

Procesy stochastyczne

WYKŁAD 4

Dyskretny proces Markowa

Rozpatrujemy proces stochastyczny X_t , w którym parametr t jest ciągły (zwykle $t \geq 0$).

Będziemy zakładać, że zbiór stanów jest co najwyżej przeliczalny.

Proces X_t , jest **procesem Markowa**, jeśli dla dowolnego n , dla dowolnych chwil czasu

$t_0 < t_1 < \dots < t_n$, oraz dowolnych stanów $x, y, x_0, \dots, x_n$ spełniona jest zależność:

$$\begin{aligned} P\{X_{t_n} = y \mid X_{t_{n-1}} = x, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \dots, X_{t_0} = x_0\} = \\ = P\{X_{t_n} = y \mid X_{t_{n-1}} = x\} \end{aligned}$$

Proces Markowa jest **jednorodny w czasie**, jeżeli dla dowolnych stanów x, y oraz chwil czasu $t_1 < t_2$ mamy

$$P\{X_{t_2} = y | X_{t_1} = x\} = p(x, y, t_2 - t_1)$$

co oznacza, że prawdopodobieństwo przejścia ze stanu x do stanu y w czasie od momentu t_1 do momentu t_2 zależy tylko od różnicy $t_2 - t_1$, a nie zależy od momentu wyjściowego t_1 (w szczególności może to być zawsze chwila 0).

Przyjmijmy oznaczenie

$$P\{X_{t_n} = j | X_{t_0} = i\} = p_{ij}(t),$$

gdzie $t = t_n - t_0$, $t_n > t_0$.

Niech $P(t) = [p_{ij}(t)]$ stochastyczna macierz przejścia $i, j = 0, 1, \dots, N$ (dla skończonej liczby stanów).

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & \cdots & p_{0N}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \cdots & p_{1N}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{N0}(t) & p_{N1}(t) & \cdots & p_{NN}(t) \end{bmatrix}$$

Zależność

$$p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(s)$$

nazywamy **równaniem Chapmana - Kołmogorowa**.

Wynika z niej, że

$$P(s+t) = P(s)P(t) = P(t)P(s)$$

Uzasadnienie

$$\begin{aligned} p_{ij}(s+t) &= P(X_{t+s} = j \mid X_0 = i) = \sum_k P(X_{t+s} = j, X_t = k \mid X_0 = i) = \\ &= \sum_k \frac{P(X_{t+s} = j, X_t = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \cdot \frac{P(X_t = k, X_0 = i)}{P(X_t = k, X_0 = i)} = \\ &= \sum_k P(X_{t+s} = j \mid X_t = k, X_0 = i) P(X_t = k \mid X_0 = i) = \\ &= \sum_k P(X_{t+s} = j \mid X_t = k) P(X_t = k \mid X_0 = i) = \\ &= \sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(s) \end{aligned}$$

Uwaga.

Niech $p_i(t) = P(X_t = i)$ - prawdopodobieństwo, że w chwili t proces znajdzie się w stanie i .

Takie prawdopodobieństwa nazywamy niekiedy **prawdopodobieństwami całkowitymi** lub rozkładami bezwarunkowymi (p. poniższa własność).

Wtedy

$$p_i(t) = \sum_{j=0}^N p_j(0) p_{ji}(t)$$

Niech $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_N(t))$ (rozkład procesu w chwili t)

Wtedy **$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t)$**

Zakładamy, że funkcje $p_{ij}(t)$ są ciągłe w punkcie $t = 0$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = i \\ 0 & \text{dla } j \neq i \end{cases}$$

Jakie są konsekwencje tego założenia?

Wtedy są ciągłe w dowolnym innym punkcie.

Istnieje też (choć może być nieskończona) granica

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = -p'_{ii}(0+)$$

oraz skończona granica

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{p_{ij}(t)}{t} = p'_{ij}(0+)$$

Dla wygody przyjmujemy oznaczenia

$$p'_{ij}(0+) = \lambda_{ij}$$

λ_{ij} nazywamy **intensywnościami przejścia** ze stanu i do stanu j gdy $j \neq i$,
oraz $-\lambda_{ii}$ **intensywnością wyjścia** ze stanu i .

Dalej będziemy rozpatrywali jednorodne procesy Markowa, dla których wszystkie intensywności są skończone.

Określamy **macierz intensywności** Λ o elementach równym intensywnościom λ_{ij} (dla skończonej liczby stanów)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} & \cdots & \lambda_{0N} \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{N0} & \lambda_{N1} & \cdots & \lambda_{NN} \end{bmatrix}$$

tn. $\Lambda = P'(0+)$

Własności macierzy intensywności

- a) $\lambda_{ii} \leq 0$, wyrazy na głównej przekątnej są niedodatnie,
- b) $\lambda_{ij} \geq 0$ dla $i \neq j$ wyrazy poza przekątną są nieujemne.
- c) $\sum_j \lambda_{ij} = 0$ suma wyrazów **każdego** wiersza jest równa 0

dowód c)

$$\sum_j p_{ij}(t) = 1 \quad \text{stąd} \quad \sum_{j \neq i} p_{ij}(t) + p_{ii}(t) - 1 = 0 \quad | : t$$

$$\sum_{j \neq i} \frac{p_{ij}(t)}{t} + \frac{p_{ii}(t) - 1}{t} = 0$$

$$\text{zatem} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left[\sum_{j \neq i} \frac{p_{ij}(t)}{t} + \frac{p_{ii}(t) - 1}{t} \right] = 0 \quad \text{czyli} \quad \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} + \lambda_{ii} = 0$$

Macierzą intensywności nazywamy każdą macierz Λ taką, że:

- a) elementy pozadiagonalne są nieujemne,
- b) elementy diagonalne są niedodatnie,
- c) suma elementów w **każdym** wierszu wynosi 0.

Uwaga.

Jeśli Λ jest macierzą intensywności to macierz

$$P = \frac{1}{m} \Lambda + I$$

(gdzie m to wartość bezwzględna najmniejszego elementu leżącego na głównej przekątnej macierzy Λ) jest macierzą stochastyczną.

Wartości własne macierzy intensywności mają zawsze moduł nie większy niż $2m$.

Twierdzenie.

Macierz intensywności Λ ma zawsze wartość własną równą 0.

Przyjmując $p(t) = [p_0(t), p_1(t), \dots]$ (**wektor rozkładu procesu** w momencie t) i macierz Λ możemy **układ równań Kołmogorowa** zapisać w postaci wektorowej:

$$p'(t) = p(t) \cdot \Lambda$$

czyli
$$\frac{d}{dt} p(t) = p(t) \Lambda$$

Uzasadnienie.

Ponieważ $p_k(t) = \sum_i p_i(0) p_{ik}(t)$ to po zróźniczkowaniu względem czasu otrzymamy

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = -\lambda_{jj} p_j(t) + \sum_{k \neq j} \lambda_{kj} p_k(t) \quad j = 0, 1, \dots$$

Są to poszczególne równania powyższego układu równań zapisanego w postaci wektorowej.

Jakiej postaci może być rozwiązanie tego równania?

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$p(t) = p(0)e^{\Lambda t}$$

Można też rozpatrywać równania Kołmogorowa gdy niewiadomą jest macierz $P(t)$:

$$(*) \quad P'(t) = P(t) \cdot \Lambda \quad \text{czyli} \quad \frac{d}{dt} P(t) = P(t) \Lambda$$

(równanie prospektywne)

oraz

$$(**) \quad P'(t) = \Lambda \cdot P(t) \quad \text{czyli} \quad \frac{d}{dt} P(t) = \Lambda P(t)$$

(równanie retrospektywne)

z warunkiem początkowym $P(0) = I$.

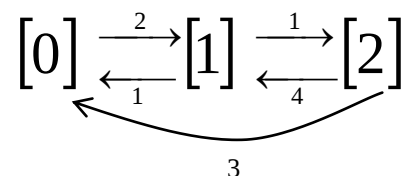
Rozwiązanie można zapisać w postaci wykładniczej $P(t) = e^{\Lambda t}$ gdzie

$$e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \frac{t^2}{2!} \Lambda^2 + \frac{t^3}{3!} \Lambda^3 + \dots$$

Przykład.

Narysować graf i wyznaczyć równania Kołmogorowa procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$



$$p(t) = [p_0(t), p_1(t), p_2(t)]$$

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t) \cdot \Lambda$$

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -2p_0(t) + p_1(t) + 3p_2(t) \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = 2p_0(t) - 2p_1(t) + 4p_2(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = p_1(t) - 7p_2(t) \end{cases}$$

W prostych przypadkach rozwiązanie układu równań

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t) \cdot \Lambda$$

można wyznaczyć wprost (przez podstawienie).

Przykład.

System może być sprawny (stan 0) lub uszkodzony (stan 1). System psuje się z intensywnością λ i jest naprawiany z intensywnością μ .

Przyjmijmy, że rozkład początkowy ma postać **[1, 0]**.

Narysujemy graf procesu i jego macierz intensywności. Rozwiązując równanie Kołmogorowa wyznaczymy wektor $p(t)$ i rozkład graniczny.

$$[0] \xrightleftharpoons[\mu]{\lambda} [1]$$

$$\Lambda = ?$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

Układ równań Kołmogorowa

Układ $p'(t) = p(t) \cdot \Lambda$ zapisujemy po współrzędnych w postaci

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p'_1(t) = \lambda p_0(t) - \mu p_1(t) \end{cases}$$

Podstawiając

$$p_1(t) = 1 - p_0(t)$$

i otrzymujemy równanie

$$p_0'(t) + (\lambda + \mu) p_0(t) = \mu$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe niejednorodne (RN)

równanie jednorodne (RJ)

$$p_0'(t) + (\lambda + \mu) p_0(t) = 0$$

Ma rozwiązanie ogólne postaci

$$p_0(t) = Ce^{-(\lambda + \mu)t} \quad \text{RORJ}$$

RSRN wyznaczamy metodą przewidywania (stała)

Otrzymamy

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{RSRN}$$

zatem

$$p_0(t) = Ce^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{RORN}$$

Uwzględniając warunek początkowy $p_0(0) = 1$

Otrzymamy $C = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

Zatem $p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}$

Oraz $p_1(t) = -\frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

Prawdopodobieństwa graniczne są równe

$$\Pi = \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu}; \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right]$$

Sprawdzenie.



solve $\{x'(t) + \lambda x(t) = \mu y(t), y'(t) + \mu y(t) = \lambda x(t), x(0) = 1, y(0) = 0\}$

Extended Keyboard Upload Examples compute input

Input:

$$\{x'(t) + \lambda x(t) = \mu y(t), y'(t) + \mu y(t) = \lambda x(t), x(0) = 1, y(0) = 0\}$$

ODE classification:

First-order system of linear differential equations

Alternate form:

$$\{x'(t) = \mu y(t) - \lambda x(t), y'(t) = \lambda x(t) - \mu y(t), x(0) = 1, y(0) = 0\}$$

Differential equation solutions:

$$x(t) = \frac{\mu + \lambda e^{-t(\lambda + \mu)}}{\lambda + \mu}$$
$$y(t) = \frac{\lambda - \lambda e^{-t(\lambda + \mu)}}{\lambda + \mu}$$

W prostych przypadkach rozwiązanie układu równań

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{A}$$

można wyznaczyć metodą przekształcenia Laplace'a.

Rozpatrzmy poprzedni przykład.

Laplace transform $\{x'(t) + \lambda x(t) = \mu y(t), y'(t) + \mu y(t) = \lambda x(t), x(0) = 1, y(0) = 0\}$



 Extended Keyboard

 Upload

 Examples

 Random

Input interpretation:

Laplace transform	equations	$\begin{aligned} x'(t) + \lambda x(t) &= \mu y(t) \\ y'(t) + \mu y(t) &= \lambda x(t) \end{aligned}$	where	$x(0) = 1$
	with respect to	t		$y(0) = 0$
	in terms of	s		

$\mathcal{L}_t[f(t)](s)$ is the Laplace transform of $f(t)$ with complex argument s

Results:

$$(\lambda + s) (\mathcal{L}_t[x(t)](s)) - \mu (\mathcal{L}_t[y(t)](s)) = 1$$

$$\lambda (\mathcal{L}_t[x(t)](s)) - (\mu + s) (\mathcal{L}_t[y(t)](s)) = 0$$

Differential equation solutions:

$$x(t) = \frac{\mu + \lambda e^{-t(\lambda + \mu)}}{\lambda + \mu}$$

$$y(t) = \frac{\lambda - \lambda e^{-t(\lambda + \mu)}}{\lambda + \mu}$$

Przykład.

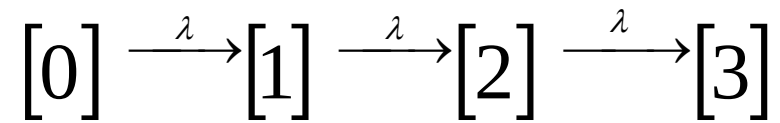
System składa się z jednego elementu podstawowego i dwóch elementów zapasowych. Element podstawowy jest obciążony i psuje się z intensywnością λ . Elementy zapasowe są nieobciążone i nie psują się. Gdy popsuje się element podstawowy jego funkcje przejmuje element zapasowy i wtedy psuje się z intensywnością λ . System przestaje pracować z chwilą popsucia się wszystkich elementów.

Niech $X(t)$ będzie procesem oznaczającym **liczbę zepsutych elementów** w czasie t .

Przyjmijmy, że rozkład początkowy ma postać **[1, 0, 0, 0]**.

Narysujemy graf procesu i jego macierz intensywności. Rozwiązując równanie Kołmogorowa wyznaczymy wektor $p(t)$ i rozkład graniczny.

Graf tego procesu



Macierz intensywności tego procesu

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Układ $p'(t) = p(t) \cdot \Lambda$ zapisujemy po współrzędnych w postaci

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda \ p_0(t) \\ p_1'(t) = \lambda \ p_0(t) - \lambda \ p_1(t) \\ p_2'(t) = \lambda \ p_1(t) - \lambda \ p_2(t) \\ p_3'(t) = \lambda \ p_2(t) \end{cases}$$

Pochodne transformujemy wg wzoru:

$$f'(t) \rightarrow s\hat{f}(s) - f(0)$$

i otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} s\hat{p}_0(s) - 1 = -\lambda \hat{p}_0(s) \\ s\hat{p}_1(s) = \lambda \hat{p}_0(s) - \lambda \hat{p}_1(s) \\ s\hat{p}_2(s) = \lambda \hat{p}_1(s) - \lambda \hat{p}_2(s) \\ s\hat{p}_3(s) = \lambda \hat{p}_2(s) \end{cases}$$

Rozwiązując otrzymany układ równań wyznaczamy oryginały (retransformaty) na podstawie zależności

$$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}$$

(w szczególności $e^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{s + \alpha}$)

$$p_0(t) = e^{-\lambda t} \quad ; \quad p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \quad ; \quad p_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t} \quad ;$$

$$p_3(t) = 1 - p_0(t) - p_1(t) - p_2(t)$$

ansform {x'(t)+λ*x(t)=0, y'(t)+λ*y(t)=λ*x(t), z'(t)+λ*z(t)=λ*y(t), w'(t)=λ*z(t), x(0)=1, y(0)=0, z(0)=0, w(0)=0} × =

 Extended Keyboard

 Upload

 Examples

 Random

Input interpretation:

Laplace transform	equations	$\begin{aligned} x'(t) + \lambda x(t) &= 0 \\ y'(t) + \lambda y(t) &= \lambda x(t) \\ z'(t) + \lambda z(t) &= \lambda y(t) \\ w'(t) &= \lambda z(t) \end{aligned}$	where	$\begin{aligned} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 0 \\ z(0) &= 0 \\ w(0) &= 0 \end{aligned}$
	with respect to	t		
	in terms of	s		

$\mathcal{L}_t[f(t)](s)$ is the Laplace transform of $f(t)$ with complex argument s

Results:

$$(\lambda + s) (\mathcal{L}_t[x(t)](s)) = 1$$

$$\lambda (\mathcal{L}_t[x(t)](s)) - (\lambda + s) (\mathcal{L}_t[y(t)](s)) = 0$$

$$\lambda (\mathcal{L}_t[y(t)](s)) - (\lambda + s) (\mathcal{L}_t[z(t)](s)) = 0$$

$$s (\mathcal{L}_t[w(t)](s)) - \lambda (\mathcal{L}_t[z(t)](s)) = 0$$

Differential equation solutions:

$$w(t) = \frac{1}{2} e^{\lambda(-t)} (\lambda^2 (-t^2) - 2 \lambda t + 2 e^{\lambda t} - 2)$$

$$x(t) = e^{\lambda(-t)}$$

$$y(t) = \lambda t e^{\lambda(-t)}$$

$$z(t) = \frac{1}{2} \lambda^2 t^2 e^{\lambda(-t)}$$

Ile wynoszą granice tych rozwiązań, gdy czas dąży do nieskończoności?

Prawdopodobieństwa graniczne są równe

$$\Pi = [0, 0, 0, 1].$$

Przykład.

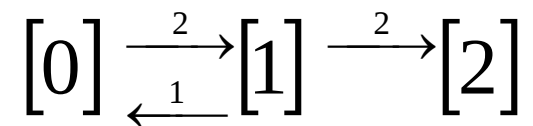
System składa się z jednego elementu podstawowego i dwóch elementów zapasowych. Element podstawowy jest obciążony i psuje się z intensywnością 1. Jeden z elementów zapasowych jest włączony i dubluje element podstawowy i psuje się z intensywnością 1. Gdy popsuje się element podstawowy lub dublujący jego funkcje przejmuje drugi element zapasowy dotychczas nie obciążony i wtedy psuje się z intensywnością 1. Uszkodzony element jest naprawiany z intensywnością 1. **System przestaje pracować z chwilą braku zapasowych elementów.**

Niech $X(t)$ będzie procesem oznaczającym **liczbę zepsutych elementów** w czasie t .

Przyjmijmy, że rozkład początkowy ma postać **$[1, 0, 0]$** .

Narysujemy graf procesu i jego macierz intensywności. Rozwiązując równanie Kołmogorowa wyznaczymy wektor $p(t)$ i rozkład graniczny.

Graf tego procesu



Macierz intensywności tego procesu

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Układ $p'(t) = p(t) \cdot \Lambda$ zapisujemy po współrzędnych w postaci

$$\begin{cases} p'_0(t) = -2 p_0(t) + p_1(t) \\ p'_1(t) = 2 p_0(t) - 3 p_1(t) \\ p'_2(t) = 2 p_1(t) \end{cases}$$

Laplace transform $\{x'(t)=-2x(t)+1y(t), y'(t)=2x(t)-3y(t), z'(t)=2y(t), x(0)=1, y(0)=0, z(0)=0\}$

 Extended Keyboard

 Upload

 Examples

 R

compute input

Input interpretation:

Laplace transform	equations	$x'(t) =$ $y(t) - 2x(t)$ $y'(t) =$ $2x(t) - 3y(t)$ $z'(t) = 2y(t)$	where	$x(0) = 1$ $y(0) = 0$ $z(0) = 0$
	with respect to	t		
	in terms of	s		

$\mathcal{L}_t[f(t)](s)$ is the Laplace transform of $f(t)$ with complex argument s

Results:

$$(s+2)(\mathcal{L}_t[x(t)](s)) - \mathcal{L}_t[y(t)](s) = 1$$

$$2(\mathcal{L}_t[x(t)](s)) - (s+3)(\mathcal{L}_t[y(t)](s)) = 0$$

$$2(\mathcal{L}_t[y(t)](s)) - s(\mathcal{L}_t[z(t)](s)) = 0$$

Differential equation solutions:

$$x(t) = \frac{1}{3} e^{-4t} (2e^{3t} + 1)$$

$$y(t) = \frac{2}{3} e^{-4t} (e^{3t} - 1)$$

$$z(t) = \frac{1}{3} (e^{-4t} - 4e^{-t} + 3)$$

Ile wynoszą granice tych rozwiązań, gdy czas dąży do nieskończoności?

Prawdopodobieństwa graniczne są równe

$$\Pi = [0, 0, 1].$$

Przykład.

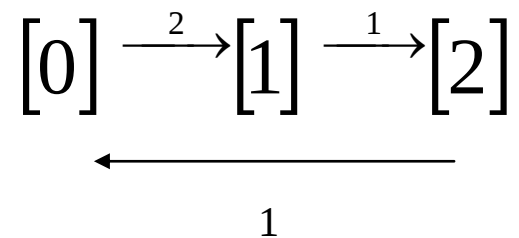
Serwer może być w trzech stanach.

0 – sprawny

1 – czeka na naprawę

2 – jest naprawiany

Graf tego procesu ma postać



Przyjmijmy, że początkowo serwer jest sprawny.

Wyznamy macierz intensywności. Rozwiązując równanie Kołmogorowa wyznaczymy wektor $p(t)$ i rozkład graniczny.

Macierz intensywności tego procesu

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Układ $p'(t) = p(t) \cdot \Lambda$ zapisujemy po współrzędnych w postaci

$$\begin{cases} p'_0(t) = -2 p_0(t) + p_2(t) \\ p'_1(t) = 2 p_0(t) - p_1(t) \\ p'_2(t) = p_1(t) - p_2(t) \end{cases}$$

Laplace transform {x'(t)=-2*x(t)+1*z(t), y'(t)=2*x(t)-1*y(t), z'(t)=1*y(t)-1*z(t), x(0)=1, y(0)=0, z(0)=0}

 Extended Keyboard

 Upload

 Examples

 Random

Input interpretation:

Laplace transform	equations	$x'(t) = z(t) - 2x(t)$ $y'(t) = 2x(t) - y(t)$ $z'(t) = y(t) - z(t)$	where	$x(0) = 1$ $y(0) = 0$ $z(0) = 0$
	with respect to	t		
	in terms of	s		

$\mathcal{L}_t[f(t)](s)$ is the Laplace transform of $f(t)$ with complex argument s

Results:

$$(s + 2) (\mathcal{L}_t[x(t)](s)) - \mathcal{L}_t[z(t)](s) = 1$$

$$2 (\mathcal{L}_t[x(t)](s)) - (s + 1) (\mathcal{L}_t[y(t)](s)) = 0$$

$$\mathcal{L}_t[y(t)](s) - (s + 1) (\mathcal{L}_t[z(t)](s)) = 0$$

Differential equation solutions:

$$x(t) = \frac{1}{5} e^{-2t} (e^{2t} - 2 \sin(t) + 4 \cos(t))$$

$$y(t) = \frac{2}{5} e^{-2t} (e^{2t} + 3 \sin(t) - \cos(t))$$

$$z(t) = \frac{2}{5} e^{-2t} (e^{2t} - 2 \sin(t) - \cos(t))$$

Ile wynoszą granice tych rozwiązań, gdy czas dąży do nieskończoności?

Prawdopodobieństwa graniczne są równe

$$\Pi = [1/5, 2/5, 2/5].$$

Rozkład graniczny (stacjonarny), ergodyczność dla procesów Markowa.

$$\Pi = p(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$$

$$\Pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)$$

Twierdzenie.

Rozkład graniczny nie zależy od rozkładu początkowego $\Leftrightarrow$ macierz intensywności Λ ma jednokrotną wartość własną równą 0.

Twierdzenie.

Jeśli $X(t)$ jest procesem Markowa o skończenie wielu stanach oraz istnieje chwila t taka, że wszystkie wyrazy **macierzy przejścia są dodatnie**, to istnieją granice prawdopodobieństw przejścia

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j$$

niezależne od stanu wyjściowego i , są dodatnie i mają sumę równą 1.

Prawdopodobieństwa te nazywamy **prawdopodobieństwami ergodycznymi**.

Proces Markowa, dla którego istnieją prawdopodobieństwa ergodyczne nazywamy *procesem ergodycznym*.

Twierdzenie.

Jeśli skończona macierz intensywności Λ ma poza przekątną tylko dodatnie elementy to proces ten jest ergodyczny i ma dodatnie prawdopodobieństwa graniczne.

Sposoby wyznaczania rozkładów granicznych.

Twierdzenie.

Rozkład graniczny Π jest niezerowym rozwiązaniem układu $\Pi\Lambda = \mathbf{0}$ spełniającym **warunek unormowania (suma składowych jest równa 1)**.

Twierdzenie.

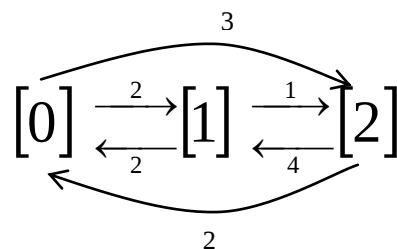
Rozkład graniczny Π można wyznaczyć za pomocą dopełnień algebraicznych M_{kk} elementów z przekątnej macierzy $-\Lambda$:

$$\Pi_j = \frac{M_{jj}}{\sum_k M_{kk}}$$

Przykład.

Narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$



Zastosujmy sposób drugi (przez dopełnienia algebraiczne)

$$-\Lambda = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

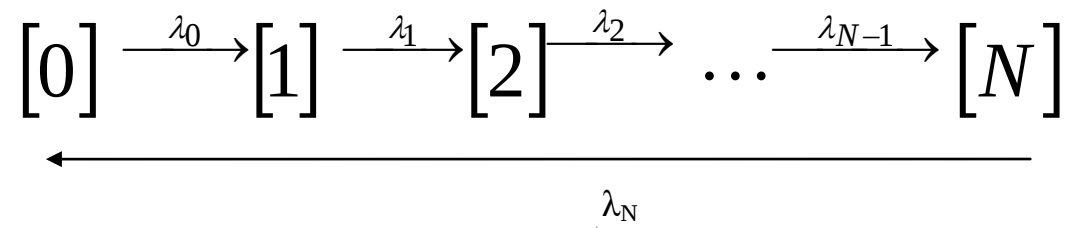
$$M_{00} = 14$$

$$M_{11} = 24$$

$$M_{22} = 11$$

odp. $[14/49; 24/49; 11/49]$

Cykliczny proces Markowa



Jak wygląda macierz intensywności tego procesu?

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_{N-1} & \lambda_{N-1} \\ \lambda_N & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\lambda_N \end{bmatrix}$$

Aby wyznaczyć rozkład graniczny zastosujemy sposób pierwszy.

Rozwiążemy układ równań $\Pi\Lambda = \mathbf{0}$ aby rozwiązanie spełniało **warunek unormowania**.

czyli układ równań

$$\begin{cases} -\lambda_0 \Pi_0 + \lambda_N \Pi_N = 0 \\ \lambda_0 \Pi_0 - \lambda_1 \Pi_1 = 0 \\ \lambda_1 \Pi_1 - \lambda_2 \Pi_2 = 0 \\ \dots \\ \lambda_{N-1} \Pi_{N-1} - \lambda_N \Pi_N = 0 \end{cases}$$

Niech Π_0 będzie parametrem. Zatem można zapisać

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_N = \frac{\lambda_0}{\lambda_N} \Pi_0 \\ \Pi_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \Pi_0 \\ \Pi_2 = \frac{\lambda_0}{\lambda_2} \Pi_0 \\ \dots \\ \Pi_{N-1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_{N-1}} \Pi_0 \end{array} \right.$$

Z warunku unormowania wyznaczmy Π_0

$$\sum_{i=0}^N \Pi_i = \Pi_0 + \Pi_0 \lambda_0 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_N} \right) = 1$$

$$\Pi_0 = \frac{1}{1 + \lambda_0 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_N} \right)} = \frac{1}{\lambda_0 \sum_{i=0}^N \frac{1}{\lambda_i}}$$

Oraz ogólnie

$$\Pi_j = \frac{1}{\lambda_0 \sum_{i=0}^N \frac{1}{\lambda_i}} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_j} = \frac{1}{\lambda_j \sum_{i=0}^N \frac{1}{\lambda_i}} ; \quad j = 0, 1, \dots, N$$

t_i – średni czas przebywania w stanie i (można go wyznaczyć na podstawie analizy statystycznej).

$t_i = 1/\lambda_i$ (większa intensywność wyjścia ze stanu i to mniejszy średni czas przebywania w stanie i)

wtedy
$$\Pi_j = \frac{t_j}{\sum_{i=0}^N t_i} \quad j = 0, 1, \dots, N$$

Przykład.

Komputer może być w czterech stanach.

0 – sprawny

1 – awaria, czeka na naprawę

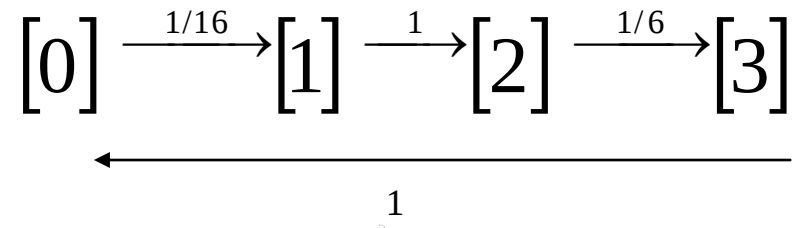
2 – jest naprawiany

3 – po naprawie (jest przywracany do pracy)

t_i – średni czas przebywania w stanie i

Niech $t_0 = 16h$, $t_1 = 1h$, $t_2 = 6h$, $t_3 = 1h$,

Graf tego procesu ma postać



Prawdopodobieństwa graniczne są równe:

Prawdopodobieństwa graniczne są równe

$$\Pi = [16/24, 1/24, 6/24, 1/24].$$

L.K. 26.03.22