Procesy stochastyczne

WYKŁAD 6

SMO

Systemy masowej obsługi
(zastosowanie procesu urodzeń i śmierci) - przykłady:
- centrala telefoniczna,
- stacja benzynowa,
- kasa biletowa,
- system komputerowy,
- system kas w supermarkecie.

Założenia:

n - liczba stanowisk (kanałów) obsługi, $n \geq 1$

m - liczba miejsc w poczekalni, $m \geq 0$.

- strumień zgłoszeń jest procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$,
- czas obsługi ma rozkład wykładniczy z parametrem $\mu > 0$ (intensywność obsługi),
- stanowiska działają niezależnie,
- zgłoszenia które nastąpią gdy wszystkie stanowiska obsługi są zajęte przechodzą do poczekalni (jeśli jest),
- jeśli wszystkie stanowiska obsługi są zajęte i wszystkie miejsca w poczekalni są zajęte to zgłoszenie opuszcza SMO.

X(t) - proces stochastyczny oznaczający liczbę klientów w SMO w chwili t,

$$p_j(t) = P(X(t) = j),$$

Najczęściej interesują nas prawdopodobieństwa graniczne

$$\pi_0, \pi_1, \dots , \pi_n,$$

czyli rozkład $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots , \pi_n]$.

SMO ze stratami (bez poczekalni), bez współpracy.

$0 < n < \infty$, $m = 0$

$\lambda_i = \lambda$ intensywność zgłoszeń,

$\mu_j = j\mu$ intensywność obsługi j - tego stanowiska,

$$[0] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [2] \underset{3\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots\cdots \underset{(n-1)\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n-1] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n]$$

Zastosujemy wzory dotyczące procesu urodzeń i śmierci.

$$[0] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [2] \underset{3\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \ldots\ldots \underset{(n-1)\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n-1] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n]$$

$$\Pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot 2\mu} + \frac{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu} + \ldots + \frac{\overbrace{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda \cdot \ldots \cdot \lambda}^{n \text{ czynników}}}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \cdot \ldots \cdot (n-1)\mu \cdot n\mu}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 2!} + \frac{\lambda^3}{\mu^3 3!} + \ldots + \frac{\lambda^n}{\mu^n n!}}$$

$$\Pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 2!} + \frac{\lambda^3}{\mu^3 3!} + \ldots + \frac{\lambda^n}{\mu^n n!}} = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda^j}{\mu^j j!} \right)^{-1} = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha^j}{j!} \right)^{-1}$$

gdzie $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$

Prawdopodobieństwa graniczne (wzory Erlanga):

$$\Pi_0 = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha^j}{j!} \right)^{-1} \qquad \text{gdzie} \quad \alpha = \frac{\lambda}{\mu}$$

oraz

$$\Pi_j = \frac{\lambda^j}{\mu^j j!} \Pi_0 = \frac{\alpha^j}{j!} \Pi_0 \text{,} \qquad j = 1, 2, ..., n$$

Prawdopodobieństwo odmowy obsługi to

$$P_{odm} = \pi_n.$$

Agner Krarup Erlang (1878 - 1929), duński matematyk, pionier zastosowań procesów stochastycznych w telekomunikacji.

Zauważmy, że

$$\Pi_j = \frac{\dfrac{\lambda^j}{\mu^j j!}}{1 + \dfrac{\lambda}{\mu} + \dfrac{\lambda^2}{\mu^2 2!} + \dfrac{\lambda^3}{\mu^3 3!} + \ldots + \dfrac{\lambda^n}{\mu^n n!}} = \frac{\dfrac{\alpha^j}{j!}}{\sum_{i=0}^{n} \dfrac{\alpha^i}{i!}}$$

j = 0, 1, 2, ..., n

i mnożąc licznik oraz mianownik przez $e^{-\alpha}$ widzimy, że poszczególne składniki są równe funkcji prawdopodobieństwa rozkładu Poissona z parametrem α

$$\Pi_j = \frac{\frac{\lambda^j}{\mu^j j!} e^{-\alpha}}{e^{-\alpha} + \frac{\lambda}{\mu} e^{-\alpha} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 2!} e^{-\alpha} + \frac{\lambda^3}{\mu^3 3!} e^{-\alpha} + \ldots + \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} e^{-\alpha}} = \frac{\frac{\alpha^j}{j!} e^{-\alpha}}{\sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha^j}{j!} e^{-\alpha}} = \frac{P_\alpha(j)}{\sum_{j=0}^{n} P_\alpha(j)} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

zatem możemy wyznaczać wartości π_j za pomocą tablic rozkładu Poissona $P_\alpha(j)$ ($P_\alpha(j) = P(X = j)$ jest funkcją prawdopodobieństwa rozkładu Poissona z parametrem α).

Uwaga

Jeśli dysponujemy skumulowanym RPS i nieskumulowanym RPN rozkładem Poissona (np. funkcja EXCELA) to

$$\Pi_j = \frac{RPN(j)}{RPS(n)}.$$

Prawdopodobieństwo odmowy = $P_{odm} = \pi_n$.

Prawdopodobieństwo obsługi = $P_{obsł} = 1 - \pi_n$.

Średnia (graniczna) liczba zajętych stanowisk obsługi.

0	1	...	n
π_0	π_1	...	π_n

$$m_{zs} = \lim_{t\to\infty} E(X(t)) = \sum_{k=1}^{n} k\cdot\pi_k = \sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{\alpha^k}{k!}\pi_0 = \alpha\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!}\pi_0 =$$

$$= \alpha\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\alpha^i}{i!}\pi_0 = \alpha\sum_{i=0}^{n-1}\pi_i = \alpha(\pi_0+\pi_1+\ldots+\pi_{n-1}) = \alpha(1-\pi_n) = \alpha\cdot P_{obs^3}$$

Uwaga

Jeśli n =1 to $\Pi_0 = \dfrac{1}{1+\alpha}$ $\qquad \Pi_1 = \alpha\Pi_0 = \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$.

W tym przypadku $m_{zs} = \alpha(1-\Pi_1) = \alpha \cdot \Pi_0 = \Pi_1 = P_{odm} = \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$.

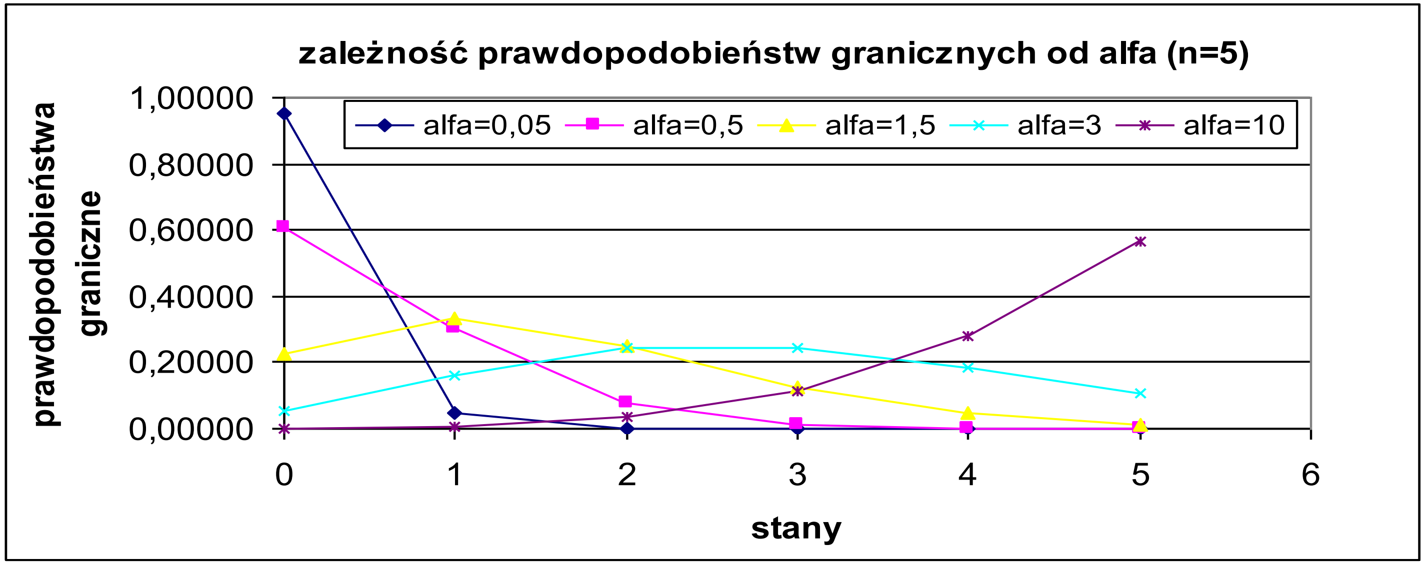
Przykład.
Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy, n = 5, wyznaczymy prawdopodobieństwa graniczne dla różnych wartości $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ i zbadamy zależność prawdopodobieństwa odmowy obsługi i średniej liczby zajętych stanowisk od α.

W poszczególnych kolumnach wpisane są prawdopodobieństwa graniczne dla wartości α podanej w nagłówku kolumny. Pod tabelką podano średnie liczby zajętych stanowisk.

j \ alfa	0,05	0,1	0,5	1	1,5	2	3	5	7	10
0	0,95123	0,90484	0,60654	0,36810	0,22413	0,13761	0,05435	0,01094	0,00303	0,00068
1	0,04756	0,09048	0,30327	0,36810	0,33619	0,27523	0,16304	0,05469	0,02123	0,00677
2	0,00119	0,00452	0,07582	0,18405	0,25214	0,27523	0,24457	0,13674	0,07429	0,03384
3	0,00002	0,00015	0,01264	0,06135	0,12607	0,18349	0,24457	0,22789	0,17335	0,11279
4	0,00000	0,00000	0,00158	0,01534	0,04728	0,09174	0,18342	0,28487	0,30337	0,28198
5	0,00000	0,00000	0,00016	0,00307	0,01418	0,03670	0,11005	0,28487	0,42472	0,56395

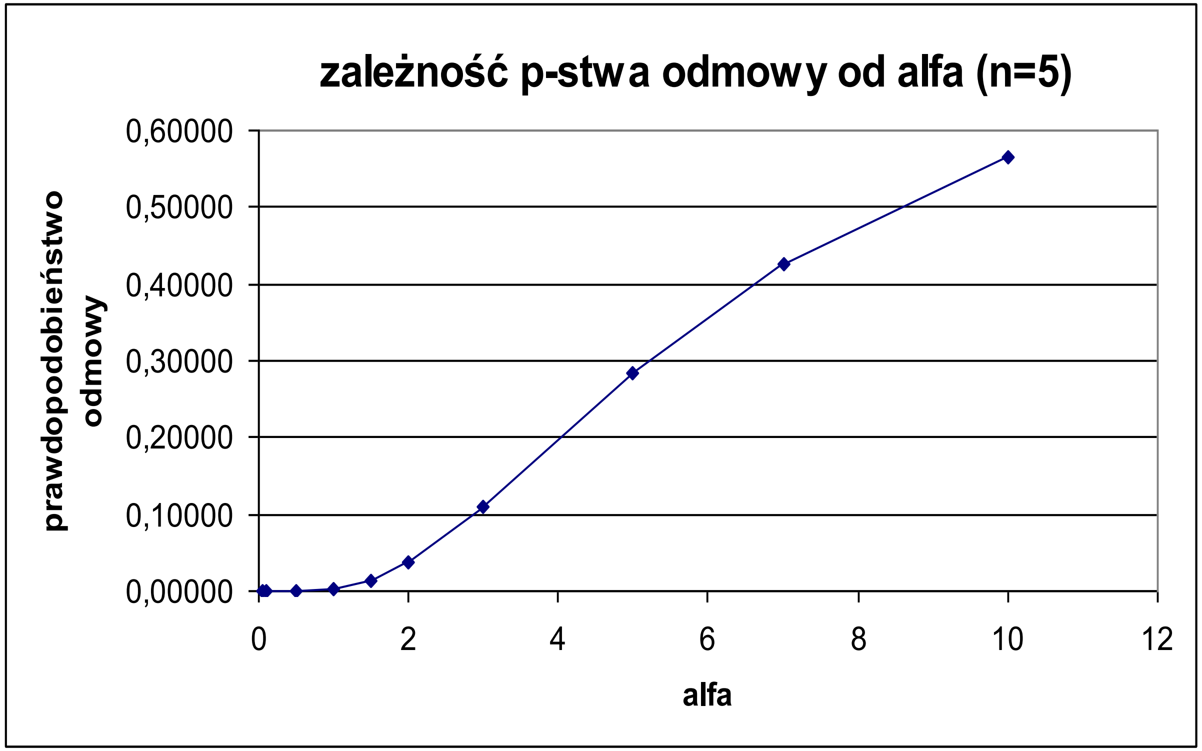
m_{zs}	0,05	0,1	0,4999	0,9969	1,4787	1,9266	2,6698	3,57566	4,02696	4,36

Dla pięciu wybranych wartości α rozkłady graniczne zilustrowano graficznie.



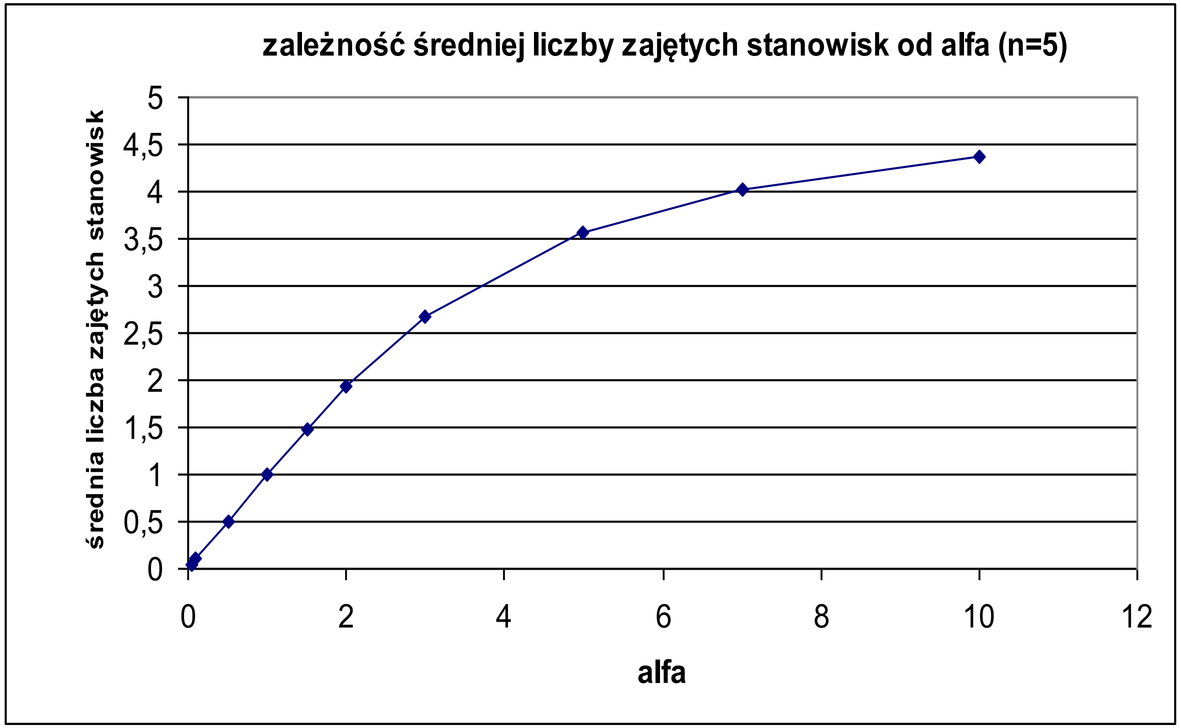
Zauważmy, że wraz ze wzrostem alfy rośnie prawdopodobieństwo, że zajęta będzie większa liczba stanowisk.

Na drugim wykresie przedstawiono zależność prawdopodobieństwa odmowy obsługi (π_5) od alfa. Wzrost intensywności zgłoszeń w stosunku do



intensywności obsługi tzn. wzrost α powoduje wzrost prawdopodobieństwa odmowy obsługi.

Na trzecim wykresie przedstawiono zależność średniej liczby zajętych stanowisk (m_{zs}) od alfa. Wzrost α powoduje wzrost średniej liczby zajętych stanowisk.



SMO ze stratami (bez poczekalni), z pełną współpracą.

$0 < n < \infty, \quad m = 0$

$\mu_j = n\mu$ intensywność obsługi j - tego stanowiska,

$$[0] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [2] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \ldots . \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n-1] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n]$$

Prawdopodobieństwa graniczne:

$$\Pi_0 = \frac{1}{1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^n} = ?$$

gdzie $\beta = \dfrac{\lambda}{n\mu} = \dfrac{\alpha}{n}$

$$\Pi_0 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & gdy\ \ \beta = 1 \\ \left(\dfrac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}\right)^{-1} & gdy\ \ \beta \neq 1 \end{cases}$$

$$\Pi_j = \beta^j \Pi_0 , \qquad \text{j = 1, 2, ..., n}$$

Prawdopodobieństwo odmowy obsługi to

$$P_{odm} = \pi_n.$$

SMO z ograniczonymi stratami, bez współpracy.

m > 0

stanowiska obsługi poczekalnia

$$[0]\underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}[1]\;....\underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}[n]\underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}[n+1]....[n+m-1]\underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}[n+m]$$

Prawdopodobieństwa graniczne:

$$\Pi_0 = \left(1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^n}{n!}\left(\beta + \beta^2 + \ldots + \beta^m\right)\right)^{-1}$$

gdzie $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu}$, $\beta = \dfrac{\lambda}{n\mu} = \dfrac{\alpha}{n}$

zatem π_0 = ?

$$\Pi_0 = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\beta\left(1-\beta^m\right)}{1-\beta} \right)^{-1} & gdy \;\; \beta \neq 1 \\ \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} m \right)^{-1} & gdy \;\; \beta = 1 \end{cases}$$

$$\Pi_k = \frac{\alpha^k}{k!} \Pi_0 \text{、} \qquad k = 1, 2, ..., n$$

$$\Pi_{n+j} = \beta^j \Pi_n \text{、} \qquad j = 1, 2, ..., m$$

Prawdopodobieństwo odmowy obsługi

$$P_{odm} = \pi_{n+m}.$$

Uwaga. dla k = 0, 1, 2, ..., n

$$\Pi_k = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha} + \frac{\alpha^n}{n!}e^{-\alpha}\,\frac{\beta\left(1-\beta^m\right)}{1-\beta}} = \dfrac{P_\alpha(k)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P_\alpha(k) + P_\alpha(n)\,\frac{\beta\left(1-\beta^m\right)}{1-\beta}} & gdy \quad \beta \neq 1 \\[2ex] \dfrac{P_\alpha(k)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P_\alpha(k) + P_\alpha(n)m} & gdy \quad \beta = 1 \end{cases}$$

zatem do obliczeń można wykorzystać tablice rozkładu Poissona.

SMO z ograniczonymi stratami, z pełną współpracą.

m > 0

stanowiska obsługi poczekalnia

$$[0] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \ldots\ldots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+1] \ldots [n+m-1] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+m]$$

Prawdopodobieństwa graniczne:

$$\Pi_0 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{n+m}} = ?$$

gdzie $\beta = \dfrac{\lambda}{n\mu} = \dfrac{\alpha}{n}$

$$\Pi_0 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{n+m}} = \begin{cases} \dfrac{1}{m+n+1} & gdy \quad \beta = 1 \\ \left(\dfrac{1-\beta^{n+m+1}}{1-\beta}\right)^{-1} & gdy \quad \beta \neq 1 \end{cases}$$

$$\Pi_j = \beta^j \Pi_0 \text{`}$$

$$j = 1, 2, ..., n + m$$

Prawdopodobieństwo odmowy obsługi

$$P_{odm} = \pi_{n+m}.$$

SMO bez strat (nieskończenie wiele stanowisk), bez współpracy.

$n = \infty$,

$\lambda_i = \lambda$ intensywność zgłoszeń,

$\mu_j = j\mu$ intensywność obsługi j - tego stanowiska,

$$[0] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots\cdots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n] \underset{(n+1)\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+1] \ldots\ldots$$

Prawdopodobieństwa graniczne:

$$\Pi_0 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \right)^{-1} = ? \qquad \text{gdzie} \quad \alpha = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\Pi_0 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \right)^{-1} = e^{-\alpha}$$

$$\Pi_j = \frac{\lambda^j}{\mu^j j!}\Pi_0 = \frac{\alpha^j}{j!}\Pi_0 \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots$$

Podm = 0

Uwaga.

$$\Pi_j = \frac{\alpha^j}{j!} e^{-\alpha} = P_\alpha(j)\text{、} \qquad j = 0, 1, 2, ..., n, ...$$

zatem do obliczeń można wykorzystać tablice rozkładu Poissona.

Uwaga. Ten typ SMO **nie może być rozpatrywany z pełną współpracą** obsługi.

SMO bez strat (nieskończenie długa kolejka), bez współpracy.

m = ∞

stanowiska obsługi poczekalnia

$$[0] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \ldots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+1] \ldots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+k] \ldots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}$$

Prawdopodobieństwa graniczne:

$$\Pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\beta}{1-\beta} \right)^{-1}$$

zakładamy, że $\beta = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\alpha}{n} < 1$

(warunek istnienia prawdopodobieństw granicznych) zatem

$$\Pi_k = \frac{\alpha^k}{k!} \Pi_0 \text{ `}k = 1, 2, ..., n$$

$$\Pi_{n+j} = \beta^j \Pi_n \text{ `} \qquad j = 1, 2, ...$$

Uwaga.

dla k = 0, 1, 2, ..., n

$$\Pi_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} + \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha} \frac{\beta}{1-\beta}} = \frac{P_\alpha(k)}{\sum_{k=0}^{n} P_\alpha(k) + P_\alpha(n) \frac{\beta}{1-\beta}}$$

SMO bez strat (nieskończenie długa kolejka), z pełną współpracą.

$m = \infty$

stanowiska obsługi poczekalnia

$$[0] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \ldots. \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+1] \ldots. \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+m] \ldots. \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}$$

$P_{odm} = 0.$

zakładamy, że $\beta = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\alpha}{n}$ < 1 (**warunek istnienia prawdopodobieństw granicznych**)

Prawdopodobieństwa graniczne:

$$\Pi_0 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2+\ldots} = ?$$

$$\Pi_0 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2+\ldots} = 1-\beta$$

$$\Pi_j = \beta^j \Pi_0 \text{`} \qquad j = 1, 2, \ldots$$

SMO bez strat (zgłoszenia niecierpliwe), bez współpracy.

$m = \infty$

T_1 – czas oczekiwania w kolejce,

$$P(T_1 < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\nu t} & gdy \;\; t > 0 \\ 0 & gdy \;\; t \le 0 \end{cases}$$

ν - intensywność niecierpliwości,

stanowiska obsługi poczekalnia

$$[0] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \ldots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n] \underset{n\mu+\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+1] \ldots \underset{n\mu+m\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+m] \ldots$$

Prawdopodobieństwa graniczne:

$$\Pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{\lambda}{n\mu + \nu} + \frac{\lambda^2}{(n\mu+\nu)(n\mu+2\nu)} + \ldots + \frac{\lambda^m}{(n\mu+\nu)\ldots(n\mu+m\nu)} + \ldots \right) \right)^{-1}$$

zakładamy, że powyższy szereg jest zbieżny.

Zatem

$\Pi_k = \frac{\alpha^k}{k!}\Pi_0$ ` k = 1, 2, ..., n $\quad \Pi_n = \frac{\alpha^n}{n!}\Pi_0$

$\Pi_{n+j} = \Pi_n \frac{\lambda^j}{(n\mu+\nu)\ldots(n\mu+j\nu)}$ ` j = 1, 2, ...

Charakterystyki SMO.

m_{kl} - średnia liczba klientów w SMO (stanowiska obsługi + poczekalnia),

m_k - średnia długość kolejki,

m_{zs} - średnia liczba zajętych stanowisk, SMO z ograniczonymi stratami, bez współpracy.

Y - liczba zajętych stanowisk obsługi,

Y	0	1	...	n - 1	n
p	π_0	π_1	...	π_{n-1}	$\pi_n + \pi_{n+1} + \ldots + \pi_{n+m}$

$$m_{zs} = EY = \alpha(1 - \Pi_{n+m}) = \alpha\ P_{obs^{3}}$$

Z - liczba zajętych miejsc w poczekalni,

Z	0	1	...	m
p	$\sum_{i=0}^{n} \pi_i$	π_{n+1}	...	π_{n+m}

$$m_k = EZ = \begin{cases} \Pi_n \left(\dfrac{m(m+1)}{2} \right) & dla \ \ \beta = 1 \\ \Pi_n \beta \left(\dfrac{1-(m+1)\beta^m + m\beta^{m+1}}{(1-\beta)^2} \right) & dla \ \ \beta \neq 1 \end{cases}$$

Uwaga.

Dowód dla $\beta \neq 1$ wynika z następującej własności:

$$\sum_{k=1}^{m} kx^k = x\sum_{k=1}^{m} kx^{k-1} = x\left(\sum_{k=1}^{m} x^k\right)' = x\left(x\frac{1-x^m}{1-x}\right)' =$$

$$= x\left(\frac{x-x^{m+1}}{1-x}\right)' = x\left(\frac{1-(m+1)x^m + mx^{m+1}}{(1-x)^2}\right)$$

X - liczba zgłoszeń w SMO, $X = Y + Z$,
Zatem

$$\mathbf{m_{kl} = EX = EY + EZ = m_{zs} + m_k}$$

Wniosek.
Jeśli m = 0 (brak poczekalni) to

$$\mathbf{EZ = 0, \qquad EX = EY = \alpha(1 - \pi_n)}$$

Wniosek.

Jeśli m = ∞ to $\pi_{n+m} \to 0$ (gdy m $\to \infty$) oraz

$$\mathbf{EY = \alpha} \qquad \qquad EZ = \Pi_n \beta \frac{1}{(1-\beta)^2}$$

t_{syst} - średni czas przebywania w SMO,

$$\mathbf{t_{syst} = m_{kl}/\lambda} \quad \textbf{(wzór Little'a)}$$

t_{kol} - średni czas przebywania w kolejce,

$$\mathbf{t_{kol} = m_k/\lambda}$$

Niech m = ∞ (wtedy $\beta < 1$)

Z - czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce.

$$P(Z > z) = \begin{cases} 1 & dla \quad z < 0 \\ \dfrac{\Pi_n}{1-\beta} e^{-n\mu z(1-\beta)} & dla \quad z \geq 0 \end{cases}$$

Klasyfikacja kolejek.

Priorytety obsługi:

FIFO (first in first of),

SIRO (selection in random order),

LIFO (last in first out).

Rozpatrywany przez nas priorytet to FIFO.

Klasyfikacja Kendalla:

$$X_1/X_2/n : (N, m),$$

X_1 - rozkład czasu między kolejnymi zgłoszeniami,

X_2 - rozkład czasu obsługi jednego zgłoszenia,

n - liczba stanowisk obsługi,

N - liczebność obsługiwanej populacji,

m - liczba miejsc w poczekalni.

Dla rozkładów X_1, X_2 przyjęto m in. oznaczenia:

D - rozkład deterministyczny (równe odstępy czasu),

M - rozkład wykładniczy,

G - dowolny rozkład,

Rozpatrywany przez nas markowskie SMO ma oznaczenie

$$M/M/n : (\infty, m)$$

Przykład.

Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy, $\lambda = 2$ zgł./h; $\mu = 4$ zgł./h ($\alpha = \lambda/\mu = 0{,}5$).

Wyznacz minimalną liczbę stanowisk obsługi tak aby $P_{odm} < 0{,}05$.

Sposób I.

Rozpatrujemy na przykład $n = 2$.

$$\Pi_0 = \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)^{-1} = \frac{8}{13} \qquad \Pi_1 = \frac{\alpha}{1!}\Pi_0 = \frac{4}{13} \qquad \Pi_2 = \frac{\alpha^2}{2!}\Pi_0 = \frac{1}{13} > 0{,}05$$

Należy zatem zwiększyć n.

Rozpatrujemy n = 3.

$$\Pi_0 = \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48}\right)^{-1} = \frac{48}{79}$$

wtedy $\Pi_1 = \frac{\alpha}{1!}\Pi_0 = \frac{24}{79}$ $\quad \Pi_2 = \frac{\alpha^2}{2!}\Pi_0 = \frac{6}{79}$ $\quad \Pi_3 = \frac{\alpha^3}{3!}\Pi_0 = \frac{1}{79} < 0{,}05$

Ponieważ $\pi_3 = P_{odm} = 1/79 < 0{,}05$ zatem powinny być przynajmniej 3 stanowiska.

Sposób II (z wykorzystaniem tablic rozkładu Poissona)
Rozpatrujemy na przykład n = 2.

$$\Pi_2 = \frac{P_\alpha(j)}{\sum_{j=0}^{n} P_\alpha(j)} = \frac{P_{0,5}(2)}{P_{0,5}(0)+P_{0,5}(1)+P_{0,5}(2)} = \frac{0,0758}{0,6065+0,3033+0,0758} = 0,077$$

Należy zatem zwiększyć n.
Rozpatrujemy n = 3.

$$\Pi_3 = \frac{P_{0,5}(3)}{P_{0,5}(0)+P_{0,5}(1)+P_{0,5}(2)+P_{0,5}(3)} = \frac{0,0126}{0,6065+0,3033+0,0758+0,0126} = 0,0126$$

Ponieważ $\pi_3 = P_{odm} = 0,0126 < 0,05$ zatem powinny być przynajmniej 3 stanowiska.

Przykład.

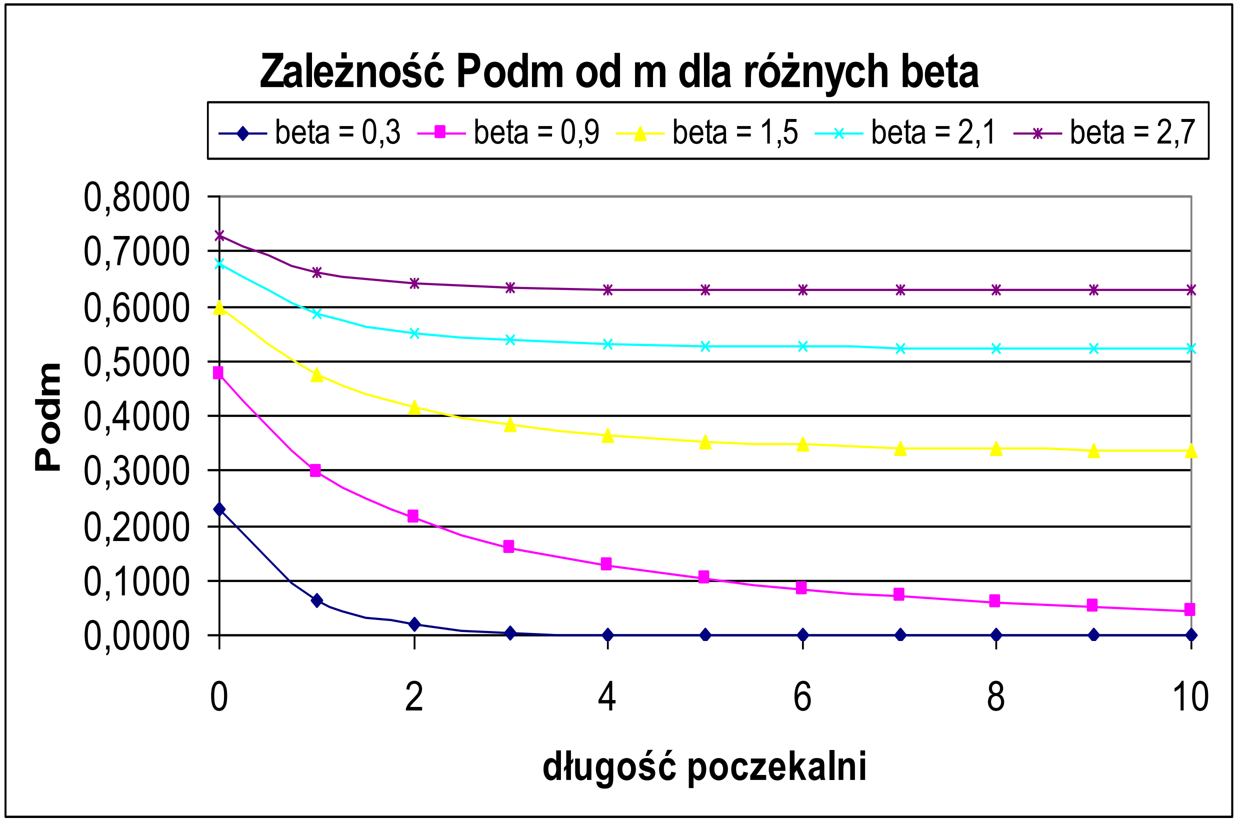
Rozpatrujemy SMO z jednym stanowiskiem obsługi. Zbadamy jak zmienia się P_{odm} dla różnych wartości α gdy długość poczekalni rośnie od m = 0 do m = 10.

W tym przypadku $\alpha = \beta$. Poszczególne kolumny zawierają P_{odm} dla ustalonego β i różnych m.

beta	0,3	0,9	1,5	2,1	2,7

m	Podm	Podm	Podm	Podm	Podm
0	0,2308	0,4737	0,6000	0,6774	0,7297
1	0,0647	0,2989	0,4737	0,5872	0,6633
2	0,0191	0,2120	0,4154	0,5522	0,6417
3	0,0057	0,1602	0,3839	0,5370	0,6340
4	0,0017	0,1260	0,3654	0,5300	0,6313
5	0,0005	0,1019	0,3541	0,5267	0,6302
6	0,0002	0,0840	0,3469	0,5252	0,6299
7	0,0000	0,0703	0,3422	0,5245	0,6297
8	0,0000	0,0595	0,3392	0,5241	0,6297
9	0,0000	0,0508	0,3372	0,5240	0,6296
10	0,0000	0,0437	0,3359	0,5239	0,6296

Jak widać P_{odm} maleje gdy rośnie liczba miejsc w poczekalni.



W bardzo prostych przypadkach można korzystając z układu równań Kołmogorowa wyznaczyć dokładne wartości prawdopodobieństw liczby klientów w systemie w chwili t.

Przykład.

SMO z jednym stanowiskiem obsługi bez poczekalni.

X(t) - liczba klientów w systemie w chwili t.

$$[0] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1]$$

Układ równań Kołmogorowa (p. wykł. 4)

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda \; p_0(t) + \mu \, p_1(t) \\ p_1'(t) = \lambda \; p_0(t) - \mu \; p_1(t) \end{cases}$$

rozkład początkowy ma postać **[1, 0].**

Rozwiązując ten układ mamy

Zatem $p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

$$p_1(t) = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Prawdopodobieństwa graniczne są równe

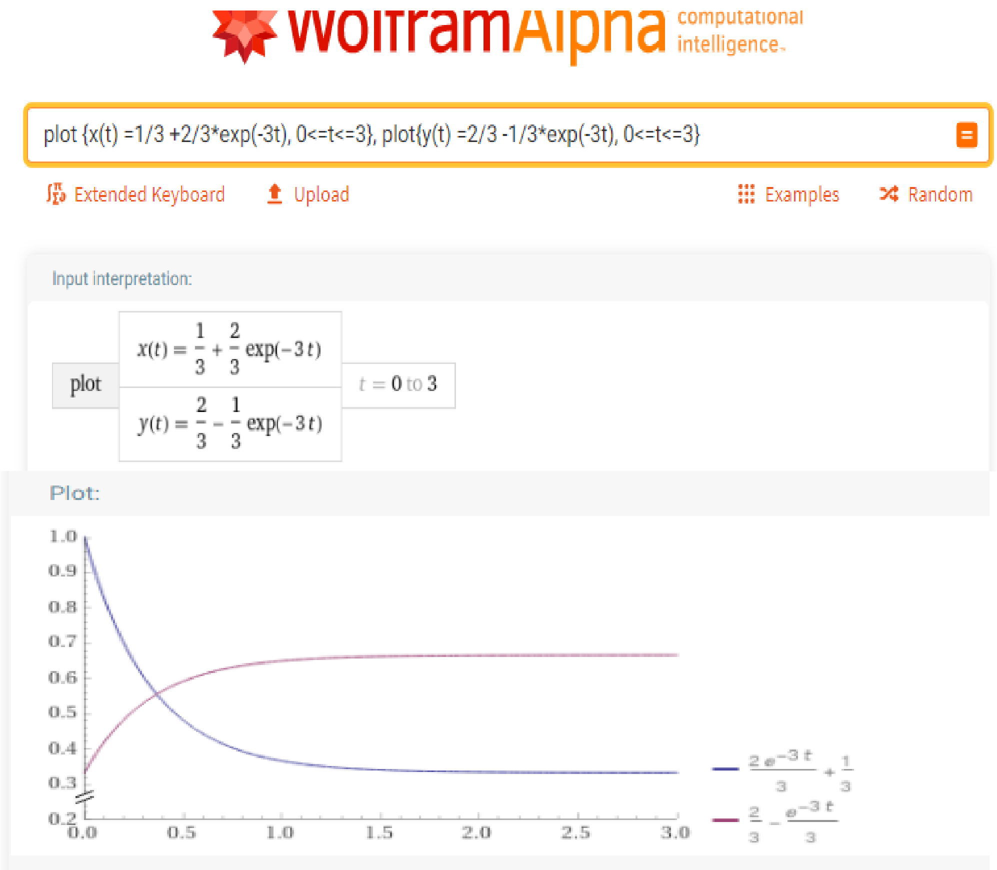
$$\Pi = \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}; \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right]$$

Dla $\lambda = 2$, $\mu = 1$ mamy

Zatem $p_0(t) = \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}$

$$p_1(t) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{-3t}$$

Wykresy tych funkcji.



Prawdopodobieństwa graniczne są równe

$$\Pi = \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$$

Przykład.
SMO z jednym stanowiskiem obsługi i jednym miejscem w poczekalni.
X(t) - liczba klientów w systemie w chwili t.

$$[0] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [2]$$

Układ równań Kołmogorowa

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda \; p_0(t) + \mu \, p_1(t) \\ p_1'(t) = \lambda \; p_0(t) - (\lambda + \mu) \; p_1(t) + \mu \, p_2(t) \\ p_2'(t) = \lambda \; p_1(t) - \mu \; p_2(t) \end{cases}$$

rozkład początkowy ma postać **[1, 0, 0].**

Rozwiązując ten układ mamy

WolframAlpha computational intelligence.

solve {x'(t)+λ*x(t)=μ*y(t), y'(t)+(λ+μ)*y(t)=λ*x(t)+μ*z(t), z'(t)+μ*z(t)=λ*y(t), x(0)=1, y(0)=0, z(0)=0}

Extended Keyboard   Upload   Examples

Input:

$$\{x'(t) + \lambda\, x(t) = \mu\, y(t),\ y'(t) + (\lambda + \mu)\, y(t) = \lambda\, x(t) + \mu\, z(t),\ z'(t) + \mu\, z(t) = \lambda\, y(t),\ x(0) = 1,\ y(0) = 0,\ z(0) = 0\}$$

ODE classification:

First-order system of linear differential equations

Alternate form:

$$\{x'(t) = \mu\, y(t) - \lambda\, x(t),\ y'(t) = \lambda\, x(t) + (-\lambda - \mu)\, y(t) + \mu\, z(t),\ z'(t) = \lambda\, y(t) - \mu\, z(t),\ x(0) = 1,\ y(0) = 0,\ z(0) = 0\}$$

Differential equation solutions:

$$x(t) = \left(2\mu^2 - \lambda^{3/2}\sqrt{\mu}\, e^{t(-\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}-\lambda-\mu)} + \lambda^{3/2}\sqrt{\mu}\, e^{t(\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}-\lambda-\mu)} + \lambda^2 e^{t(-\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}-\lambda-\mu)} + \lambda^2 e^{t(\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}-\lambda-\mu)} + \lambda\mu\, e^{t(-\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}-\lambda-\mu)} + \lambda\mu\, e^{t(\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}-\lambda-\mu)}\right) \Big/ \left(2(-\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu} + \lambda + \mu)(\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu} + \lambda + \mu)\right)$$

$$y(t) = -\left(\left(\lambda\left(-2\mu^{3/2} + \lambda^{3/2} e^{t(-\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}-\lambda-\mu)} - \lambda^{3/2} e^{t(\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}-\lambda-\mu)} + \mu^{3/2} e^{t(-\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}-\lambda-\mu)} + \mu^{3/2} e^{t(\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}-\lambda-\mu)}\right)\right) \Big/ \left(2\sqrt{\mu}\,(-\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu} + \lambda + \mu)(\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu} + \lambda + \mu)\right)\right)$$

$$z(t) = \left(\lambda^{3/2}\left(2\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu} + \lambda\, e^{t(-\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}-\lambda-\mu)} - \lambda\, e^{t(\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}-\lambda-\mu)} - \sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}\, e^{t(-\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}-\lambda-\mu)} - \sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}\, e^{t(\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}-\lambda-\mu)} + \mu\, e^{t(-\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}-\lambda-\mu)} - \mu\, e^{t(\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}-\lambda-\mu)}\right)\right) \Big/ \left(2\sqrt{\mu}\,(-\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu} + \lambda + \mu)(\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu} + \lambda + \mu)\right)$$

Dla $\lambda = 1$, $\mu = 1$ mamy

Zatem $$p_0(t) = \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{3}$$

$$p_1(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$$

$$p_2(t) = \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{3} = p_{odm}(t)$$

Wykresy tych funkcji.

$$p_0(t) = \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{3}$$

WolframAlpha

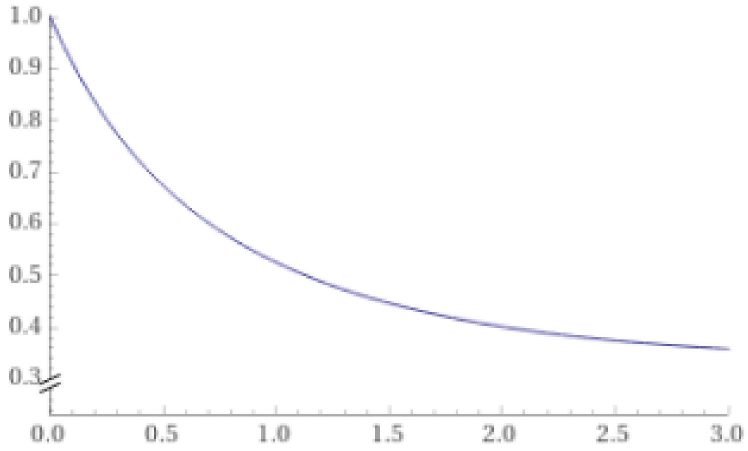
plot {x(t) =1/3 +1/6*exp(-3t)+1/2*exp(-t), 0<=t<=3}

Extended Keyboard Upload

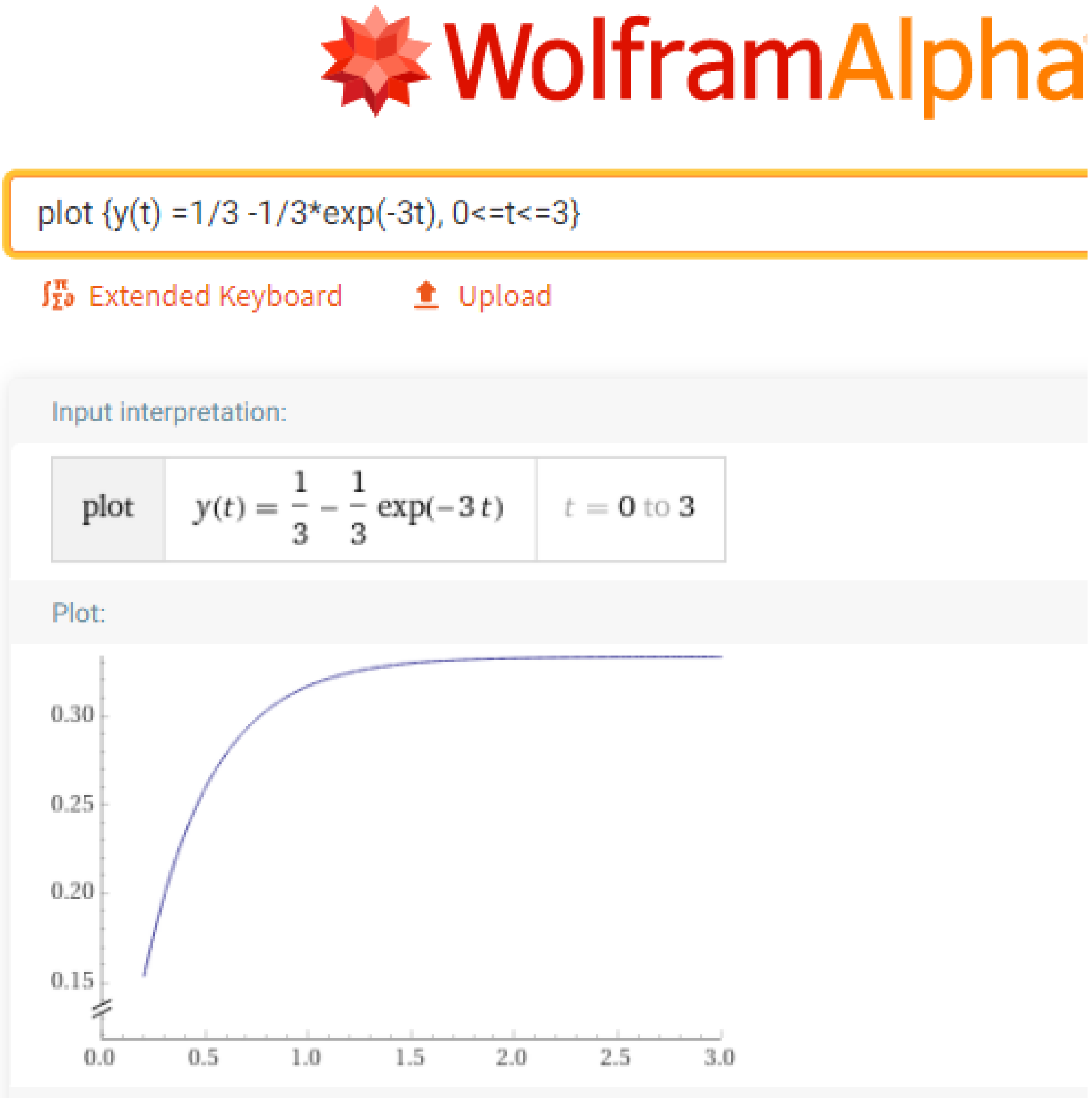
Input interpretation:

plot	$x(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\exp(-3\,t) + \frac{1}{2}\exp(-t)$	$t = 0$ to 3

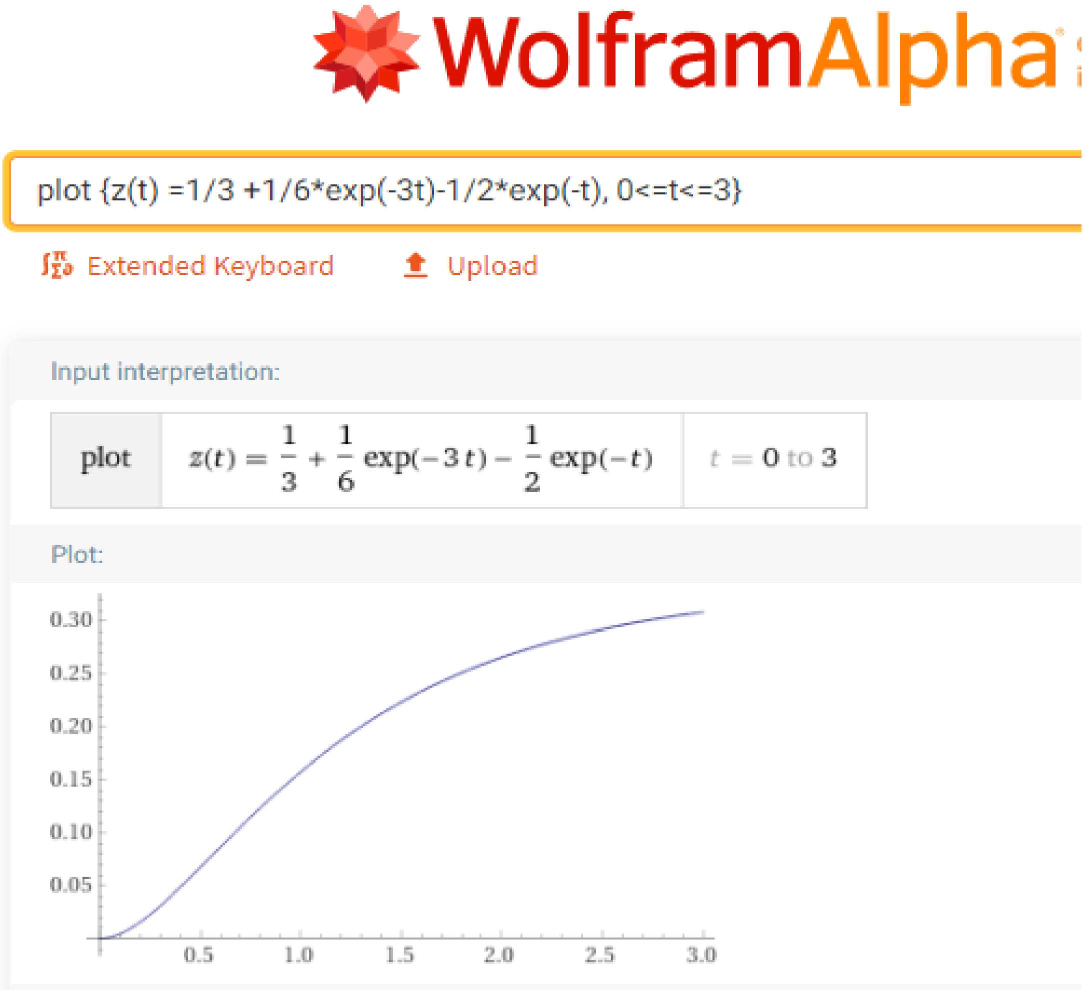
Plot:



$$p_1(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$$



$$p_2(t) = \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{3} = p_{odm}(t)$$



Prawdopodobieństwa graniczne są równe

$$\Pi = \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$$

Dodatek Tablica rozkładu Poissona i tablica skumulowanego rozkładu Poissona.

Poisson-f.prawdopodobieństwa nieskumulowana

alfa n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0,01	0,9900	0,0099	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,05	0,9512	0,0476	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,9048	0,0905	0,0045	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	0,8187	0,1637	0,0164	0,0011	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,3	0,7408	0,2222	0,0333	0,0033	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,4	0,6703	0,2681	0,0536	0,0072	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,5	0,6065	0,3033	0,0758	0,0126	0,0016	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,6	0,5488	0,3293	0,0988	0,0198	0,0030	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,7	0,4966	0,3476	0,1217	0,0284	0,0050	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,8	0,4493	0,3595	0,1438	0,0383	0,0077	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,9	0,4066	0,3659	0,1647	0,0494	0,0111	0,0020	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,1	0,3329	0,3662	0,2014	0,0738	0,0203	0,0045	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,2	0,3012	0,3614	0,2169	0,0867	0,0260	0,0062	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,3	0,2725	0,3543	0,2303	0,0998	0,0324	0,0084	0,0018	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,4	0,2466	0,3452	0,2417	0,1128	0,0395	0,0111	0,0026	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,5	0,2231	0,3347	0,2510	0,1255	0,0471	0,0141	0,0035	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,6	0,2019	0,3230	0,2584	0,1378	0,0551	0,0176	0,0047	0,0011	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,7	0,1827	0,3106	0,2640	0,1496	0,0636	0,0216	0,0061	0,0015	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,8	0,1653	0,2975	0,2678	0,1607	0,0723	0,0260	0,0078	0,0020	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,9	0,1496	0,2842	0,2700	0,1710	0,0812	0,0309	0,0098	0,0027	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034	0,0009	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,2	0,1108	0,2438	0,2681	0,1966	0,1082	0,0476	0,0174	0,0055	0,0015	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,4	0,0907	0,2177	0,2613	0,2090	0,1254	0,0602	0,0241	0,0083	0,0025	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,5	0,0821	0,2052	0,2565	0,2138	0,1336	0,0668	0,0278	0,0099	0,0031	0,0009	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,6	0,0743	0,1931	0,2510	0,2176	0,1414	0,0735	0,0319	0,0118	0,0038	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,8	0,0608	0,1703	0,2384	0,2225	0,1557	0,0872	0,0407	0,0163	0,0057	0,0018	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1680	0,1008	0,0504	0,0216	0,0081	0,0027	0,0008	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
3,5	0,0302	0,1057	0,1850	0,2158	0,1888	0,1322	0,0771	0,0385	0,0169	0,0066	0,0023	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000
4	0,0183	0,0733	0,1465	0,1954	0,1954	0,1563	0,1042	0,0595	0,0298	0,0132	0,0053	0,0019	0,0006	0,0002	0,0001	0,0000
5	0,0067	0,0337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1755	0,1462	0,1044	0,0653	0,0363	0,0181	0,0082	0,0034	0,0013	0,0005	0,0002
8	0,0003	0,0027	0,0107	0,0286	0,0573	0,0916	0,1221	0,1396	0,1396	0,1241	0,0993	0,0722	0,0481	0,0296	0,0169	0,0090
10	0,0000	0,0005	0,0023	0,0076	0,0189	0,0378	0,0631	0,0901	0,1126	0,1251	0,1251	0,1137	0,0948	0,0729	0,0521	0,0347

Poisson p-stwo skumulowane (dystrybuanta prawostronnie ciągła)

alfa n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0,01	0,9900	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,05	0,9512	0,9988	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,9048	0,9953	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	0,8187	0,9825	0,9989	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,3	0,7408	0,9631	0,9964	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,4	0,6703	0,9384	0,9921	0,9992	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,5	0,6065	0,9098	0,9856	0,9982	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,6	0,5488	0,8781	0,9769	0,9966	0,9996	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,7	0,4966	0,8442	0,9659	0,9942	0,9992	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,8	0,4493	0,8088	0,9526	0,9909	0,9986	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,9	0,4066	0,7725	0,9371	0,9865	0,9977	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,3679	0,7358	0,9197	0,9810	0,9963	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,1	0,3329	0,6990	0,9004	0,9743	0,9946	0,9990	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,2	0,3012	0,6626	0,8795	0,9662	0,9923	0,9985	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,3	0,2725	0,6268	0,8571	0,9569	0,9893	0,9978	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,4	0,2466	0,5918	0,8335	0,9463	0,9857	0,9968	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,5	0,2231	0,5578	0,8088	0,9344	0,9814	0,9955	0,9991	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,6	0,2019	0,5249	0,7834	0,9212	0,9763	0,9940	0,9987	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,7	0,1827	0,4932	0,7572	0,9068	0,9704	0,9920	0,9981	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,8	0,1653	0,4628	0,7306	0,8913	0,9636	0,9896	0,9974	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,9	0,1496	0,4337	0,7037	0,8747	0,9559	0,9868	0,9966	0,9992	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0,1353	0,4060	0,6767	0,8571	0,9473	0,9834	0,9955	0,9989	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,2	0,1108	0,3546	0,6227	0,8194	0,9275	0,9751	0,9925	0,9980	0,9995	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,4	0,0907	0,3084	0,5697	0,7787	0,9041	0,9643	0,9884	0,9967	0,9991	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,5	0,0821	0,2873	0,5438	0,7576	0,8912	0,9580	0,9858	0,9958	0,9989	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,6	0,0743	0,2674	0,5184	0,7360	0,8774	0,9510	0,9828	0,9947	0,9985	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,8	0,0608	0,2311	0,4695	0,6919	0,8477	0,9349	0,9756	0,9919	0,9976	0,9993	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0,0498	0,1991	0,4232	0,6472	0,8153	0,9161	0,9665	0,9881	0,9962	0,9989	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3,5	0,0302	0,1359	0,3208	0,5366	0,7254	0,8576	0,9347	0,9733	0,9901	0,9967	0,9990	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
4	0,0183	0,0916	0,2381	0,4335	0,6288	0,7851	0,8893	0,9489	0,9786	0,9919	0,9972	0,9991	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000
5	0,0067	0,0404	0,1247	0,2650	0,4405	0,6160	0,7622	0,8666	0,9319	0,9682	0,9863	0,9945	0,9980	0,9993	0,9998	0,9999
8	0,0003	0,0030	0,0138	0,0424	0,0996	0,1912	0,3134	0,4530	0,5925	0,7166	0,8159	0,8881	0,9362	0,9658	0,9827	0,9918
10	0,0000	0,0005	0,0028	0,0103	0,0293	0,0671	0,1301	0,2202	0,3328	0,4579	0,5830	0,6968	0,7916	0,8645	0,9165	0,9513