

ESTYMACJA PUNKTOWA I PRZEDZIAŁOWA

ROZKŁADY PODSTAWOWYCH STATYSTYK

X – zmienna losowa – odpowiednik badanej cechy,

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – próba losowa (zmienna losowa n wymiarowa, X_i – niezależne zmienne losowe o takim samym rozkładzie jak X). Jeśli x_i jest wartością zmiennej X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) to ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazywamy realizacją próby (są to dane statystyczne).

Statystyka to (praktycznie) dowolna funkcja od próby

$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Statystyka przekształca informację zawartą w próbie czyniąc prostszym wnioskowanie o rozkładzie cechy w populacji.

Statystyka jako funkcja od zmiennej losowej jest też zmienną losową i możemy mówić o jej rozkładzie.

Statystyki podstawowe:

$$\bar{X} = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{średnia z próby}$$

$$S^2 = S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \quad \text{wariancja z próby}$$

$$S = S_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} \quad \text{odchylenie standardowe z próby}$$

$$V = \frac{S}{\bar{X}} \quad \text{współczynnik zmienności}$$

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \quad \text{wariancja z próby – nieobciążona}$$

$$S^{02} = S_n^{02} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 \quad \text{wariancja z próby dla danej wartości oczekiwanej } m.$$

Uwaga

$$\hat{S}_n^2 = \frac{n}{n-1} S_n^2 \quad S_n^2 = \frac{n-1}{n} \hat{S}_n^2$$

$$\text{zatem dla dużych } n \quad \hat{S}_n^2 \approx S_n^2$$

Rozkłady niektórych statystyk:

Jeśli cecha X ma rozkład $N(m, \sigma)$, to:

a) statystyka $\bar{X}_n$ ma rozkład $N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$,

b) statystyka $\frac{\bar{X}_n - m}{S_n} \sqrt{n-1}$ ma rozkład Studenta z $n-1$ stopniami swobody,

c) statystyka $\frac{nS_n^{02}}{\sigma^2}$ ma rozkład chi kwadrat z n stopniami swobody,

d) statystyka $\frac{nS_n^2}{\sigma^2}$ ma rozkład chi kwadrat z $n-1$ stopniami swobody,

Jeśli cecha X ma rozkład $N(m_1, \sigma_1^2)$ a cecha Y ma rozkład $N(m_2, \sigma_2^2)$, (próby niezależne odpowiednio n_1 i n_2 elementowe) to:

e) statystyka $\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2}$ ma rozkład $N\left(m_1 - m_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$,

f) statystyka $\frac{\frac{\hat{S}_{n_1}^2(X)}{\sigma_1^2}}{\frac{\hat{S}_{n_2}^2(Y)}{\sigma_2^2}}$ ma rozkład F_{n_1-1, n_2-1} ,

Uwaga

- Statystyki $\bar{X}_n$ i S_n^2 oraz statystyki $\bar{X}_n$ i $S_n^{0,2}$ są zmiennymi losowymi niezależnymi,
- Ciąg średnich z próby jest zbieżny (wg prawdopodobieństwa) do wartości oczekiwanej m rozpatrywanej cechy (zakładamy, że $EX = m$ istnieje),
- Ciąg wariancji z próby jest zbieżny (wg prawdopodobieństwa) do wariancji σ^2 rozpatrywanej cechy (zakładamy, że $D^2X = \sigma^2 > 0$ istnieje),
- Gdy spełnione są założenia punktu b) i c) to średnia ma dla dużych n w przybliżeniu rozkład $N\left(m, \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$. W szczególności średnia liczba sukcesów dla rozkładu dwumianowego ma w przybliżeniu rozkład $N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.

ESTYMACJA PUNKTOWA

Niech θ – nieznaną parametr rozkładu cechy X .

Wartość parametru θ będziemy estymować (przybliżać) na podstawie n elementowej próby, w następujący sposób:

- wybieramy statystykę U_n o rozkładzie zależnym od θ
- obliczamy na podstawie próby jej wartość u_n
- przyjmujemy, że $\theta \approx u_n$

Statystykę U_n nazywamy **estymatorem** parametru θ .

Klasyfikacja estymatorów

Estymator U_n jest:

- zgodny** jeśli $U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$ wg prawdopodobieństwa
- nieobciążony** jeśli $E(U_n) = \theta$
- asymptotycznie nieobciążony** jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} E(U_n) = \theta$
- najefektywniejszy** gdy jest nieobciążony i ma najmniejszą wariancję w klasie nieobciążonych estymatorów tego parametru,
- asymptotycznie najefektywniejszy** gdy jest nieobciążony lub asymptotycznie nieobciążony i jego wariancja dąży do wariancji estymatora najefektywniejszego.

Uwaga

- w praktyce zgodność estymatora sprawdza się na podstawie praw wielkich liczb lub korzysta się z faktu, że estymator nieobciążony (asymptotycznie nieobciążony), którego wariancja dąży do zera (tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} D^2U_n = 0$) jest estymatorem zgodnym.

- w praktyce efektywność estymatora bada się na podstawie nierówności Rao-Cramera: Dla (praktycznie każdego) estymatora nieobciążonego U_n prawdziwa jest nierówność

$$D^2 U_n \geq \frac{1}{n \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{d\theta} \ln p_i(\theta) \right)^2 p_i(\theta)} \quad \text{dla zmiennej losowej skokowej}$$

$$D^2 U_n \geq \frac{1}{n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \theta) \right)^2 f(x, \theta) dx} \quad \text{dla zmiennej losowej ciągłej}$$

Przy czym dla estymatora najefektywniejszego zachodzi równość (jeśli istnieje estymator najefektywniejszy to prawe strony powyższych nierówności są równe jego wariancji).

Przykład

Niech $X \sim N(m; \sigma)$. Przyjmijmy, że estymatorem parametru m jest $\bar{X}_n$.

Sprawdzimy własności tego estymatora.

Rozwiązanie:

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m = \frac{1}{n} nm = m$$

zatem jest to estymator nieobciążony.

$$D^2(\bar{X}_n) = D^2\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D^2(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D^2(\bar{X}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

zatem jest to (p. uwaga) estymator zgodny.

Wyznamy prawą stronę nierówności Rao-Cramera:

$$\frac{1}{n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial m} \ln f(x, m) \right)^2 f(x, m) dx} = \frac{1}{\sigma^4 \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x, m) dx} = \frac{1}{\sigma^4 \sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

zatem jest to estymator najefektywniejszy.

Przykład

Niech $X \sim N(m; \sigma)$. Obliczymy $E(S_n^2)$, $E(\hat{S}_n^2)$.

Rozwiązanie:

$$E(S_n^2) = E\left(\frac{\sigma^2}{n} \frac{n S_n^2}{\sigma^2}\right) = \frac{\sigma^2}{n} E\left(\frac{n S_n^2}{\sigma^2}\right) = \frac{\sigma^2}{n} (n-1)$$

bo statystyka $\frac{n S_n^2}{\sigma^2}$ ma rozkład chi kwadrat z $n-1$ stopniami swobody, oraz wartość oczekiwana zmiennej losowej o rozkładzie chi kwadrat jest równa liczbie stopni swobody.

$$E(\hat{S}_n^2) = E\left(\frac{n}{n-1} S_n^2\right) = \frac{n}{n-1} E(S_n^2) = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2.$$

Powyższe wzory są również prawdziwe dla dowolnej cechy jeśli tylko istnieje jej wartość oczekiwana $EX = m$ i wariancja $D^2 X = \sigma^2 > 0$.

Bowiem korzystając z własności $E(X^2) = D^2 X + (EX)^2 = \sigma^2 + m^2$ mamy:

$$\begin{aligned}
E(S_n^2) &= E\left(\frac{1}{n} \sum X_k^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum X_k\right)^2\right) = \frac{1}{n} \sum E(X_k^2) - \frac{1}{n^2} E\left(\sum X_k\right)^2 = \\
&= \frac{1}{n} \sum (\sigma^2 + m^2) - \frac{1}{n^2} \left(D^2\left(\sum X_k\right) + \left(E \sum X_k\right)^2\right) = \\
&= \sigma^2 + m^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum \sigma^2 + \left(\sum m\right)^2\right) = \\
&= \sigma^2 + m^2 - \frac{1}{n^2} (n\sigma^2 + n^2 m^2) = \frac{\sigma^2}{n} (n-1)
\end{aligned}$$

Wniosek

S_n^2 jest estymatorem asymptotycznie nieobciążonym parametru σ^2 bowiem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(S_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2$$

$\hat{S}_n^2$ jest estymatorem nieobciążonym parametru σ^2 .

Estymatory parametrów rozkładu $N(m, \sigma)$.

Parametr	Estymator	Własności estymatora
m	$\bar{X}_n$	Zgodny. Nieobciążony. Najefektywniejszy.
σ^2	S_n^2	Zgodny. Asymptot. nieobciążony. Asymptot. najefektywniejszy.
	$\hat{S}_n^2$	Zgodny. Nieobciążony. Asymptot. najefektywniejszy.
	$S_n^{0,2}$	Zgodny. Nieobciążony. Najefektywniejszy.
σ	$S_n \quad \hat{S}_n \quad S_n^0$	Zgodne. Asymptot. nieobciążone. Asymptot. najefektywniejsze.

Estymatory innych parametrów.

Parametr	Estymator	Własności estymatora
Wartość oczekiwana (rozkład dowolny)	$\bar{X}_n$	Zgodny. Nieobciążony.
λ (rozkład Poissona)	$\bar{X}_n$	Zgodny. Nieobciążony. Najefektywniejszy.
p (rozkład zerojedynkowy)	$\frac{\text{liczba sukcesów}}{n} =$ $= \text{średnia liczba sukcesów}$	Zgodny. Nieobciążony. Najefektywniejszy.
Wariancja (rozkład dowolny)	S_n^2	Zgodny. Asymptot. nieobciążony.
	$\hat{S}_n^2$	Zgodny. Nieobciążony.

Wyznaczanie estymatorów metodą momentów

Nieznane momenty teoretyczne cechy X szacujemy przez momenty empiryczne tego samego rzędu. Dla uproszczenia rozpatrujemy tylko momenty zwykłe.

Momenty teoretyczne:

$m_k = E(X^k)$ – moment rzędu k zmiennej losowej X ($m_1 = EX$).

$m_{kl} = E(X^k Y^l)$ – moment rzędu k, l zmiennej losowej (X, Y) .

Momenty empiryczne:

$$M_k = \frac{1}{n} \sum x_i^k - \text{moment rzędu } k \text{ cechy } X \quad (M_1 = \bar{X}_n).$$

$$M_{kl} = \frac{1}{n} \sum x_i^k \cdot y_i^l - \text{moment rzędu } k, l \text{ jednocześnie badanych cech } (X, Y).$$

Zatem przyjmujemy, że: $m_k \cong M_k$ oraz $m_{kl} \cong M_{kl}$

Parametry będące funkcjami momentów teoretycznych szacuje się przez wartości tych funkcji obliczone dla momentów empirycznych.

Estymatory uzyskane tą metodą nie mają zwykle dobrych własności (najczęściej mała efektywność).

Przykład

Dla rozkładu wykładniczego z parametrem a mamy wartość oczekiwaną równą $EX = m_1 = 1/a$. Ponieważ przyjmujemy $m_1 \cong M_1$ to

$$1/a \cong \bar{X}_n, \text{ zatem estymatorem parametru } a \text{ jest } \frac{1}{\bar{X}_n}.$$

Przykład

Dla zmiennej losowej dwuwymiarowej współczynnik korelacji możemy wyrazić za pomocą momentów

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{DX \cdot DY} = \frac{m_{11} - m_{10} \cdot m_{01}}{\sqrt{m_{20} - m_{10}^2} \cdot \sqrt{m_{02} - m_{01}^2}}$$

zatem jego estymatorem może być:

$$\begin{aligned} \rho \approx r &= \frac{M_{11} - M_{10} \cdot M_{01}}{\sqrt{M_{20} - M_{10}^2} \cdot \sqrt{M_{02} - M_{01}^2}} = \\ &= \frac{\frac{1}{n} \sum x_i \cdot y_i - \frac{1}{n} \sum x_i \cdot \frac{1}{n} \sum y_i}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum x_i\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum y_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum y_i\right)^2}} = \frac{\frac{1}{n} \sum x_i \cdot y_i - \bar{X} \bar{Y}}{S_X \cdot S_Y} \end{aligned}$$

Wyznaczanie estymatorów metodą największej wiarygodności (MNW)

Dla uproszczenia rozpatrujemy przypadek gdy nieznany jest tylko jeden parametr rozkładu.

a) wyznaczamy funkcję wiarygodności

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p(\theta; x_i) \quad \text{dla zmiennej losowej skokowej}$$

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(\theta; x_i) \quad \text{dla zmiennej losowej ciągłej}$$

b) wyznaczamy logarytm funkcji wiarygodności, $l(\theta) = \ln L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$

c) wyznaczamy θ dla którego funkcja $l(\theta)$ ma maksimum (w tym celu obliczamy pochodną funkcji $l(\theta)$, wyznaczamy miejsce zerowe pochodnej i sprawdzamy czy w tym punkcie druga pochodna jest ujemna),

d) przyjmujemy, że wyznaczony w ten sposób wzór na θ jest poszukiwanym estymatorem.

Uwaga

- a) Estymatory uzyskane tą metodą są zwykle co najmniej zgodne, asymptotycznie nieobciążone i asymptotycznie najefektywniejsze.
- b) Estymator NW dla różnowartościowej funkcji parametrów jest tą funkcją od estymatorów NW tych parametrów. Np. estymator NW odchylenia standardowego jest pierwiastkiem z estymatora NW dla wariancji.

Przykład

Wyznamy MNW estymator parametru λ rozkładu Poissona.

Funkcja wiarygodności:

$$L(\lambda) = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda} \dots \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{x_1+\dots+x_n}}{x_1! \dots x_n!} e^{-n\lambda}$$

$$l(\lambda) = \ln L(\lambda) = (x_1 + \dots + x_n) \ln \lambda - n\lambda - \ln(x_1! \dots x_n!)$$

$$l'(\lambda) = (x_1 + \dots + x_n) / \lambda - n$$

Wyznamy punkt krytyczny

$$l'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (x_1 + \dots + x_n) / \lambda - n = 0 \Leftrightarrow \lambda = (x_1 + \dots + x_n) / n = \bar{x}_n$$

sprawdzamy istnienie maksimum

$$l''(\lambda) = -(x_1 + \dots + x_n) / \lambda^2 < 0$$

Zatem estymatorem parametru λ jest średnia z próby.

PRZEDZIAŁY UFNOŚCI

Niech θ – nieznan parametr rozkładu cechy X , i α będzie liczbą z przedziału $(0, 1)$.

Jeśli istnieją statystyki, $\underline{U}_n$ i $\bar{U}_n$; $\underline{U}_n < \bar{U}_n$; których rozkład zależy od θ oraz

$$P(\underline{U}_n \leq \theta \leq \bar{U}_n) = 1 - \alpha$$

to przedział losowy $\langle \underline{U}_n; \bar{U}_n \rangle$ nazywamy **przedziałem ufności** dla parametru θ , na **poziomie ufności** $1 - \alpha$.

Jeśli na podstawie próby obliczymy wartości $\underline{u}_n$ i $\bar{u}_n$ statystyk $\underline{U}_n$ i $\bar{U}_n$ to otrzymamy liczbowy przedział ufności.

Przykład

Trwałość żarówek z pewnej partii jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym $N(m, 100 \text{ h})$. Z partii tej pobrano próbę 16 żarówek i otrzymano

$\bar{x} = 2670 \text{ h}$. Oszacujemy średnią trwałość żarówek z tej partii przedziałem ufności, na poziomie ufności $1 - \alpha = 0,95$. Znajdziemy względny błąd tego oszacowania.

Rozwiązanie

Zastosujemy przedział ufności nr 1 (patrz zestawienie):

$$\langle \bar{x} - \frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}} \rangle. \text{ Mamy } \Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975, \text{ stąd } u_\alpha = 1,96, \text{ więc błąd (bezwzględny), czyli}$$

połowa długości przedziału ufności wynosi

$$\Delta = \frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}} = \frac{100 \cdot 1,96}{\sqrt{16}} = 49 \text{ h},$$

zatem szukanym przedziałem ufności jest przedział

$$\langle 2670 - 49; 2670 + 49 \rangle = \langle 2621; 2719 \rangle.$$

$$\text{Błąd względny } \delta = \frac{\sigma u_{\alpha}}{\bar{x}\sqrt{n}} = \frac{\Delta}{\bar{x}} = \frac{49}{2670} = 1,8\%.$$

Odp: Oszacowaniem średniej trwałości żarówek, na poziomie ufności 0,95 jest przedział $< 2621 ; 2769 >$. Błąd względny tego oszacowania wynosi 1,8%.

Przykład

Dokonano 5 pomiarów średnicy wałka i otrzymano: 20,15; 20,20; 20,25; 20,20; 20,15. Na poziomie ufności $1 - \alpha = 0,95$ oszacować rzeczywistą średnicę wałka. Jak duża powinna być liczba pomiarów aby błąd bezwzględny oszacowania był mniejszy niż 0,03.

Zwykle przyjmuje się, że wynik pomiaru jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym. Zastosujemy więc przedział ufności nr 2 (patrz zestawienie).

Średnia $\bar{x}$ wartość pomiaru wynosi 20,19 a odchylenie standardowe $s = 0,037$.

Z tablicy rozkładu Studenta dla 4 stopni swobody odczytujemy $u_{\alpha} = 2,776$.

Po podstawieniu do wzoru otrzymujemy

$$< 20,19 - 2,776 \cdot 0,037/2; 20,19 + 2,776 \cdot 0,037/2 > = \\ = < 20,19 - 0,051; 20,19 + 0,051 > = < 20,14; 20,24 >.$$

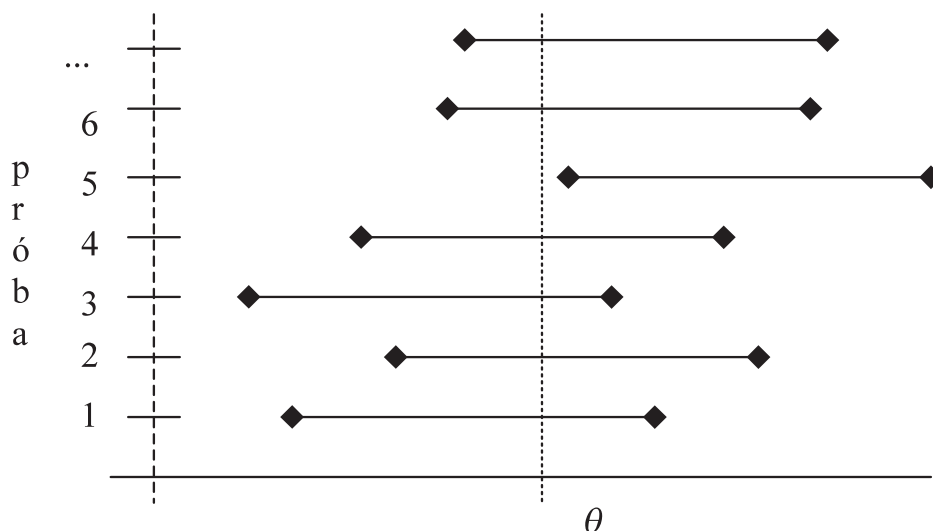
Aby uzyskać odpowiedni błąd bezwzględny musi być spełniona nierówność

$$\frac{s u_{\alpha}}{\sqrt{n-1}} < 0,03 \text{ czyli } \frac{0,037 \cdot 2,776}{\sqrt{n-1}} < 0,03. \text{ Stąd } n \geq 13.$$

Interpretacja poziomu ufności $1 - \alpha$.

Na ogół dla różnych prób otrzymuje się różne liczbowe przedziały ufności, lecz należy oczekiwać, że około $(1 - \alpha)100\%$ z nich będzie zawierać rzeczywistą wartość parametru θ .

Np. dla $1 - \alpha = 0,99$ oczekujemy, że przeciętnie w tylko jednej próbie na sto otrzymany liczbowy przedział ufności nie będzie zawierał parametru θ .



Uwaga

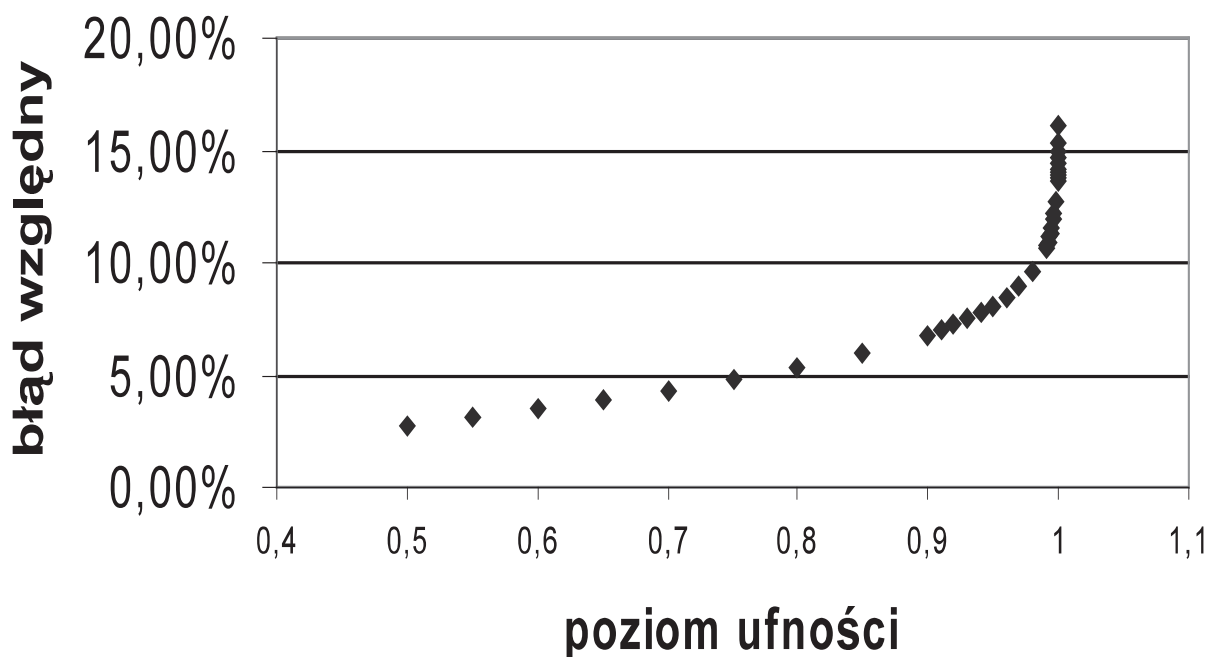
- Z powyższej interpretacji wynika, że poziom ufności nie może być zbyt niski. Jeśli natomiast zwiększamy nadmiernie wartość poziomu ufności to rośnie długość przedziału ufności i spada jakość oszacowania parametru (rośnie błąd bezwzględny i błąd względny – wynika to z poniższego zestawienia przedziałów ufności). Dlatego przyjmuje się, że najbardziej odpowiednie wartości poziomu ufności mieszczą się w granicach 0,9 – 0,99.
- Jeśli chcemy poprawić jakość oszacowania nieznanego parametru przedziałem ufności to należy zwiększyć liczebność próby.

Przykład

Badana cecha ma rozkład $N(m, 2)$. Średnia z próby 10 elementowej wynosi 25. Wyznaczymy przedziały ufności dla wartości oczekiwanej dla różnych poziomów ufności. Sprawdzimy jak zmienia się błąd względny przy rozpatrywanych poziomach ufności. Stosujemy przedział ufności nr 1 (patrz zestawienie).

$1 - \alpha$	$1 - \alpha/2$	u_α	lewy – koniec	prawy – koniec	błąd względny
0,5	0,75	0,674	24,57	25,43	1,71%
0,6	0,8	0,842	24,47	25,53	2,13%
0,7	0,85	1,036	24,34	25,66	2,62%
0,8	0,9	1,282	24,19	25,81	3,24%
0,9	0,95	1,645	23,96	26,04	4,16%
0,92	0,96	1,751	23,89	26,11	4,43%
0,94	0,97	1,881	23,81	26,19	4,76%
0,95	0,975	1,960	23,76	26,24	4,96%
0,97	0,985	2,170	23,63	26,37	5,49%
0,99	0,995	2,576	23,37	26,63	6,52%
0,999	0,9995	3,290	22,92	27,08	8,32%
0,9995	0,99975	3,481	22,80	27,20	8,81%
0,9999	0,99995	3,891	22,54	27,46	9,84%

błąd względny jako funkcja poziomu ufności



Zatem błąd względny rośnie wraz ze wzrostem poziomu ufności.

Przykład

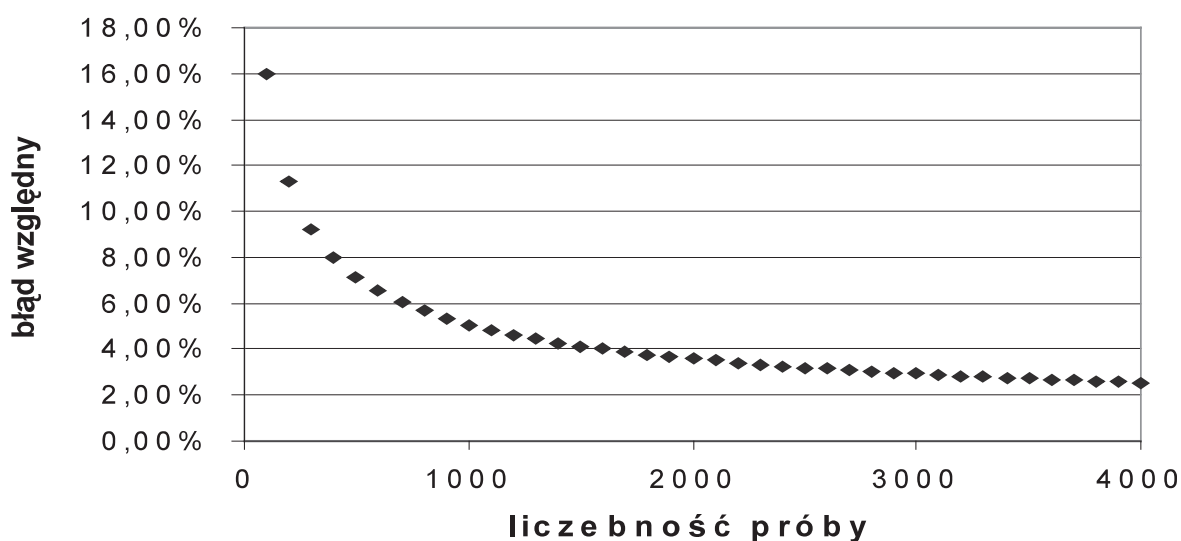
Zapytano 1000 wylosowanych dorosłych osób czy popierają wprowadzenie kary śmierci. Sześćset osób odpowiedziało twierdząco. Na poziomie ufności 0,95 oszacować odsetek wszystkich dorosłych osób popierających wprowadzenie kary śmierci. Zakładając, że rozpatrywane próby są reprezentatywne rozwiązujemy powyższe zadanie dla prób o różnych liczebnościach. W każdym przypadku obliczymy błąd względny. Stosujemy przedział ufności nr 8 (patrz zestawienie).

n	k	$1 - \alpha$	$1 - \alpha/2$	u_α	w
1000	600	0,95	0,975	1,959961	0,6

n	lewy koniec	prawy koniec	bł.wzgl.
100	0,5040	0,6960	16,00%
500	0,5571	0,6429	7,16%
1000	0,5696	0,6304	5,06%
1500	0,5752	0,6248	4,13%
2000	0,5785	0,6215	3,58%
2500	0,5808	0,6192	3,20%
3000	0,5825	0,6175	2,92%
3500	0,5838	0,6162	2,71%
4000	0,5848	0,6152	2,53%

Zatem błąd względny zmniejsza się wraz ze wzrostem liczebności próby.

błąd w zględny jako funkcja liczebności próby



Zestawienie ośmiu najważniejszych przedziałów ufności.

Poziom ufności = $1 - \alpha$ (typowe wartości $1 - \alpha$: 0,9; 0,95; 0,99).

L.p.	Parametr	Rozkład cechy	Przedział ufności	Wyznaczanie liczby u_α	Błąd Względny δ
1	Wartość oczekiwana m	Normalny $N(m, \sigma)$, σ – jest znane	$< \bar{X} - \frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}} >$	$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	$\frac{\sigma u_\alpha}{\bar{x} \sqrt{n}}$
2	Wartość oczekiwana m	Normalny $N(m, \sigma)$, σ – nie jest znane	$< \bar{X} - \frac{S u_\alpha}{\sqrt{n-1}}; \bar{X} + \frac{S u_\alpha}{\sqrt{n-1}} >$	$P(T_{n-1} \geq u_\alpha) = \alpha$	$\frac{S u_\alpha}{\bar{x} \sqrt{n-1}}$
3	Wartość oczekiwana m	Dowolny Liczna próba $n > 120$	$< \bar{X} - \frac{S u_\alpha}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{S u_\alpha}{\sqrt{n}} >$	$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	$\frac{S u_\alpha}{\bar{x} \sqrt{n}}$
4	Wariancja σ^2	Normalny $N(m, \sigma)$,	$< \frac{nS^2}{u_1}; \frac{nS^2}{u_2} >$	$P(Y_{n-1} \geq u_1) = \frac{\alpha}{2}$ $P(Y_{n-1} \geq u_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	—
5	Odchylenie standardowe σ	Normalny $N(m, \sigma)$,	$< \sqrt{\frac{nS^2}{u_1}}; \sqrt{\frac{nS^2}{u_2}} >$	$P(Y_{n-1} \geq u_1) = \frac{\alpha}{2}$ $P(Y_{n-1} \geq u_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	—
6	Odchylenie standardowe σ	Normalny $N(m, \sigma)$, liczna próba $n > 120$	$< S - \frac{u_\alpha S}{\sqrt{2n}}; S + \frac{u_\alpha S}{\sqrt{2n}} >$	$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	$\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}$
7	Wariancja σ^2	Normalny $N(m, \sigma)$, liczna próba $n > 120$	$< (S - \frac{u_\alpha S}{\sqrt{2n}})^2; (S + \frac{u_\alpha S}{\sqrt{2n}})^2 >$	$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	—
8	Prawdopodobieństwo sukcesu p	Rozkład zerojedynekowy $P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$ liczna próba, $n > 100$	$< W - u_\alpha \sqrt{\frac{W(1-W)}{n}}; W + u_\alpha \sqrt{\frac{W(1-W)}{n}} >$ W – wskaźnik struktury w próbie = śr. liczba sukcesów	$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	$\frac{u_\alpha}{W} \sqrt{\frac{W(1-W)}{n}}$

ϕ – dystrybuanta rozkładu normalnego $N(0,1)$

T_{n-1} – zmienna losowa o rozkładzie Studenta z $n - 1$ stopniami swobody

Y_{n-1} – zmienna losowa o rozkładzie chi kwadrat (χ^2) z $n - 1$ stopniami swobody.

Zauważmy, że powyższe przedziały ufności spełniają warunek

$$P(\underline{U}_n \leq \theta \leq \bar{U}_n) = 1 - \alpha$$

Np. przedział nr 1:

$$\begin{aligned} P\left(\bar{X} - \frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + \frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) &= P\left(-u_\alpha \leq \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq u_\alpha\right) = \\ &= 2\Phi(u_\alpha) - 1 = 2(1 - \alpha/2) - 1 = 1 - \alpha \end{aligned}$$

przedział nr 2:

$$\begin{aligned} P\left(\bar{X} - \frac{S u_\alpha}{\sqrt{n-1}} \leq m \leq \bar{X} + \frac{S u_\alpha}{\sqrt{n-1}}\right) &= P\left(-u_\alpha \leq \frac{\bar{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \leq u_\alpha\right) = \\ &= 1 - P\left(\left|\frac{\bar{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}\right| > u_\alpha\right) = 1 - P(|T_{n-1}| > u_\alpha) = 1 - \alpha \end{aligned}$$

przedział nr 4:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{nS^2}{u_1} \leq \sigma^2 \leq \frac{nS^2}{u_2}\right) &= P\left(\sigma^2 \leq \frac{nS^2}{u_2}\right) - P\left(\sigma^2 \leq \frac{nS^2}{u_1}\right) = \\ &= P\left(\frac{nS^2}{\sigma^2} \geq u_2\right) - P\left(\frac{nS^2}{\sigma^2} \geq u_1\right) = P(Y_{n-1} > u_2) - P(Y_{n-1} > u_1) = \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha \end{aligned}$$

Uwaga

Niekiedy przyjmuje się, że:

- Względny błąd oszacowania $\delta \leq 5\%$ jest dobry tzn. niski.
- Względny błąd oszacowania $5\% < \delta \leq 10\%$ jest zadawalający.
- Względny błąd oszacowania $\delta > 10\%$ jest niezadawalający.

ZADANIA

Zadanie 1

Zmienna losowa X ma rozkład $N(1; 3)$. Obliczyć:

- a) $P(0,5 < X < 1,5)$
- b) $P(0,5 < \bar{X}_{25} < 1,5)$

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

Zadanie 2

Zmienna losowa X ma rozkład $N(m; 4)$. Obliczyć:

- a) $P(S_6^2 > 20)$,
- b) $P(S_6^2 < 10)$,
- c) $P(\hat{S}_6^2 > 10)$,
- d) $P(S_{42}^2 > 20)$,
- e) $P(S_{42}^2 < 16)$,
- f) $P(S_{42} > 4)$,

Zadanie 3

Zmienna losowa X ma rozkład $N(-1; \sigma)$. Wiadomo, że $S_{26}^2 = 16$.

Obliczyć: $P(\bar{X}_{26} > 1)$

Zadanie 4

Wielkość dobowego zbytu pewnego wyrobu firmy A ma (na podstawie wieloletnich obserwacji) w przybliżeniu rozkład normalny o wartości średniej 500 szt. i odchyleniu standardowym 100 szt. Rentowność produkcji jest zapewniona gdy dobowy zbyt wynosi co najmniej 400 szt.

- a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że dobową produkcję firmy jest rentowna?
- b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że tygodniowa produkcja (średnia z 5 dni) firmy jest rentowna?

Zadanie 5

Zakładamy, że $X \sim N(100, 5)$, $Y \sim N(102, 4)$ są niezależne. Oblicz $P(\bar{X}_{25} \leq \bar{Y}_{16})$

Zadanie 6

Badana cecha X ma rozkład Poissona. Sprawdzić, że średnia z próby jest estymatorem zgodnym, nieobciążonym i najefektywniejszym parametru λ .

Zadanie 7

Badana cecha X ma rozkład zerojedynkowy. Sprawdzić, że średnia liczba sukcesów jest estymatorem zgodnym, nieobciążonym i najefektywniejszym parametru p .

Zadanie 8

Badana cecha X ma rozkład dwumianowy.

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \quad N - \text{dane.}$$

Sprawdzić, że statystyka $\frac{\bar{X}}{N}$ jest estymatorem zgodnym, nieobciążonym i najefektywniejszym parametru p .

Zadanie 9

Badana cecha X ma rozkład $N(m, \sigma)$. Zakładamy, że σ jest znane. Metodą największej wiarygodności wyznaczyć estymator parametru m .

Zadanie 10

Badana cecha X ma rozkład $N(m, \sigma)$. Zakładamy, że m jest znane. Metodą największej wiarygodności wyznaczyć estymator parametru σ^2 .

Zadanie 11

Badana cecha X ma rozkład dwumianowy.

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \quad N - \text{dane.}$$

Metodą największej wiarygodności wyznaczyć estymator parametru p .

Zadanie 12

Badana cecha X ma rozkład wykładniczy.

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$$

Metodą największej wiarygodności wyznaczyć estymator parametru a .

Zadanie 13

Badano maksymalną prędkość pewnego typu samochodów osobowych (cecha X populacji). W 225 pomiarach tej prędkości otrzymano $\bar{x} = 195,8$ km/h i $s = 12,5$ km/h.

Na poziomie ufności 0,99 oszacuj przedziałem ufności średnią maksymalną prędkość samochodów tego typu i oblicz błąd względny tego oszacowania.

Zadanie 14

Z populacji dorosłych Polaków wybrano próbę liczącą 1200 osób, z których 400 oświadczyło, że w wyborach będzie głosować na pewną partię.

Oszacuj przedziałem ufności wskaźnik struktury dorosłych Polaków mających zamiar głosować na tę partię, przyjmując poziom ufności 0,98. Oblicz względny błąd tego oszacowania. Wyznacz n aby $\delta = 5\%$.

Zadanie 15

Wynagrodzenie miesięczne pracowników pewnego przedsiębiorstwa jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym $N(m, 300 \text{ zł})$. Ilu pracowników należy wylosować do próby, aby oszacować średnie wynagrodzenie m pracowników tego przedsiębiorstwa przedziałem ufności o błędzie wynoszącym 100zł na poziomie ufności 0,95?

Zadanie 16

Odchylenie standardowe czasu biegu na 1000 m w próbie liczącej 338 szesnastoletnich chłopców wynosiło 4,2 s. Oszacuj przedziałem ufności odchylenie standardowe w całej populacji tych chłopców, na poziomie ufności 0,97. Zakładamy, że cecha X – czas biegu na 1 000 m ma rozkład normalny.

Zadanie 17

Badano miesięczne wydatki na oświatę X (setki zł) w gospodarstwach domowych Krakowa.

Na podstawie danych dla wylosowanych 26 gospodarstw obliczono, że $\sum x_i = 78$, $\sum x_i^2 = 260$.

Zakładając, że badana cecha ma rozkład normalny oszacuj na poziomie ufności 0,99 średnie wydatki na oświatę w gospodarstwach domowych Krakowa. Podaj interpretację poziomu ufności 0,99. Wyznacz n aby $\delta = 4\%$.

Zadanie 18

W losowo wybranej próbie 400 dorosłych osób, 160 osób grało w LOTTO.

Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0,94$

- oszacować przedziałem ufności procent dorosłych osób nie grających w LOTTO.
- wyznaczyć błąd względny tego oszacowania.
- jak liczna powinna być próba aby względny błąd oszacowania wynosił 4% ?

Zadanie 19

W losowo wybranej próbie 144 osób (w wieku 30-50 lat), 36 osób czytało

„Politykę”. Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0,96$

- oszacować procent osób czytających „Politykę” wśród osób 30-50 letnich.
- wyznaczyć błąd względny tego oszacowania.
- jak liczna powinna być próba aby względny błąd oszacowania wynosił 8% ?

Zadanie 20

Badano miesięczne wydatki na prasę X (dziesiątki zł) w gospodarstwach domowych Gdańska. Na podstawie danych dla wylosowanych 26 gospodarstw obliczono, że

$$\sum x_i = 78, \quad \sum (x_i - \bar{x})^2 = 225.$$

Zakładając, że badana cecha ma rozkład normalny oszacuj na poziomie ufności 0,95 średnie wydatki na prasę w gospodarstwach domowych Gdańska.

Zadanie 21

W celu oszacowania średniego czasu wykonania jednego detalu, z grupy robotników wykonujących te detale pobrano próbę liczącą 10 robotników i otrzymano, że średni czas wykonania detalu przez robotników z tej próby wynosi 5,6 h, zaś odchylenie standardowe 1,5 h. Zakładając, że czas wykonania detalu jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$ oszacuj przedziałem ufności:

- średni czas m wykonania detalu przez robotników z całej populacji, na poziomie ufności 0,99 i oblicz błąd względny tego oszacowania,
- odchylenie standardowe σ czasu wykonania detalu przez robotników z całej populacji, na poziomie ufności 0,9.

Zadanie 22

Badano miesięczne dochody X (tysiące zł) w grupie pracowników sektora ubezpieczeniowego. W wylosowanej próbie 8 osób uzyskano dochody:

14, 10, 6, 15, 3, 6, 17, 10

Zakładając, że cecha jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$ oszacuj przedziałem ufności:

- średni dochód m całej populacji, na poziomie ufności 0,98 i oblicz błąd względny tego oszacowania,
- odchylenie standardowe σ dochodu całej populacji, na poziomie ufności 0,98.

L.Kowalski 11.05.2010