

ZADANIA - ZESTAW 5

We wszystkich zadaniach przyjęto założenie, że rozpatrywana zmienna losowa ma rozkład normalny.

Zadanie 5.1

Y – wydatki miesięczne na żywność w rodzinie (tys. zł),
 X – dochody miesięczne na jednego członka rodziny (tys. zł),
 Zbadano $n = 200$ rodzin, otrzymano następujące wyniki:

$$\sum_{i=1}^{200} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 66,5; \quad \sum_{i=1}^{200} x_i = 300; \quad \sum_{i=1}^{200} y_i = 120;$$

$$\sum_{i=1}^{200} x_i^2 = 5000; \quad \sum_{i=1}^{200} y_i^2 = 760$$

Obliczyć współczynnik korelacji. Wyznaczyć prostą regresji z próby. Wyznaczyć przedziały ufności dla współczynnika korelacji i współczynników prostej regresji przyjmując poziom ufności 0,95.

Zbadać istotność współczynnika korelacji i współczynnika prostej regresji (poziom istotności 0,05). Wyznaczyć krytyczny poziom istotności.

(odp. $r = 0,037$; $\hat{Y} = 0,58 + 0,015X$, $s_e = 1,86$; współczynnik korelacji nieistotny, współczynnik regresji nieistotny).

Zadanie 5.2

Badano dwie cechy o łącznym rozkładzie normalnym.

Pobrano próbę 10 elementową i otrzymano następujące wyniki:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 792,92; \quad \sum_{i=1}^{10} x_i = 86,7; \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 88,8;$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 771,35; \quad \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 819,34$$

Zbadać istotność współczynnika korelacji (poziom istotności 0,05). Wyznaczyć krytyczny poziom istotności.

(odp. $r = 0,936$; współczynnik korelacji istotny).

Zadanie 5.3

Na podstawie danych:

Y	2,1	1,2	4,2	3,0	6,1	9,9	13,1	14,2	17,0	19,2	25,0
X	1,5	2,4	3,9	5,6	6,5	8,0	8,3	9,4	9,5	10,3	11,0

wyznaczono równanie regresji

$$\hat{Y} = -5,17 + 2,25X$$

Zbadać na poziomie istotności 0,05:

hipotezy: $H_0(\beta_0 = -5)$ i $H_1(\beta_0 < -5)$,

hipotezy: $H_0(\beta_1 = 2)$ i $H_1(\beta_1 > 2)$.

Wyznaczyć krytyczny poziom istotności.

Zadanie 5.4

Populację badano ze względu na dwie cechy. Wylosowano próbę 122 elementową z tej populacji (o łącznym rozkładzie normalnym). Współczynnik korelacji z próby między badanymi cechami wyniósł $r = 0,4$. Na poziomie istotności 0,05 sprawdzić istotność współczynnika korelacji. Wyznacz krytyczny poziom istotności.

(odp. $u = 4,76$; współczynnik korelacji istotnie różni się od zera).

Zadanie 5.5

Wylosowano grupę 60 uczniów i zbadano ze względu na dwie cechy: liczba spóźnień w semestrze i odległość między domem a szkołą. Współczynnik korelacji między badanymi cechami wyniósł $r = 0,3819$. Na poziomie istotności 0,01 zweryfikować hipotezę, że badane cechy są liniowo skorelowane. Wyznacz krytyczny poziom istotności.

Zakładamy, że rozpatrywane cechy mają rozkład normalny.

Zadanie 5.6

Badano zależność między liczbą godzin poświęconych przygotowaniu do egzaminu (cecha X) a liczbą punktów uzyskanych na egzaminie (cecha Y).

Dla próby 10 elementowej otrzymano następujące wyniki:

X	4	9	10	14	4	7	12	22	1	17
Y	31	58	65	73	37	44	60	91	21	84

Sprawdzić na poziomie istotności 0,01 hipotezę że współczynnik regresji ma wartość 3.

Wyznaczyć przedział ufności dla współczynnika regresji, przyjąć poziom ufności 0,95.

Wskazówka. Prosta regresji z próby ma postać $y = 3,47x + 21,69$.

(odp. a) brak podstaw do odrzucenia tej hipotezy b) $<2,84; 4,1>$).

Zadanie 5.7

Badano zależność między wielkością produkcji a kosztami całkowitymi produkcji pewnego wyrobu.

Dla próby 10 elementowej otrzymano następujące wyniki (X – wielkość produkcji w setkach sztuk, Y – koszty w tysiącach złotych):

X	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	10,0	16,0	20,0	25,0	32,0
Y	1,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0

Prosta regresji z próby ma postać $Y = 0,29X + 1,9$.

Na poziomie istotności 0,05 sprawdzić istotność współczynnika korelacji.

Zadanie 5.8

Y – wartość sprzedaży (w mln złotych),

X – wydatki na reklamę (w dziesiątki tys. zł).

Y	11	13	16	12	13	19	22	14	15	25	28	16	17	31	34	18
X	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8

Zbadać istotność współczynnika korelacji i współczynnika prostej regresji (poziom istotności 0,05). Wyznacz krytyczny poziom istotności.

(odp. $r = 0,67$; prosta regresji $Y = 10 + 2X$).

Zadanie 5.9

W modelu $\hat{Y} = 2 - 4X$, średnia zmiennej X wynosi 5.

Oblicz średnią zmiennej Y .

Zadanie 5.10

W modelu liniowej regresji zadłużenia (Y - tys. PLN) podmiotów gospodarczych z tytułu kredytów względem wartości produkcji sprzedanej (X - mln PLN) dla 80 podmiotów z sektora produkcyjnego otrzymano:

$$\text{cov}(X, Y) = -2,88; \quad \bar{X} = 5,5; \quad S(X) = 0,6; \quad \bar{Y} = 183,0; \quad S(Y) = 8,0$$

Obliczyć parametry prostej regresji, R , S_e^2 , $S(b_i)$, $i = 0,1$.

$$(\text{odp. } R = 0,6; \hat{y} = 227,3 - 8x)$$

Zadanie 5.11

Uzyskano w próbie losowej o liczebności $n = 20$ m.in. następujące rezultaty:

$$\bar{X} = 5; \quad V(X) = 20\%; \quad \sum x_i^2 = 520;$$

$$S(Y) = 3; \quad V(Y) = 20\%; \quad \sum y_j^2 = 4680 \quad \sum x_i y_j = 1450$$

Oszacować parametry prostej regresji.

Obliczyć $R, S_e^2, S(b_i)$, $i = 0,1$.

$$(\text{odp. } \hat{y} = 27,6 - 2,52x)$$

Zadanie 5.12

Wiedząc, że wariancja resztowa prostej regresji obliczona dla 20 danych wynosi 5 a wariancja zmiennej Y wynosi 25 wyznacz współczynnik korelacji między X i Y .

Zadanie 5.13

Badając współzależność między zmiennymi X i Y , uzyskano w próbie losowej o liczebności $n = 40$ m.in. następujące rezultaty:

$$\bar{x} = 5; \quad \sum x_i^2 = 5200;$$

$$s(Y) = 3; \quad \sum y_j^2 = 4680 \quad \sum x_i y_j = 2500$$

Obliczyć współczynnik korelacji.

Zadanie 5.14 L-K-1

Spośród kandydatów na studia wylosowano 625 osób i badano zależności między średnią ocen na świadectwie maturalnym (cecha X) i średnią ocen na egzaminie wstępnym (cecha Y). Otrzymano współczynnik korelacji z próby równy 0,9.

- Na poziomie ufności 0,95 wyznacz przedział ufności dla współczynnika korelacji ρ .
- Na poziomie istotności 0,05 sprawdź hipotezy:
 $H_0(\rho = 0,95)$, $H_0(\rho < 0,95)$.

Zadanie 5.15 L-K-2

Badana jest zależność pomiędzy długością pracy pewnego typu maszyn (w miesiącach) - cecha X a średnim czasem bezawaryjnej pracy tego urządzenia (w miesiącach) - cecha Y. Wylosowano 8 takich urządzeń i otrzymano wyniki:

x_i	15	20	35	50	25	75	40	55
y_i	9,5	9	8,4	4,5	6	5	7,1	4,9

- Na poziomie ufności 0,9 wyznacz przedział ufności dla współczynnika korelacji ρ .
- Na poziomie istotności 0,05 sprawdź hipotezy:
 $H_0(\rho = -0,7)$, $H_0(\rho < -0,7)$.

Zadanie 5.16 L-K-3

Zastosowano dwie metody oceny wiedzy studentów w skali od 2 do 10 (cechy X i Y badanej populacji) W celu zbadania czy istnieje zależność liniowa pomiędzy tymi cechami wylosowano grupę 27 studentów i otrzymano wyniki:

x_i	3	5	6	5	7	8	8	5	6	6
y_i	3	3	4	8	5	6	9	4	5	6

7	4	2	4	6	5	7	8	4	5
6	7	2	4	8	7	7	8	5	6

5	6	7	9	4	3	3
5	7	9	9	6	5	4

- Na poziomie ufności 0,96 wyznacz przedział ufności dla współczynnika korelacji ρ .
- Na poziomie istotności 0,05 sprawdź hipotezy:
 $H_0(\rho = 0,9)$, $H_0(\rho < 0,9)$.