Procesy stochastyczne

WYKŁAD 1

Literatura

- A. Plucińska, E. Pluciński, Probabilistyka (WNT), 2009
- D. Bobrowski, Probabilistyka w zastosowaniach technicznych (WNT)
- O. Tikhonenko, Metody probabilistyczne analizy systemów informacyjnych, 2006
- L. Kowalski, Statystyka, skrypt WAT, 2021

(Ω, S, P) - ustalona **przestrzeń probabilistyczna**.

$T \subset R$, przedział (skończony lub nieskończony), lub podzbiór dyskretny.

Def.

Funkcję $X: T \times \Omega \to R$ nazywamy **procesem stochastycznym** jeśli

$$\bigwedge_{t \in T} \bigwedge_{x \in R} \{\omega : X(t,\omega) < x\} \in S$$

czyli dla każdego ustalonego t funkcja X rozważana jako funkcja argumentu ω jest zmienną losową.

Najczęściej w zastosowaniach interpretujemy t jako **czas**.

Stosujemy zapis $X(t,\omega) = X_t(\omega) = X(t)$

Przykład.

Jest wiele zjawisk zmieniających się w czasie, których wartość zależy od czynników losowych i może je traktować jako procesy stochastyczne.

- obciążenie jednostki centralnej (CPU),
- temperatura powietrza w określonym punkcie,
- kurs euro/złoty,
- prędkość łącza internetowego,
- kurs akcji określonej firmy,
- liczba studentów zalogowanych do USOS,
- liczba awarii sieci komputerowej.

Przykład.
Drgania harmoniczne zależą od czynników losowych i można je zapisać jako proces

$$X(t) = A\sin(Ft + \Phi)$$

A - zmienna losowa określająca amplitudę,
F - zmienna losowa określająca częstotliwość,
Φ - zmienna losowa określająca przesunięcie fazowe

t - czas, t $\in$ R.

Przykład.

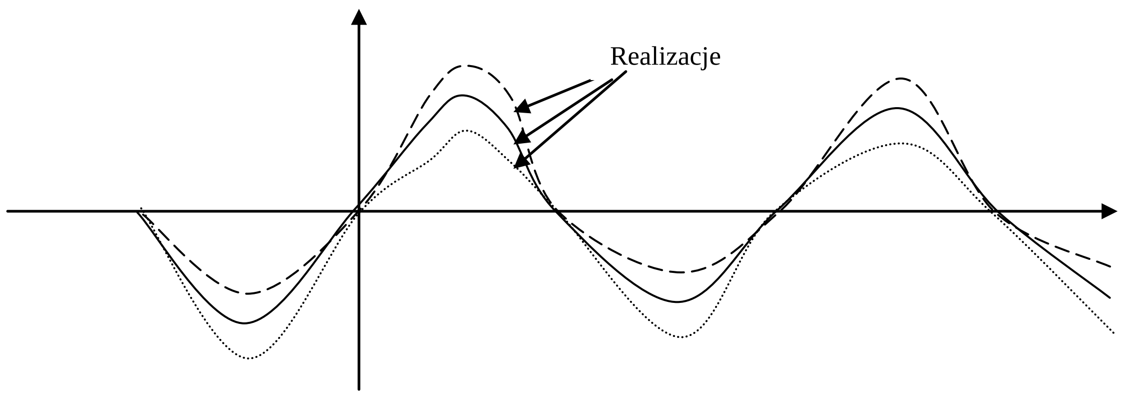
Amplituda napięcia generowanego przez prądnicę prądu zmiennego zależy od czynników losowych i może być zapisana jako proces

$$X(t) = A\sin wt$$

w - stała określająca częstotliwość,

A - zmienna losowa o rozkładzie np. N(230, 5),

t - czas, $t \in R$.



Realizacje procesu

Dla ustalonego $\omega \in \Omega$ i dowolnego $t \in T$ przyjmujemy

$$x(t) = X(t, \omega)$$

Funkcja *x* określona na T nie ma charakteru losowego, nazywamy ją **realizacją procesu stochastycznego** (wyraża ewolucję w czasie wybranego zdarzenia losowego).

W powyższym przykładzie proces ma nieskończenie wiele realizacji.

Wartości procesu nazywamy **stanami**.

Zbiór wszystkich stanów nazywamy **przestrzenią stanów**.

Przykład.

Na wyjściu generatora co minutę pojawia się losowo sygnał 0 lub 1 (p = 0,5). Generator pracuje przez 15 minut. Rozpatrywane doświadczenie może być zapisane jako proces

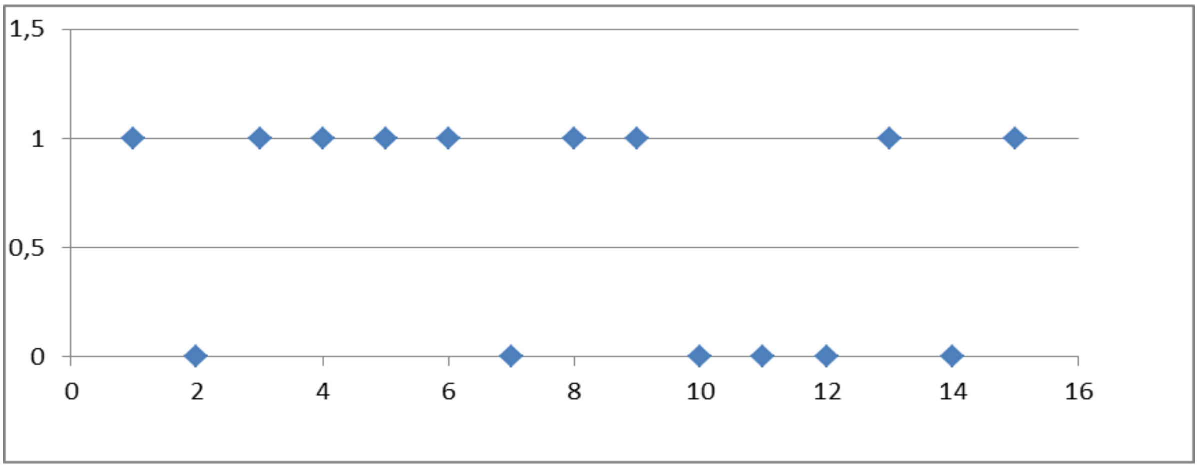
$$X(n) = \left(X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ X_{14}, X_{15}\right)$$

Jest to ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie zerojedynkowym.

Realizacje tego procesu to ciągi piętnastoelementowe, których elementy to zera i jedynki.

Przykładowa realizacja

(1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)



Rodzaje procesów

Czas	Stany	Przykład	nazwa procesu
C	**C**	jak prądnica, lub proces Gaussa,	**CC**
C	**D**	proces Poissona,	**CD**
D	**C**	n - wymiarowy rozkład normalny,	**DC**
D	**D**	łańcuchy Markowa.	**DD**

Niech $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Rozpatrzmy n wymiarową zmienna losową

$$\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\right)$$

Rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej nazywamy **n-wymiarowym rozkładem procesu stochastycznego** a dystrybuantę tej zmiennej losowej nazywamy **n-wymiarową dystrybuantą procesu stochastycznego**.

Parametry procesu stochastycznego.

Wartość oczekiwana procesu.

$$m(t) = E(X_t)$$

Własności wartości oczekiwanej procesu są podobne do własności wartości oczekiwanej zmiennej losowej.

Wariancja procesu.

$$V(t) = \sigma^2(t) = D^2(t) = E\left(\left(X_t - m(t)\right)^2\right)$$

Własności wariancji procesu są podobne do własności wariancji zmiennej losowej.

Autokowariancja

$$K(t_1, t_2) = E\left(\left(X_{t_1} - m(t_1)\right)\left(X_{t_2} - m(t_2)\right)\right)$$

Autokowariancja unormowana

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{\sqrt{V(t_1)}\sqrt{V(t_2)}}$$

Autokorelacja

$$R(t_1, t_2) = E\left(X_{t_1} \cdot X_{t_2}\right)$$

Własności:

1) $V(t) = D^2(t) = K(t,t)$

2) $K(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2)$

3) $|K(t_1,t_2)| \le \sqrt{V(t_1)V(t_2)}$

4) $K(t_1,t_2) = K(t_2,t_1)$, $R(t_1,t_2) = R(t_2,t_1)$

$$\rho(t_1,t_2) = \rho(t_2,t_1)$$

5) Jeśli a, b funkcje nielosowe to

$$K_{aX+b}(t_1,t_2) = a(t_1)a(t_2)K_X(t_1,t_2)$$

$$\rho_{aX+b}(t_1,t_2) = sign(a(t_1)a(t_2))\rho_X(t_1,t_2)$$

Uwaga

1. Z powyższych własności wynika, że praktycznie wystarczy wyliczyć $m(t)$ i $R(t_1, t_2)$ a pozostałe parametry uzyskamy na ich podstawie.

2. Przy obliczaniu parametrów przydatne bywają następujące zależności znane z rachunku prawdopodobieństwa

$$\boxed{EX^2 = D^2X + (EX)^2}, \quad \text{bo} \qquad D^2X = EX^2 - (EX)^2$$

$$\boxed{E(XY) = Cov(X,Y) + EXEY}$$

bo

$$Cov(X,Y) = E(XY) - EXEY$$

$$\boxed{Cov(X,Y) = \rho DXDY} \quad \text{bo} \qquad \rho = \frac{Cov(X,Y)}{DXDY}$$

3. Własności kowariancji i korelacji dla zmiennych losowych.

Niech U, W zmienne losowe,
a, b, c, d to stałe, a, c mają ten sam znak.

a) Jeśli $X = aV + b$, $Y = cW + d$ to $\rho_{X,Y} = \rho_{U,W}$

Stąd ρ nie zależy od wyboru jednostek i początku skali wartości zmiennych losowych.

b) Jeśli $X = (V - EV)/DV$, $Y = (W - EW)/DW$,
to $cov(X, Y) = E(X, Y) = \rho_{X,Y} = \rho_{U,W}$

Stąd dla zmiennych losowych standaryzowanych kowariancja jest równa korelacji (jeśli istnieje).

Przykład.

Obliczymy parametry procesu

$$X(t) = At + B, \quad t \in R$$

A, B - zmienne losowe o parametrach

$EA = 0$; $EB = 1$,

i $D^2A = 1$, $D^2B = 2$; cov(A, B) = -1.

Rozwiązanie.
Wartość oczekiwana:

$$m(t) = E\left(X_t\right) = E(At + B) = tEA + EB = 1$$

Autokorelacja:

$$R(t_1,t_2) = E\left(X_{t_1} X_{t_2}\right) = E\left(\left(At_1 + B\right)\left(At_2 + B\right)\right) =$$

$$= E\left(A^2 t_1 t_2 + AB\left(t_1 + t_2\right) + B^2\right) =$$

$$= t_1 t_2 E\left(A^2\right) + \left(t_1 + t_2\right) E\left(AB\right) + E\left(B^2\right) =$$

$$=$$

$$R(t_1,t_2) = E\left(X_{t_1}X_{t_2}\right) = E\big((At_1 + B)(At_2 + B)\big) =$$
$$= E\left(A^2 t_1 t_2 + AB(t_1 + t_2) + B^2\right) =$$
$$= t_1 t_2 E\left(A^2\right) + (t_1 + t_2)E(AB) + E\left(B^2\right) =$$
$$= t_1 t_2\left(D^2 A + (EA)^2\right) + (t_1 + t_2)\left(\operatorname{cov}(A,B) + EAEB\right) + D^2 B + (EB)^2 =$$
$$= t_1 t_2 (1 + 0) + (t_1 + t_2)(-1 + 0 \cdot 1) + 2 + 1 = t_1 t_2 - t_1 - t_2 + 3$$

Autokowariancja:

$$K(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2) = t_1 t_2 - t_1 - t_2 + 2$$

Wariancja:

$$V(t) = t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1$$

Zauważmy, że wariancja tego procesu jest nie mniejsza niż 1 dla dowolnego t.

Współczynnik autokorelacji:

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{\sqrt{V(t_1)}\sqrt{V(t_2)}} = \frac{t_1 t_2 - t_1 - t_2 + 2}{\sqrt{(t_1 - 1)^2 + 1}\sqrt{(t_2 - 1)^2 + 1}}$$

Przykład.
Obliczymy parametry procesu

$$Z_n = X_n + X_{n+1},$$

gdzie

$$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots X_n, \ldots$$

to ciąg niezależnych zmiennych losowych

gdzie $EX_n = 0 \quad D^2 X_n = \sigma^2$

$$EZ_n = EX_n + EX_{n+1} = 0,$$

Zauważmy, że

$$E\left(X_i \cdot X_j\right) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } i \neq j \\ \sigma^2 & \text{gdy } i = j \end{cases}$$

zatem

$$K(Z_n, Z_{n+k}) = R(Z_n, Z_{n+k}) =$$

$$= E\left[\left(X_n + X_{n+1}\right)\left(X_{n+k} + X_{n+k+1}\right)\right] =$$

$$= E\left(X_n X_{n+k} + X_n X_{n+k+1} + X_{n+1} X_{n+k} + X_{n+1} X_{n+k+1}\right) =$$

$$=$$

$$
\begin{aligned}
&K(Z_n, Z_{n+k}) = R(Z_n, Z_{n+k}) = \\
&= E\left[\left(X_n + X_{n+1}\right)\left(X_{n+k} + X_{n+k+1}\right)\right] = \\
&= E\left(X_n X_{n+k} + X_n X_{n+k+1} + X_{n+1} X_{n+k} + X_{n+1} X_{n+k+1}\right) = \\
&= \begin{cases} 2\sigma^2 & \text{gdy } k = 0 \\ \sigma^2 & \text{gdy } k = 1 \\ 0 & \text{gdy } k \geq 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$V(Z_n) = 2\sigma^2$$

$$\rho(Z_n, Z_{n+k}) = \frac{K(Z_n, Z_{n+k})}{D(Z_n)D(Z_{n+k})} == \begin{cases} 1 & \text{gdy } k = 0 \\ 0{,}5 & \text{gdy } k = 1 \\ 0 & \text{gdy } k \geq 2 \end{cases}$$

Kowariancja wzajemna procesów X(t), Y(t)

$$K_{XY}(t_1,t_2)=E\Big(\big(X_{t_1}-m_X(t_1)\big)\big(Y_{t_2}-m_Y(t_2)\big)\Big)$$

Jeśli

$$K_{XY}(t_1,t_2)=0 \quad \forall\ t_1,t_2\in T$$

to procesy X(t), Y(t) nazywamy **nieskorelowanymi**.

Przykład

Obliczyć kowariancję wzajemną procesów X(t), Y(t) gdzie

$X(t) = At, \quad Y(t) = A + Bt,$

A, B - niezależne zmienne losowe

$EA = EB = 0, \quad D^2A = D^2B = \sigma^2,$

$EX(t) = EY(t) = 0$ zatem

$$K_{XY}(t_1, t_2) = E\left(\left(At_1\right)\left(A + Bt_2\right)\right) =$$

$$=$$

$$K_{XY}(t_1,t_2) = E\big(\big(At_1\big)\big(A + Bt_2\big)\big) =$$
$$= t_1 E\left(A^2\right) + t_2 E\left(AB\right) = t_1 \sigma^2$$

Zadanie **dla chętnych**.

Parametr k = **liczba trzycyfrowa**, dwie ostatnie cyfry to dwie ostatnie cyfry numeru indeksu, pierwsza cyfra to pierwsza cyfra liczby liter pierwszego imienia.

Obliczyć kowariancję wzajemną procesów $X(t)$, $Y(t)$ dla $t_1 = 5$, $t_2 = 10$, gdzie

$X(t) = At + kB$, $Y(t) = (k+1)A + Bt$,

A, B - niezależne zmienne losowe

$EA = EB = 0$, $D^2A = 2$, $D^2B = k$,

Wyniki przyjmuję do końca dnia poprzedzającego następny wykład ***za pośrednictwem poczty elektronicznej****.*

Uwaga

Jeśli Z(t) = X(t) + Y(t)
jest sumą procesów X(t), Y(t) to
EZ(t) = EX(t) + EY(t)

$$K_Z(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2) + K_Y(t_1,t_2) + K_{XY}(t_1,t_2) + K_{YX}(t_1,t_2)$$

Jeśli Z(t) = X(t) - Y(t) to
EZ(t) = EX(t) - EY(t)

$$K_Z(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2) + K_Y(t_1,t_2) - K_{XY}(t_1,t_2) - K_{YX}(t_1,t_2)$$

Proces stochastyczny X nazywamy **procesem o przyrostach niezależnych**, jeśli dla dowolnego naturalnego n, dowolnych $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ zmienne losowe

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots\ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

są niezależne.

Przykład: proces Poissona, proces Wienera.

Proces stochastyczny X o przyrostach niezależnych nazywamy **jednorodnym**, jeśli dla dowolnego nieujemnego t, X(0, ω) = 0 i dla dowolnych $t_1 < t_2$ rozkład różnicy zmiennych losowych

$$X_{t_2} - X_{t_1}$$

zależy tylko od różnicy $t_2 - t_1$ (nie zależy od t_1).
Przykład: proces Poissona.

Proces stochastyczny nazywamy **procesem normalnym (procesem Gaussa)** jeśli wszystkie n-wymiarowe rozkłady tego procesu są normalne.

Jednorodny proces normalny o przyrostach niezależnych dla którego

$$m(t) = 0$$

$$V(t) = ct \qquad c = \mathrm{const}, \quad c > 0$$

nazywamy **procesem Wienera** (**procesem ruchu Browna**).

Biały szum to proces dla którego:

$$m(t) = 0$$

$$D^2(t) = const$$

$$K(s,t) = 0 \qquad t \neq s$$

Procesy stacjonarne to procesy, których realizacje mają postać losowych odchyleń od pewnej wartości i charakter tych odchyleń nie ulega zmianie w czasie np. napięcie w sieci energetycznej, szumy losowe w radiotechnice. Dla procesów stacjonarnych łatwo eksperymentalnie wyznaczyć charakterystyki.

Proces jest **stacjonarny w węższym sensie** (ściśle stacjonarny) gdy wszystkie jego charakterystyki nie zależą od przesunięcia na osi czasu.

Dokładniej:

Niech $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Wtedy zmienne losowe

$$\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\right) \text{ i } \left(X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \ldots, X_{t_n+\tau}\right)$$

Mają ten sam rozkład dla każdego $\tau \in R$.

Proces jest **stacjonarny w szerszym sensie** (słabo stacjonarny) gdy $E(|X(t)|^2) < \infty$ oraz ma stałą wartość oczekiwaną a jego autokowariancja zależy wyłącznie od różnicy argumentów tzn.

$$m(t) = m = const$$

$$K(s,t) = k(t-s) = k(\tau) \qquad \tau = t - s$$

Jeśli $E(|X(t)|^2) < \infty$ to każdy proces ściśle stacjonarny jest słabo stacjonarny, odwrotna własność nie musi zachodzić (wyjątek - procesy gaussowskie).

Zwykle termin „proces stacjonarny” odnosi się do procesów stacjonarnych w szerszym sensie (słabo stacjonarnych).

Własności autokowariancji dla procesów stacjonarnych.

$$D^2(t) = K(0) = const$$

$K(\tau) = K(-\tau)$ dla każdego $\tau > 0$

$$|K(\tau)| \le K(0)$$

L.Kowalski 07.03.22