Procesy stochastyczne

WYKŁAD 2 - 3

Łańcuchy Markowa

Łańcuchy Markowa to procesy "bez pamięci" w których czas i stany są zbiorami dyskretnymi.

Andrei A.Markov1856 - 1922

Rosyjski matematyk.

Przykład.

$A_1, ..., A_n$ - wierzchołki n-kąta foremnego. Punkt losowo porusza się po tych wierzchołkach.

Czy jest łańcuchem Markowa ciąg położeń punktu gdy

a) punkt porusza się w sposób zdeterminowany zgodnie z ruchem wskazówek zegara, (tak)

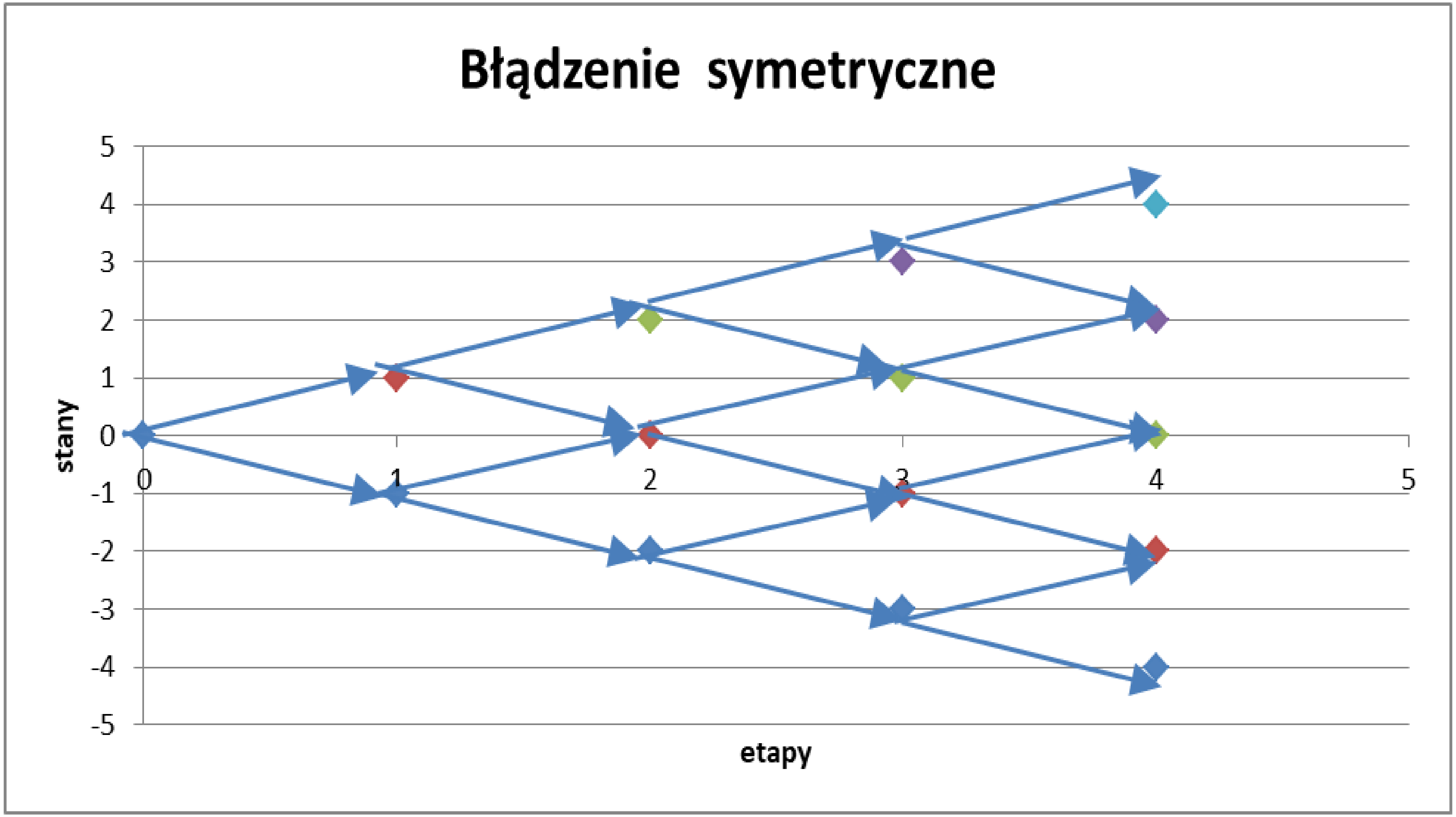
b) punkt losowo wybiera kierunek i dalej porusza się w wybranym kierunku, (nie)

Przykład

Symetryczne błądzenie przypadkowe na prostej.

Stan początkowy to 0.

Rzucamy symetryczną monetą, jeśli wypadł „orzeł” to przechodzimy o jedną jednostkę w prawo, jeśli wypadła „reszka” to przechodzimy o jedną jednostkę w lewo.

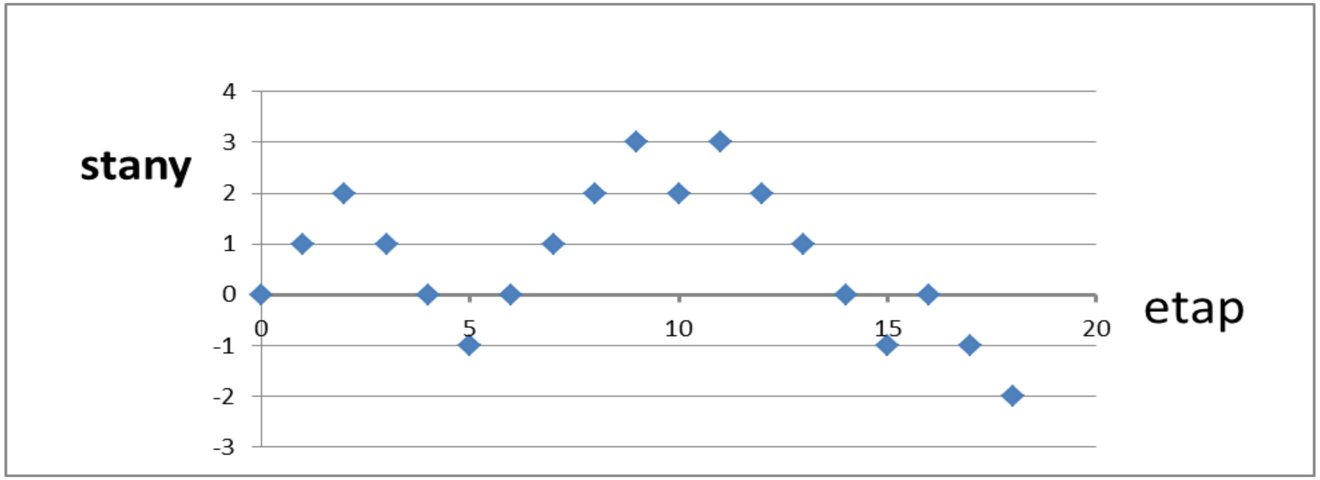


Błądzenie symetryczne
stany
etapy
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
1
2
3
4
5

Przykładowa realizacja:

(0, 1, 2, 1, 0, -1, 0, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 0, -1, 0, -1, -2, ……)

i jej obraz graficzny



Zauważmy, realizacji jest nieskończenie wiele.

Jest to proces $X = (X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots\ldots)$

Jakie są rozkłady jednowymiarowe tego procesu?

Jaka jest przestrzeń stanów tego procesu?

X_0 ma rozkład jednopunktowy.

X_1 ma rozkład:

-1	**1**
1/2	**1/2**

X_2 ma rozkład:

-2	**0**	**2**

X_3 ma rozkład:

-3	**-1**	**1**	**3**

X_4 ma rozkład:

-4	**-2**	**0**	**2**	**4**

X_1 ma rozkład:

-1	**1**
1/2	**1/2**

X_2 ma rozkład:

-2	**0**	**2**
1/4	**1/2**	**1/4**

X_3 ma rozkład:

-3	**-1**	**1**	**3**
1/8	**3/8**	**3/8**	**1/8**

X_4 ma rozkład:

-4	**-2**	**0**	**2**	**4**
1/16	**4/16**	**6/16**	**4/16**	**1/16**

Zauważmy, że prawdopodobieństwa wynikają z rozkładu dwumianowego.

Łańcuchem Markowa nazywamy proces będący ciągiem zmiennych losowych

$$X_0, X_1, ...$$

Określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej, przyjmujących wartości całkowite ze zbioru S i spełniające warunek

$$P\left(X_n = j_n \middle| X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\right) = \\ = P\left(X_n = j_n \middle| X_{n-1} = i_{n-1}\right) \qquad \bigwedge_{n} \quad \bigwedge_{i_0, \ldots, i_{n-1}, j_n \in S}$$

Zatem dla łańcucha Markowa rozkład prawdopodobieństwa warunkowego położenia w n-tym kroku zależy tylko od prawdopodobieństwa warunkowego położenia w kroku poprzednim a nie od wcześniejszych punktów trajektorii (historia).

Niech

$$p_{ij}^{(n)} = P\left(X_n = j \middle| X_{n-1} = i\right)$$

oznacza prawdopodobieństwo przejścia w n-tym kroku ze stanu i do stanu j.

Jeśli $p_{ij}^{(n)}$ nie zależą od n to łańcuch nazywamy **jednorodnym** i stosujemy zapis p_{ij} .

$$P\left(X_n = j \middle| X_{n-1} = i\right) = P\left(X_1 = j \middle| X_0 = i\right) = p_{ij}$$

Zakładając, że numery stanów są całkowite, nieujemne można prawdopodobieństwa przejść zapisać w macierzy

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \cdots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Dla łańcuchów jednorodnych powyższą macierz oznaczamy P.

Dla łańcuchów **jednorodnych** i stanów

0, 1, 2, …, N

macierz P ma postać:

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0N} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{N0} & p_{N1} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}$$

Dalej rozpatrujemy tylko łańcuchy jednorodne.

Własności macierzy prawdopodobieństw przejść:

a) $p_{ij} \geq 0$

b) suma **każdego** wiersza jest równa 1.

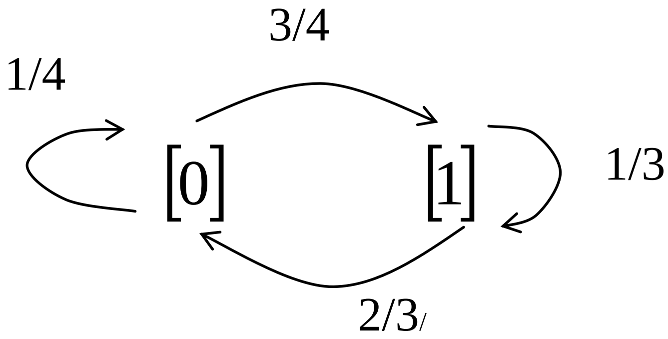
tzn. $$\forall i \quad \sum_j p_{ij} = 1$$

Każdą macierz spełniającą warunki a), b) nazywamy **macierzą stochastyczną**.

Każdej macierzy stochastycznej odpowiada graf łańcucha Markowa i odwrotnie.

Przykład

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$



Uwaga (prawdopodobieństwo trajektorii)

$$P\left(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots . X_1 = i_1, X_0 = i_0\right) =$$
$$= P\left(X_n = i_n \middle| X_{n-1} = i_{n-1}\right) P\left(X_{n-1} = i_{n-1} \middle| X_{n-2} = i_{n-2}\right) \ldots P\left(X_1 = i_1 \middle| X_0 = i_0\right) P\left(X_0 = i_0\right) =$$
$$= p_{i_{n-1} i_n} \, p_{i_{n-2} i_{n-1}} \ldots . p_{i_0 i_1} \; p_{i_0}$$

$$\bigwedge_{n} \quad \bigwedge_{i_0, \ldots, i_{n-1}, i_n \in S}$$

Wniosek (z tw. o prawdopodobieństwie całkowitym)

$$P(X_1 = i) = \sum_{j \in S} P(X_1 = i, X_0 = j) = \sum_{j \in S} P(X_1 = i | X_0 = j) P(X_0 = j) =$$

$$= \sum_{j \in S} p_{ji} P(X_0 = j)$$

$$\bigwedge_{i \in S}$$

Co oznacza, że rozkład łańcucha po pierwszym kroku uzyskamy mnożąc rozkład początkowy przez macierz P.

$$p(1)=p(0)P$$

gdzie $p(1) = (p_0(1), p_1(1), \ldots p_N(1))$, $p(0) = (p_0(0), p_1(0), \ldots p_N(0))$

Własność tą uogólnimy w dalszej części wykładu.

Uwaga.

Macierz stochastyczna (lub odpowiadający jej graf) i rozkład zmiennej losowej X_0 określają pewien łańcuch Markowa.

Własności macierzy stochastycznych są zatem ściśle związane z własnościami łańcuchów Markowa.

Własności macierzy stochastycznych.

A - dowolna macierz kwadratowa stopnia r.

Wielomianem charakterystycznym tej macierzy nazywamy wielomian

$$W(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

Równanie $W(\lambda) = 0$ nazywamy **równaniem charakterystycznym**. Pierwiastki tego równania to **wartości własne** lub pierwiastki charakterystyczne tej macierzy.

Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ - wartości własne macierzy

A o krotnościach $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $(k \leq r)$.

Równanie charakterystyczne ma r rozwiązań (mogą być zespolone, mogą być wielokrotne).

Własność:

I) suma wartości własnych (z krotnościami) jest równa śladowi macierzy tzn. sumie elementów jej przekątnej.

II) Macierz jest osobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy zero jest jej wartością własną

Przykład.

Macierz $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ma równanie charakterystyczne

$$W(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = 0$$

i wartości własne:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{-5}{12}.$$

Własności macierzy stochastycznych:

a) Wartością własną każdej macierzy stochastycznej jest $\lambda = 1$ (oznaczamy $\lambda_1 = 1$),

b) Moduły wszystkich wartości własnych dowolnej macierzy stochastycznej są mniejsze lub równe 1,

c) Średnia arytmetyczna i iloczyn dwóch macierzy stochastycznych tego samego stopnia są także macierzami stochastycznymi.

d) (tw. Dooba) istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k = A$,

Macierz A ma własność PA = AP = A = A^2 (macierz idempotentna),

Klasyfikacja macierzy stochastycznych.

	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 > 1$
$\bigwedge_{i>1} \lvert\lambda_i\rvert \neq 1$	**Regularne** (tzn. nierozkładalne i niecykliczne)	rozkładalne niecykliczne
$\bigvee_{i>1} \lvert\lambda_i\rvert = 1$	nierozkładalne cykliczne	rozkładalne cykliczne

Uwaga

W macierzy **rozkładalnej** występują diagonalne podmacierze stochastyczne (ich ilość wynosi α_1).

W macierzy **cyklicznej** w kolejnych potęgach okresowo (długość cyklu) pojawiają się bloki zerowe i dodatnie.

Łańcuchy Markowa, których macierz P jest **regularna** nazywamy **ergodycznymi**.

Tw. Frecheta (tw. Dooba dla macierzy nierozkładalnych)

Dla każdej nierozkładalnej macierzy stochastycznej P istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P^k = E,$$ (ergodyczność w sensie Cesaro)

$$E = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_r \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_r \end{bmatrix}$$ (**macierz ergodyczna**)

Macierz E ma własność

$$PE = EP = E = E^2$$

i spełnia warunki a), b) definicji macierzy stochastycznej.

Macierz E ma jednokrotną wartość własną równą 1 wartość własną 0 o krotności r-1.

Elementy macierzy E możemy wyznaczyć z warunków:

$$(P^T - I)e^T = 0, \quad \sum_{i=1}^{r} e_i = 1, \qquad \text{gdzie } e = (e_1, ..., e_r)$$

lub

$$e(P - I) = 0, \quad \sum_{i=1}^{r} e_i = 1,$$

Powyższe układy równań są oznaczone.

Dla macierzy **regularnych** tw. Dooba ma postać:

Twierdzenie.

Jeśli macierz stochastyczna P jest regularna to istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} P^n = E, \quad \text{(ergodyczność)}$$

gdzie E - macierz ergodyczna.

Joseph Doob, amerykański matematyk 1910-2004

Stochastyczne macierze regularne charakteryzuje też tzw. twierdzenie ergodyczne:

Twierdzenie.

Jeśli macierz stochastyczna P jest **regularna** to istnieje taka jej potęga w której co najmniej jedna kolumna ma wszystkie elementy dodatnie.

Przykład.

Macierz $$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

ma wartości własne $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{8}$, $\lambda_3 = \frac{-1-\sqrt{17}}{8}$

Do której klasy należy ta macierz?

Jest to macierz **regularna**.

Zauważmy też, że już jej kwadrat ma dodatnie kolumny.

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,375 & 0,438 & 0,188 \\ 0,25 & 0,125 & 0,625 \end{bmatrix}$$

WolframAlpha computational intelligence.

eigenvalues {{0.5,0,0.5},{0,0.25,0.75},{0.5,0.5,0}}

Extended Keyboard Upload Examples Random

Input:

$$\text{eigenvalues}\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Results: Approximate forms Step-by-step solution

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = \frac{1}{8}\left(-1-\sqrt{17}\right)$

$\lambda_3 = \frac{1}{8}\left(\sqrt{17}-1\right)$

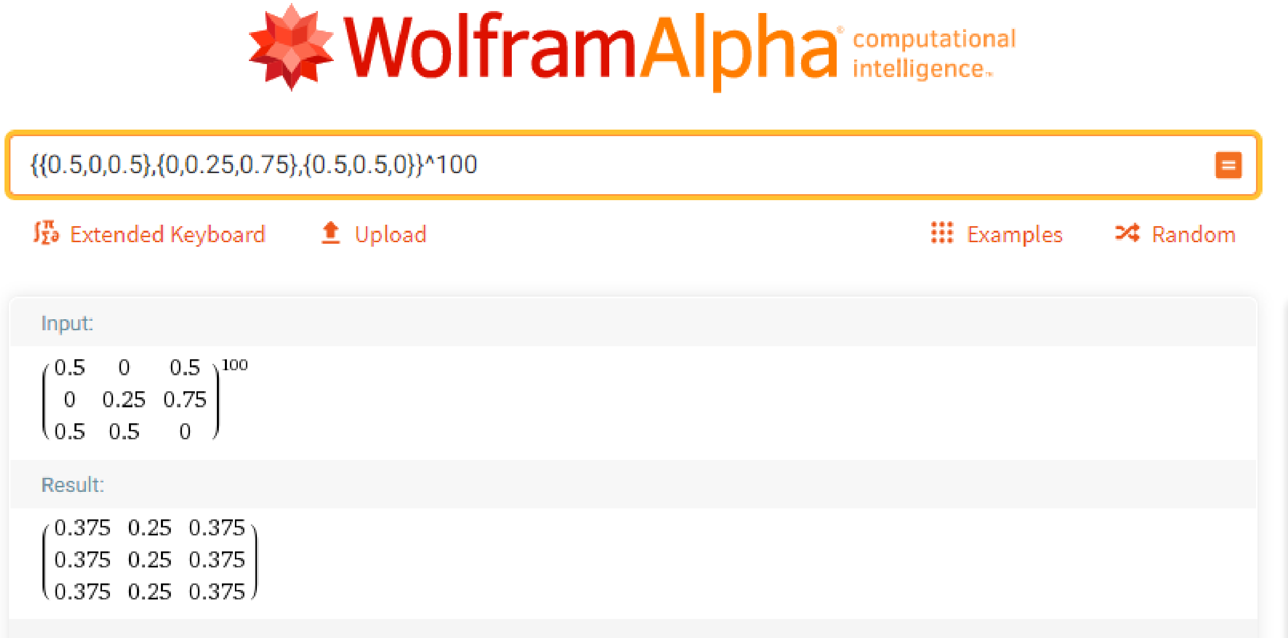
Corresponding eigenvectors: Approximate forms Step-by-step solution

$v_1 = (1, 1, 1)$

$v_2 = \left(-\frac{-1+\sqrt{17}}{3+\sqrt{17}}, -\frac{6}{3+\sqrt{17}}, 1\right)$

$v_3 = \left(-\frac{1+\sqrt{17}}{-3+\sqrt{17}}, \frac{6}{-3+\sqrt{17}}, 1\right)$

Dla macierzy **regularnej** wysokie potęgi są zbliżone do macierzy ergodycznej (tw. Dooba)



Prawdopodobieństwa przejścia po n krokach wyznaczamy obliczając P^n.

Niekiedy dobrym sposobem jest wykorzystanie **diagonalizacji** macierzy P.

Jeśli macierz P ma różne wartości własne to da się przedstawić w postaci

$$P = SJS^{-1}$$

gdzie J jest macierzą diagonalną złożoną z wartości własnych, kolumny macierzy S zbudowane są z wektorów własnych.

Wtedy $P^n = SJ^nS^{-1}$. Macierz J^n wyznaczamy obliczając n-te potęgi wartości własnych.

Przykład.

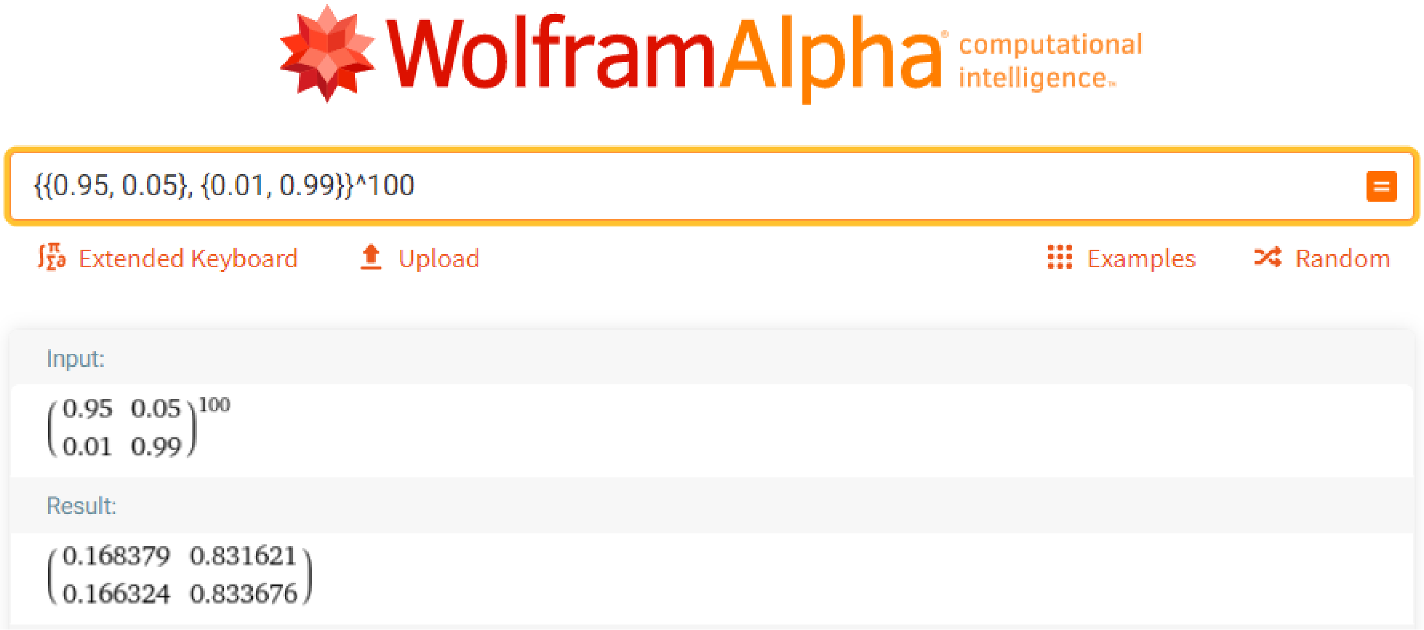
System pakietowego przesyłania zdygitalizowanej mowy pracuje w dwóch stanach 0 – cisza, 1 – rozmowa. Pakiety są generowane tylko w stanie 0. Kontrola stanów odbywa się co 0,01 s.

Proces ma macierz $P = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{bmatrix}$ i startuje ze stanu 0.

P ma wartości własne $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0{,}94$, więc jest macierzą regularną.

Jakie jest prawdopodobieństwo przejścia ze stanu 0 do 1 po 1s?

Sposób I (bezpośrednie obliczenie P^{100})



Zatem $p_{01}(100) = 0{,}831621$.

Sposób II (wykorzystanie diagonalizacji macierzy P)

Diagonalizacja

WolframAlpha computational intelligence.

diagonalize {{0.95, 0.05}, {0.01, 0.99}}

Extended Keyboard | Upload | Examples | Random

Input interpretation:

diagonalize	$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.01 & 0.99 \end{pmatrix}$

Result:

$M = S.J.S^{-1}$

where

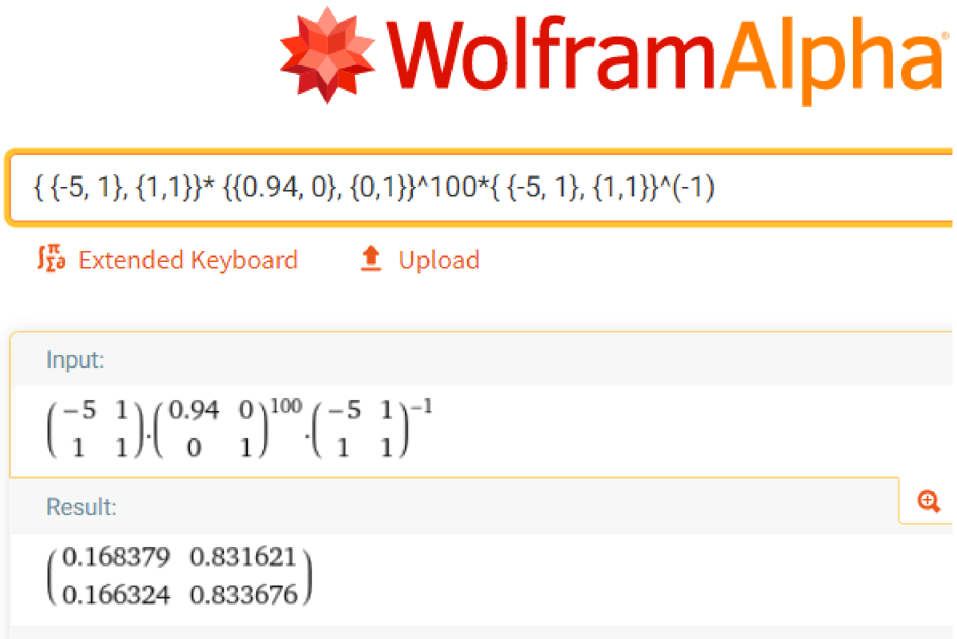
$$M = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.01 & 0.99 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0.94 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -0.166667 & 0.166667 \\ 0.166667 & 0.833333 \end{pmatrix}$$

Obliczenie P^{100}



Zatem $p_{01}(100) = 0,831621$.

Przykład.

Macierz $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ma wartości własne

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$ o krotności 2,

Do której klasy należy ta macierz?

Jest to macierz cykliczna nierozkładalna.

Macierz ta ma własność $P^n = \begin{cases} P & \text{gdy n nieparzyste} \\ P^2 & \text{gdy n parzyste} \end{cases}$.

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Przykład.

Macierz $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ma wartości własne $\lambda_1 = 1$ o krotności 3, $\lambda_2 = 0$,

$\lambda_3 = \frac{1}{12}$, więc jest macierzą niecykliczną rozkładalną.

Macierz stochastyczna rozkładalna (po ewentualnym przestawieniu wierszy i kolumn) ma bloki diagonalne, które są macierzami stochastycznymi. Wartościami własnymi macierzy P są wartości własne poszczególnych bloków. W powyższym przykładzie są trzy bloki diagonalne.

Przykład.

Macierz $P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ma wartości własne

$\lambda_1 = 1$ o krotności 2, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$, więc jest macierzą cykliczną rozkładalną.

Macierz przywiedlna.

Macierz kwadratowa *A* (nie musi być stochastyczna) stopnia *n* nazywa się **przywiedlna,** jeśli przez odpowiednie permutacje wierszy i kolumn można przekształcić P do postaci

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

gdzie B, D są kwadratowe.

W przeciwnym przypadku macierz *A* nazywa się **nieprzywiedlna.**

Własność

Macierz dodatnia jest nieprzywiedlna,

Jeśli macierz ma zerowy wiersz lub kolumnę zerową to jest przywiedlna.

Macierz diagonalna lub trójkątna jest przywiedlna.

Jeśli A jest przywiedlna to A^T też jest przywiedlna.

Własności ŁM zależne od własności macierzy P.

P - regularna, nieprzywiedlna.

$\Downarrow$

Ł. ergodyczny, rozkład gr. nie zależy od r. początkowego, jeden dodatni r. stacjonarny.

P - regularna, przywiedlna.

$\Downarrow$

Ł. ergodyczny, rozkład gr. nie zależy od r. początkowego, jeden nieujemny r. stacjonarny.

P - nierozkładalna, cykliczna, nieprzywiedlna.

$\Downarrow$

Ł. ergodyczny w sensie Cesaro,

jeden dodatni rozkład stacjonarny.

P - nierozkładalna, cykliczna, przywiedlna.

$$\Downarrow$$

Ł. ergodyczny w sensie Cesaro,

jeden nieujemny rozkład stacjonarny.

P - rozkładalna, niecykliczna.

$\Downarrow$

Ł. nieergodyczny, rozkład gr. **zależy** od rozkładu początkowego, wiele rozkładów stacjonarnych.

P - rozkładalna, cykliczna.

$\Downarrow$

Ł. nieergodyczny, rozkład gr. **zależy** od rozkładu początkowego, wiele rozkładów stacjonarnych.

Łańcuchy Markowa (jednorodne).

$p_i(n)$ - prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie i po n krokach (rozkład zmiennej losowej X_n).

$p_i(0)$ - prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie i w chwili początkowej (rozkład zmiennej losowej X_0 - rozkład początkowy).

$$\mathbf{p(n) = (p_0(n), p_1(n), \ldots\, p_N(n))}$$

$$\mathbf{p(0) = (p_0(0), p_1(0), \ldots\, p_N(0))}$$

Przykład.

Błądzenie przypadkowe z odbiciem.

$$[0] \underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} [1] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [2] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [3] \underset{1}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [4]$$

Jaką postać ma P?

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład.

Zapisz macierz P dla łańcuch a Markowa przedstawionego grafem

$$
\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[r, shift left, "1"] & {[1]} \arrow[l, shift left, "1/4"] \arrow[r, "3/4"] & {[2]} \arrow[r, shift left, "1"] & {[3]} \arrow[l, shift left, "1/2"] \arrow[r, shift left, "1/2"] & {[4]} \arrow[l, shift left, "4/5"] \arrow[loop right, "1/5"]
\end{tikzcd}
$$

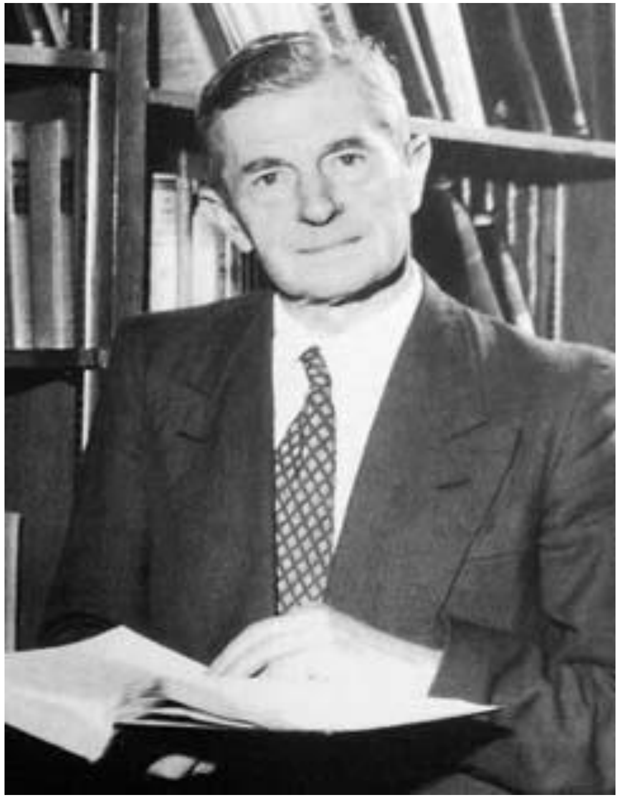
$P(n) = P^n = [p_{ij}(n)]$ - macierz prawdopodobieństw przejść od stanu i do stanu j w n krokach,

Równanie Chapmana, - Kołmogorowa:

$$p_{ij}(k+l) = \sum_{m} p_{im}(k)\, p_{mj}(l)$$

Zapis w postaci macierzowej

$$\mathrm{P}(k+l) = \mathrm{P}(k)\ \mathrm{P}(l) \quad \text{czyli} \quad \mathrm{P}^{k+l} = \mathrm{P}^{k}\ \mathrm{P}^{l}$$



Sydney Chapman (1888 – 1970) brytyjski matematyk i geofizyk.

Andriej Kołmogorow (1903-1987) – rosyjski matematyk, m.in. sformułował aksjomaty prawdopodobieństwa.

Własność:

Znając rozkład początkowy i macierz P możemy wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X_n czyli prawdopodobieństwo znalezienia się w poszczególnych stanach po n krokach:

$$\mathbf{(p_0(n), p_1(n), \ldots) = (p_0(0), p_1(0), \ldots)P^n.}$$

czyli $$\mathbf{p(n) = p(0)P^n}$$

Uzasadnienie

Wiemy, że $p(1)=p(0)P$ zatem $p(2)=p(1)P=p(0)P^2$ itd

Mamy też własność: $$\mathbf{p(m + n) = p(m)P^n}$$

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa o macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

i rozkładzie początkowym p(0) = (1, 0, 0).

Po pierwszym kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(1)=p(0)P=[1{,}0{,}0]\begin{bmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ 0 & 0{,}25 & 0{,}75\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0\end{bmatrix}=[0{,}5;0;0{,}5]$$

Po drugim kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

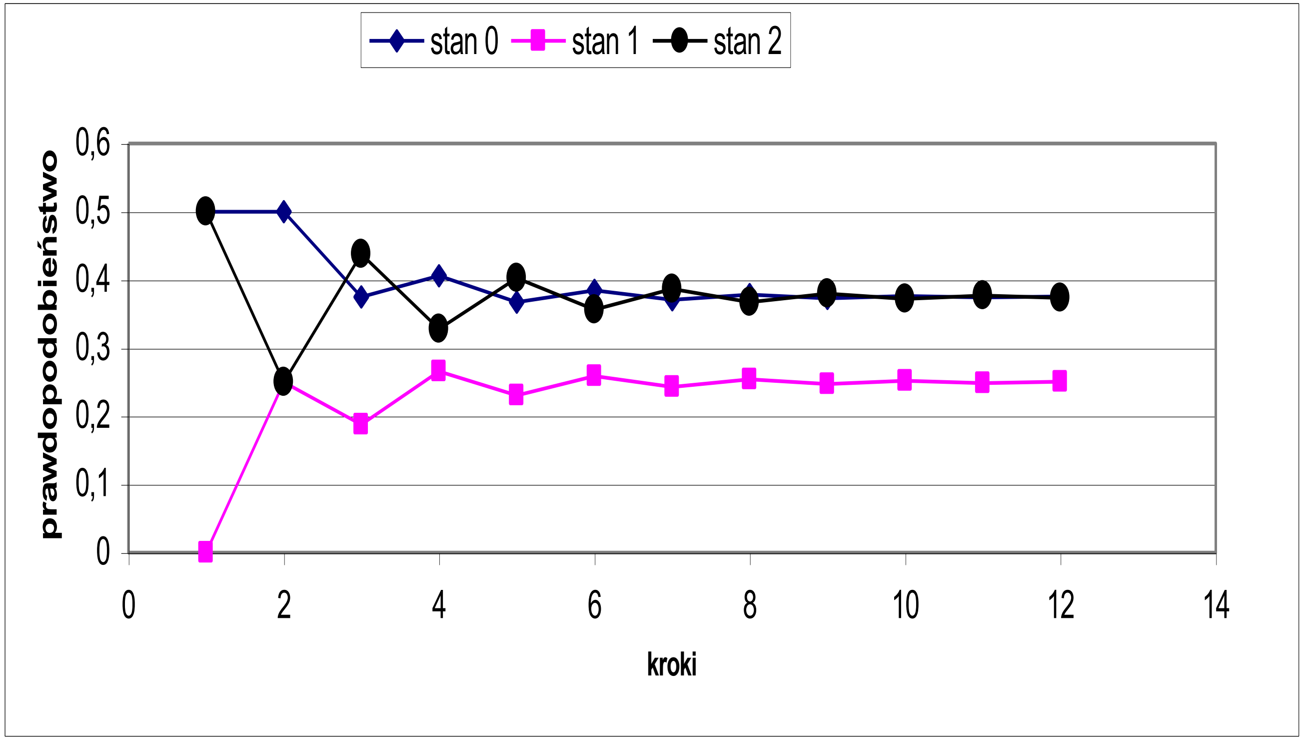
$$p(2)=p(0)P^2=[1{,}0{,}0]\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25\\ 0{,}375 & 0{,}438 & 0{,}188\\ 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}625\end{bmatrix}=[0{,}5;0{,}25;0{,}25]$$

Po trzecim kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(3)=p(0)P^3=[1{,}0{,}0]\begin{bmatrix}0{,}375 & 0{,}188 & 0{,}438\\ 0{,}281 & 0{,}203 & 0{,}516\\ 0{,}438 & 0{,}344 & 0{,}219\end{bmatrix}=[0{,}375;\ 0{,}188;\ 0{,}438]$$

Obliczając kolejne potęgi macierzy P możemy wyliczone wartości p(n) zestawić dla n = 1, ..., 12 w następującej tabeli i przedstawić na wykresie.

krok	Stan 0	Stan 1	Stan 2
1	0,5	0	0,5
2	0,5	0,25	0,25
3	0,375	0,188	0,438
4	0,406	0,266	0,328
5	0,367	0,23	0,402
6	0,385	0,259	0,356
7	0,371	0,243	0,386
8	0,379	0,254	0,367
9	0,373	0,247	0,38
10	0,376	0,252	0,372
11	0,374	0,249	0,377
12	0,376	0,251	0,374



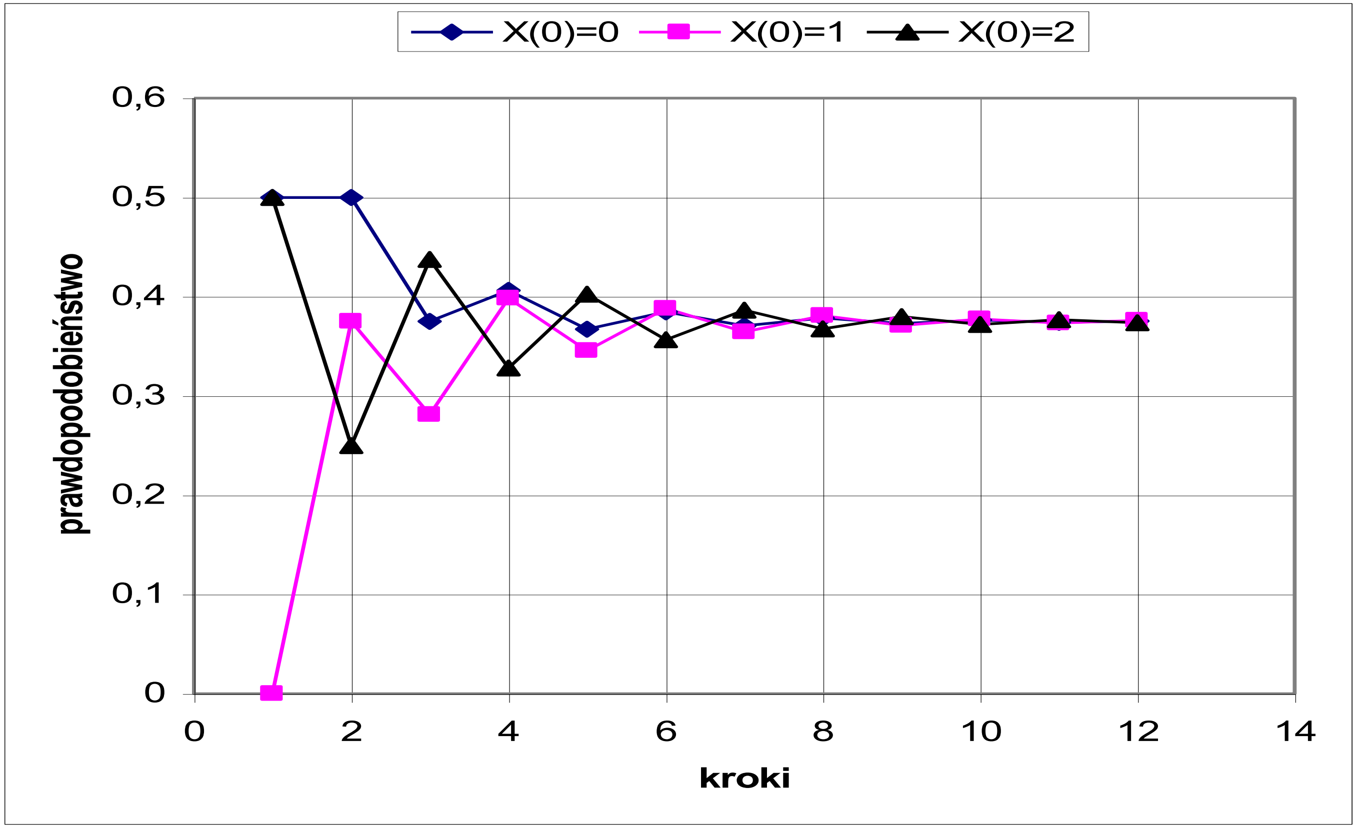
Zauważmy, że rozpatrywane prawdopodobieństwa stabilizują się na określonym poziomie i dążą do pewnych granic, co związane jest z regularności rozpatrywanej macierzy stochastycznej.
Jak pokażemy wkrótce, istnieją sposoby wyznaczania tych granicznych prawdopodobieństw bez obliczania potęg macierzy P.

Zobaczmy teraz jak zmienia się prawdopodobieństwo znalezienia się w ustalonym stanie w poszczególnych krokach, gdy zmienia się rozkład początkowy.

Rozpatrzmy stan 0 i rozkłady początkowe p(0) = (1, 0, 0), p(0) = (0, 1, 0), p(0) = (0, 0, 1).

Obliczone prawdopodobieństwa (w podobny sposób jak wyżej) zestawiono w tabeli i przedstawiono na wykresie dla n = 1, ..., 12.

p(0) \ krok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p(0) = (1, 0, 0)	0,5	0,5	0,375	0,406	0,367	0,385	0,371	0,379	0,373	0,376	0,374	0,376
p(0) = (0, 1, 0)	0	0,375	0,281	0,398	0,346	0,388	0,364	0,381	0,371	0,378	0,373	0,376
p(0) = (0, 0, 1)	0,5	0,25	0,438	0,328	0,402	0,356	0,386	0,367	0,38	0,372	0,377	0,374



Zauważmy, że rozpatrywane prawdopodobieństwo dla dużych n nie zależy od rozkładu początkowego.

Granicę $\Pi = p(\infty) = \lim_{n \to \infty} p(n)$ (o ile istnieje)

nazywamy **rozkładem granicznym** łańcucha Markowa.

Uwaga dla macierzy regularnej

$\Pi = \lim p(n) = \lim p(0)P^n = p(0)P^\infty = p(0)E$ gdzie E to macierz ergodyczna.

Łańcuch Markowa dla którego istnieje rozkład graniczny **niezależny od rozkładu początkowego** p(0) nazywamy **łańcuchem ergodycznym** a rozkład graniczny nazywamy **rozkładem ergodycznym**.

Twierdzenie.

Rozkład graniczny nie zależy od rozkładu początkowego p(0) wtedy i tylko wtedy, gdy wiersze macierzy granicznej

$$\lim_{n \to \infty} P^n = E$$

są takie same (równe rozkładowi granicznemu Π).

Warunek ten jest spełniony dla macierzy P **regularnej** (jednokrotna wartość własna równa 1 i brak innych wartości własnych o module 1).

Twierdzenie.

Jeśli macierz stochastyczna P lub dowolna jej potęga ma **wszystkie elementy dodatnie** to odpowiadający jej łańcuch Markowa **jest ergodyczny**.

Sposoby wyznaczania rozkładu granicznego:

Sposób I.

Rozkład graniczny Π jest jedynym niezerowym rozwiązaniem układu

$$(P^T - I)\,\Pi^T = 0,$$

(równoważnie ΠP=Π)

spełniającym warunek $\sum_{i=1} \Pi_i = 1$,

Uzasadnienie

p(n+1) = p(n)P

$p(n+1) \rightarrow \Pi, \quad p(n) \rightarrow \Pi$

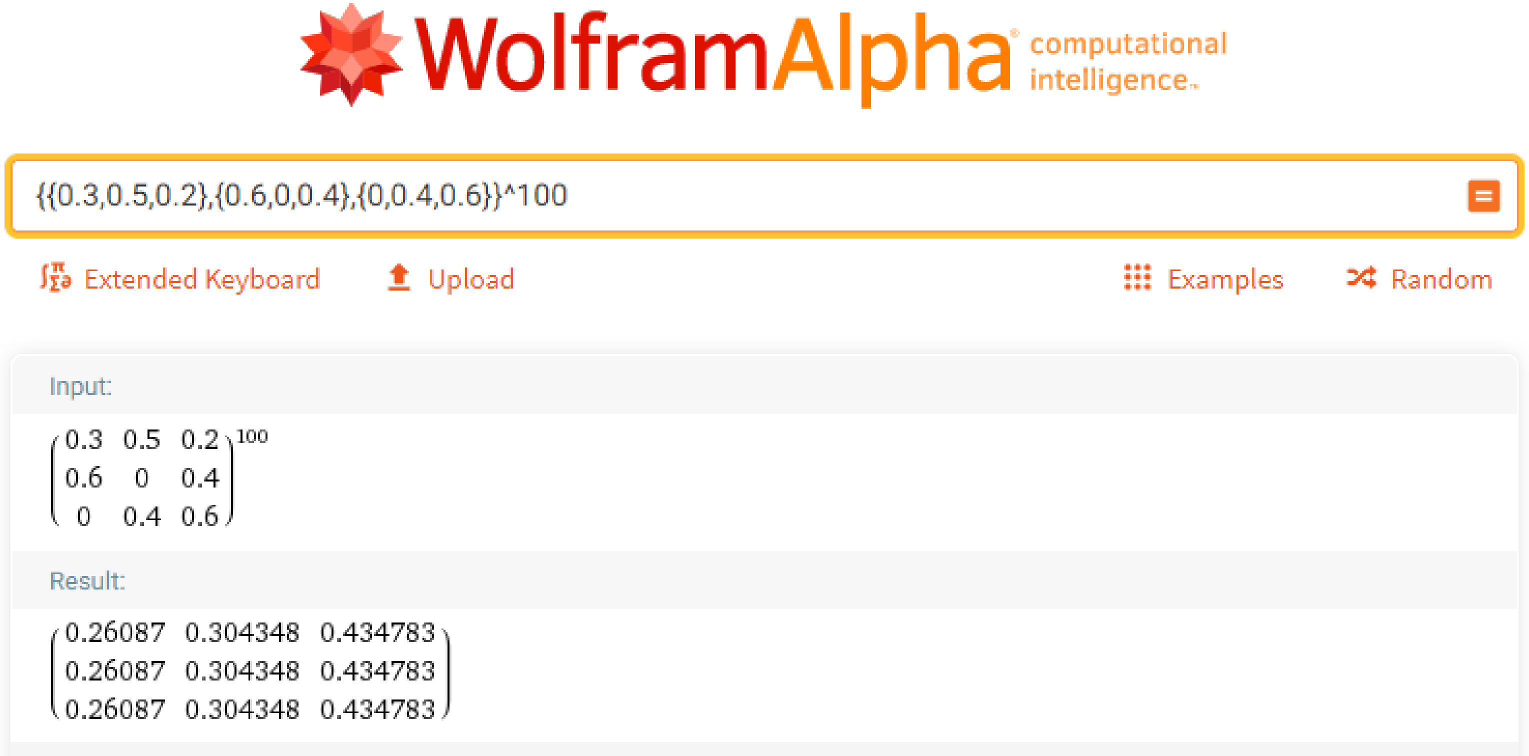
stąd ΠP=Π

Przykład.

Wyznaczyć rozkład ergodyczny łańcucha Markowa o macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Przybliżony rozkład graniczny możemy odczytać wyznaczając wysoką potęgę macierzy P.



Zatem $\Pi \approx [0{,}26087,\ 0{,}304348,\ 0{,}434783]$.

Należy rozwiązać równanie jednorodne

$$\begin{bmatrix} -0{,}7 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & -0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_0 \\ \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

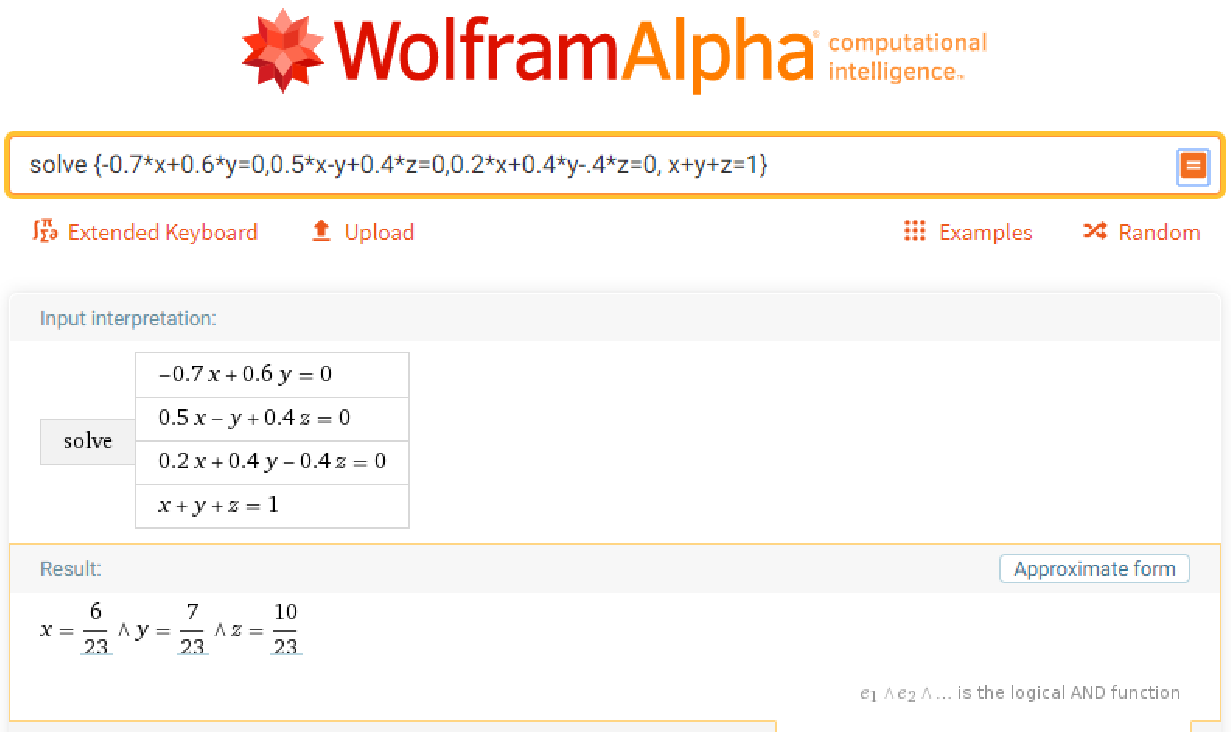
Jest to **układ nieoznaczony z jednym parametrem**. Przyjmijmy np. $\Pi_0 = 1$,

Wtedy $$\Pi_1 = 28/24,\ \Pi_2 = 40/24.$$

Dzieląc te rozwiązania przez ich sumę otrzymamy rozwiązanie unormowane

$$\Pi = [6/23,\ 7/23,\ 10/23].$$

Sprawdzenie



Sposób II.

$$\Pi_j = \frac{A_{jj}}{\sum_k A_{kk}}$$

gdzie A_{kk} to **dopełnienia algebraiczne** macierzy I - P (wyznacznik podmacierzy otrzymanej przez skreślenie k-tego wiersza i k-tej kolumny macierzy I – P).

Przykład.

Wyznaczyć drugim sposobem rozkład ergodyczny łańcucha z poprzedniego przykładu.

0,3	0,5	0,2			
0,6	0	0,4	**P**		
0	0,4	0,6			
1	0	0			
0	1	0	**I**		
0	0	1			
0,7	-0,5	-0,2			
-0,6	1	-0,4	**I-P**		
0	-0,4	0,4			
wklej wartości			A_{ii}		π_i
	1	-0,4			
	-0,4	0,4			
0,7	-0,2				
0	0,4				
0,7	-0,5				
-0,6	1				

			Aii		πi		
	1	-0,4	0,24		0,26087		6/23
	-0,4	0,4					
0,7	-0,2		0,28		0,304348		7/23
0	0,4						
0,7	-0,5						
-0,6	1		0,4		0,434783		10/23
			0,92		1		

Klasyfikacja stanów.

Będziemy utożsamiać stan s_k z liczbą k.

Stan s_k jest **osiągalny** ze stanu s_j jeśli $p_{jk}(n) > 0$ dla pewnego n,

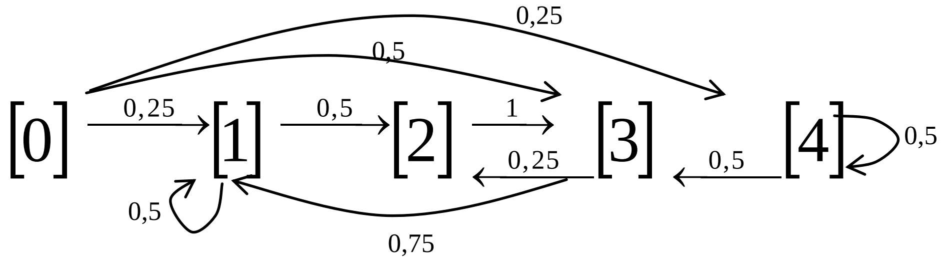
Stany s_k i s_j nazywamy **wzajemnie komunikującymi się** jeśli stan s_k jest osiągalny ze stanu s_j, i odwrotnie.

Stan s_k jest **stanem nieistotnym** gdy istnieje stan s_j osiągalny ze stanu s_k a stan s_k nie jest osiągalny ze stanu s_j , Relacja wzajemnej komunikacji jest relacją równoważności, zatem dzieli zbiór stanów na klasy rozłączne.

Zbiór stanów C nazywamy **zamkniętym**, jeżeli żaden stan spoza C nie da się osiągnąć wychodząc z dowolnego stanu w C.

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa



Jego macierz P ma postać

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}25 & 0 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Stany 0 i 4 są nieistotne.
Stany 1, 2 i 3 są istotne.
Zbiór stanów {1, 2, 3} jest zamknięty.

Pojedynczy stan zamknięty (musi być $p_{kk} = 1$) nazywamy stanem **pochłaniającym**.

Łańcuch Markowa jest **nieprzywiedlny**, gdy wszystkie jego stany wzajemnie komunikują się.

Przy badaniu ewolucji łańcucha Markowa w czasie chcemy wiedzieć, do których stanów łańcuch powraca nieskończenie wiele razy, a które po pewnym czasie opuszcza bezpowrotnie.

Niech F_{kj} będzie prawdopodobieństwem, że łańcuch wychodząc ze stanu k dotrze kiedykolwiek do stanu j.

$$F_{kj} = P\left(\bigcup_n (X_n = j \mid X_0 = k) \right)$$

Jeśli $f_{kj}(n)$ - prawdopodobieństwo, że wychodząc ze stanu k łańcuch dojdzie po raz pierwszy do stanu j w n-tym kroku

$$f_{k\,j}(n) = P(X_1 \neq j, ..., X_{n-1} \neq j, X_n = j \mid X_0 = k)$$

to

$$F_{kj} = \sum_n f_{kj}(n)$$

Stan j nazywamy:

a) **powracającym**, gdy $F_{jj} = 1$.

b) **chwilowym** gdy $F_{jj} < 1$.

Twierdzenie.

W nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa wszystkie stany są tego samego typu: jeżeli jeden jest powracający (chwilowy) to wszystkie są powracające (chwilowe).

Dlatego możemy mówić, że łańcuch jest np. powracający.

Twierdzenie.

Przestrzeń stanów S łańcucha Markowa można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy:

$$S = T \cup S_1 \cup S_2 \cup .....$$

gdzie T - zbiór stanów chwilowych,

S_i - nieprzywiedlne zamknięte zbiory stanów powracających.

Łańcuchy okresowe.

Okresem stanu j nazywamy liczbę:

$$o(j) = NWD(n: p_{jj}(n)>0)$$

jest to **największy wspólny dzielnik** takich liczb n, że powrót do stanu j może nastąpić po n krokach.

Stan j nazywamy **okresowym** gdy ma okres większy od 1 i **nieokresowym** gdy ma okres 1.

Twierdzenie.

W nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa wszystkie stany mają ten sam okres.

Zatem nieprzywiedlny łańcuch Markowa nazywamy **okresowym**, gdy jego stany mają okres większy od 1, w przeciwnym przypadku łańcuch nazywamy **nieokresowym**.

Przykład

Proces ma stany {0, 1, 2, 3}.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wskaż podzbiory wzajemnie komunikujące się.

Czy ten łańcuch jest nieprzywiedlny?

Wskaż stan pochłaniający.

$\{0, 1, 2\}, \{3\}$.

Łańcuch jest przywiedlny.

Stan pochłaniający to 3.

Przykład

Proces ma stany {0, 1, 2, 3}.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0 & 0{,}7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wskaż stany okresowe.

Wszystkie stany mają okres 2

Przykład

Proces ma stany {0, 1, 2, 3}.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wskaż stany okresowe.

Brak stanów okresowych.

Łańcuch ergodyczny.

Łańcuch jest ergodyczny jeśli istnieje

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j \qquad \sum \pi_j = 1$$

Rozkład Π nazywamy rozkładem **ergodycznym** (granicznym).

Łańcuch stacjonarny.

Łańcuch jest **stacjonarny,** gdy istnieje rozkład Π zwany rozkładem stacjonarnym, że

$$\mathbf{\Pi P = \Pi}$$

W łańcuchu ergodycznym rozkład stacjonarny (graniczny) nie zależy od rozkładu początkowego.

Uwaga.

$$\textbf{ergodyczny} \quad \Rightarrow \textbf{ stacjonarny}$$

Każdy łańcuch o skończonej liczbie stanów jest stacjonarny.

Przykład.
Rozpatrzmy łańcuch Markowa

$$\begin{tikzcd} {[0]} \arrow[r, "1"] & {[1]} \arrow[r, "1"] & {[2]} \arrow[ll, bend left, "1"] \end{tikzcd}$$

Jego macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie stany mają okres 3.
Zauważmy, że wielomian charakterystyczny tej macierzy ma postać

$$W(\lambda) = \lambda^3 - 1$$

i jej wartości własne są równe: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

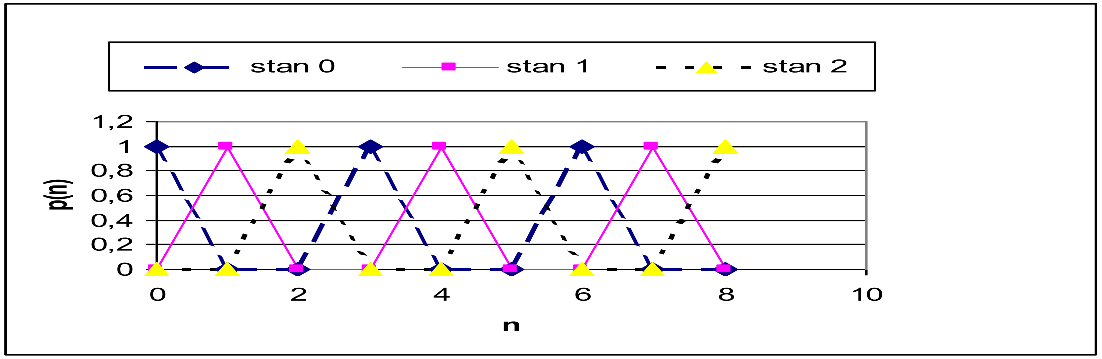
Ponieważ wszystkie wartości własne maja moduł 1 i $\lambda_1 = 1$ jest jednokrotną wartością własną to rozpatrywana macierz jest nierozkładalna i cykliczna.
Łańcuch ten jest stacjonarny, jego rozkładem stacjonarnym jest (1/3, 1/3, 1/3).
Rozkład ten można wyznaczyć I lub II sposobem obliczania rozkładów granicznych.
Kolejne potęgi macierzy P są równe

$$P^2 = P^{3n+2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; P^3 = P^{3n+3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; P^4 = P = P^{3n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dla n = 0, 1, 2, ...
Zauważmy, że żadna kolumna P^n nie składa się wyłącznie z elementów dodatnich.

Rozkład graniczny nie istnieje.
Weźmy np. rozkład początkowy p(0) = (1, 0, 0).

Obliczone prawdopodobieństwa p(n) zestawiono w tabeli i przedstawiono na wykresie dla



n = 0, ..., 8.

p(n) \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Stan 0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
Stan 1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
Stan 2	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Jak widać $\lim_{n\to\infty} p(n)$ nie istnieje dla żadnej współrzędnej (dla żadnego stanu).

Wniosek.
Istnienie rozkładu stacjonarnego nie implikuje, że łańcuch jest ergodyczny.
Każdy łańcuch o skończonej liczbie stanów jest stacjonarny.

Twierdzenie.

Dla nieprzywiedlnego, nieokresowego łańcucha Markowa (X_n) dla którego istnieje rozkład stacjonarny Π mamy:

a) łańcuch (X_n) jest powracający,

b) łańcuch (X_n) jest ergodyczny,

c) rozkład stacjonarny jest jedyny oraz $\pi_j = 1/\mu_j$, gdzie μ_j jest średnim czasem powrotu łańcucha do stanu j.

L.K. 09.03.22