9	0,1496	0,4337	0,7037	0,8747	0,9559	0,9868	0,9966	0,9992	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0,1353	0,4060	0,6767	0,8571	0,9473	0,9834	0,9955	0,9989	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,2	0,1108	0,3546	0,6227	0,8194	0,9275	0,9751	0,9925	0,9980	0,9995	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,4	0,0907	0,3084	0,5697	0,7787	0,9041	0,9643	0,9884	0,9967	0,9991	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,5	0,0821	0,2873	0,5438	0,7576	0,8912	0,9580	0,9858	0,9958	0,9989	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,6	0,0743	0,2674	0,5184	0,7360	0,8774	0,9510	0,9828	0,9947	0,9985	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,8	0,0608	0,2311	0,4695	0,6919	0,8477	0,9349	0,9756	0,9919	0,9976	0,9993	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0,0498	0,1991	0,4232	0,6472	0,8153	0,9161	0,9665	0,9881	0,9962	0,9989	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3,5	0,0302	0,1359	0,3208	0,5366	0,7254	0,8576	0,9347	0,9733	0,9901	0,9967	0,9990	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
4	0,0183	0,0916	0,2381	0,4335	0,6288	0,7851	0,8893	0,9489	0,9786	0,9919	0,9972	0,9991	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000
5	0,0067	0,0404	0,1247	0,2650	0,4405	0,6160	0,7622	0,8666	0,9319	0,9682	0,9863	0,9945	0,9980	0,9993	0,9998	0,9999
8	0,0003	0,0030	0,0138	0,0424	0,0996	0,1912	0,3134	0,4530	0,5925	0,7166	0,8159	0,8881	0,9362	0,9658	0,9827	0,9918
10	0,0000	0,0005	0,0028	0,0103	0,0293	0,0671	0,1301	0,2202	0,3328	0,4579	0,5830	0,6968	0,7916	0,8645	0,9165	0,9513