ZADANIA - ZESTAW 3

Zadanie 3.1.

Narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

Obliczyć graniczną wartość oczekiwaną i graniczną wariancję.

Odp. $\Pi = [0,2; 0,6; 0,2]$; $m(\infty) = 1$; $m_2(\infty) = 1,4$; $D^2(\infty) \approx 0,4$.

Zadanie 3.1a.

Przyjmując, że proces ma stany 0, 1, 2, wyznaczyć macierz intensywności, narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o intensywnościach:

a) $\lambda_{01} = 2$; $\lambda_{02} = 1$; $\lambda_{10} = 1$; $\lambda_{12} = 1$; $\lambda_{20} = 3$; $\lambda_{21} = 2$;
b) $\lambda_{10} = 3$; $\lambda_{12} = 1$; $\lambda_{20} = 3$; $\lambda_{21} = 1$; $\lambda_{01} = 2$; $\lambda_{02} = 2$;
c) $\lambda_{20} = 1$; $\lambda_{21} = 3$; $\lambda_{01} = 2$; $\lambda_{02} = 6$; $\lambda_{10} = 1$; $\lambda_{12} = 2$;
d) $\lambda_{10} = 4$; $\lambda_{20} = 4$; $\lambda_{01} = 2$; $\lambda_{21} = 4$; $\lambda_{02} = 3$; $\lambda_{12} = 1$;

Obliczyć graniczną wartość oczekiwaną i graniczną wariancję tego procesu.

Odp. a) $\Pi \approx [0,33; 0,5; 0,17]$; $m(\infty) \approx 0,83$; $m_2(\infty) \approx 1,17$; $D^2(\infty) \approx 0,47$.
Odp. b) $\Pi \approx [0,43; 0,29; 0,29]$; $m(\infty) \approx 0,857$; $m_2(\infty) \approx 1,43$; $D^2(\infty) \approx 0,69$.
Odp. c) $\Pi \approx [0,11; 0,48; 0,41]$; $m(\infty) \approx 1,296$; $m_2(\infty) \approx 2,11$; $D^2(\infty) \approx 0,43$.
Odp. d) $\Pi \approx [0,44; 0,35; 0,21]$; $m(\infty) \approx 0,765$; $m_2(\infty) \approx 1,185$; $D^2(\infty) \approx 0,599$.

Zadanie 3.2.

Proces Markowa jest określony grafem

$$[0] \xleftarrow{4} [1] \xrightarrow{2} [2]$$

Wyznaczyć jego macierz intensywności i równania Kołmogorowa.
Wyznaczyć wektor p(t) dla rozkładu początkowego (0, 1, 0).
Wyznaczyć rozkład graniczny.
Po jakim czasie $p_0(t)$ osiągnie wartość 0,25?
Czy kiedykolwiek $p_0(t) = p_2(t)$?
Oblicz m(t) i $D^2(t)$.

Odp. p(t) = [2/3(1-exp(-6t)); exp(-6t); 1/3(1-exp(-6t))]
Π = [2/3; 0; 1/3]; m(t) = 1/3(2+exp(-6t))

Zadanie 3.2a.

Proces Markowa jest określony grafem i ma podany rozkład początkowy

a) $[0] \xleftarrow{2} [1] \xrightarrow{6} [2]$ $\quad$ p(0) = (0,5; 0,5; 0)

b) $[0] \xleftarrow{2} [1] \xrightarrow{6} [2]$ $\quad$ p(0) = (0; 0,5; 0,5)

c) $$\begin{tikzcd} {[0]} \arrow[rr, bend right, "2"'] & {[1]} \arrow[r, "2"] & {[2]} \end{tikzcd}$$ p(0) = (0,5; 0,5; 0)

d) $$\begin{tikzcd} {[0]} & {[1]} \arrow[l, "1"'] & {[2]} \arrow[ll, bend right, "2"'] \end{tikzcd}$$ p(0) = (0,5; 0; 0,5)

Wyznaczyć jego macierz intensywności i równania Kołmogorowa.
Wyznaczyć wektor p(t).
Wyznaczyć rozkład graniczny.

Zadanie 3.3.
Przyjmując, że proces ma stany 0, 1, 2, 3; narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Wypisać równania Kołmogorowa tego procesu. Obliczyć graniczną wartość oczekiwaną i graniczną wariancję.

Odp. $\Pi = [5/37;\ 7/37;\ 8/37;\ 17/37] \approx [0{,}135;\ 0{,}189;\ 0{,}216;\ 0{,}459]$
$m(\infty) = 2$; $m_2(\infty) \approx 5{,}189$; $D^2(\infty) \approx 1{,}189$.

Zadanie 3.3a.
Przyjmując, że proces ma stany 0, 1, 2, 3; narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o macierzy intensywności:

e) $$\Lambda = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

b) $$\Lambda = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

c) $$\Lambda = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

d) $$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Wypisać równania Kołmogorowa tego procesu. Obliczyć graniczną wartość oczekiwaną i graniczną wariancję.

Odp. a) $\Pi \approx [0{,}097;\ 0{,}086;\ 0{,}237;\ 0{,}581]$; $m(\infty) \approx 2{,}3$; $m_2(\infty) \approx 6{,}258$; $D^2(\infty) \approx 0{,}963$.
Odp. b) $\Pi \approx [0{,}174;\ 0{,}496;\ 0{,}058;\ 0{,}273]$; $m(\infty) \approx 1{,}43$; $m_2(\infty) \approx 3{,}182$; $D^2(\infty) \approx 1{,}138$.
Odp. c) $\Pi \approx [0{,}459;\ 0{,}342;\ 0{,}324;\ 0{,}396]$; $m(\infty) \approx 2{,}18$; $m_2(\infty) \approx 5{,}21$; $D^2(\infty) \approx 0{,}454$.
Odp. d) $\Pi \approx [0{,}462;\ 0{,}231;\ 0{,}231;\ 0{,}077]$; $m(\infty) \approx 0{,}92$; $m_2(\infty) \approx 1{,}846$; $D^2(\infty) \approx 0{,}994$.

Zadanie 3.4.
Proces Markowa jest określony grafem

$$[0] \underset{2}{\overset{2}{\rightleftarrows}} [1] \underset{4}{\overset{1}{\rightleftarrows}} [2] \underset{3}{\overset{1}{\rightleftarrows}} [3]$$

Wyznaczyć jego macierz intensywności i równania Kołmogorowa.
Wyznaczyć rozkład graniczny tego procesu. Obliczyć graniczną wartość oczekiwaną i graniczną wariancję.

Odp. $[0{,}429;\ 0{,}429;\ 0{,}107;\ 0{,}036]$, $m(\infty) = 0{,}75$; $D^2(\infty) \approx 0{,}616$.

Zadanie 3.5.
Macierz prawdopodobieństw przejść procesu Markowa jest równa

$$P(t) = \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b + ae^{(-a-b)t} & a - ae^{(-a-b)t} \\ b - be^{(-a-b)t} & a + be^{(-a-b)t} \end{bmatrix}$$

gdzie a, b, a + b > 0
Wyznaczyć macierz intensywności.
Wyznaczyć wektor p(t) dla rozkładu początkowego (1, 0).
Wyznaczyć rozkład graniczny.

Odp.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -a & a \\ b & -b \end{bmatrix};\quad p(t) = \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b + ae^{(-a-b)t} & a - ae^{(-a-b)t} \end{bmatrix};\quad \Pi = \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{bmatrix}$$

Zadanie 3.6.
Strumień awarii pewnego systemu jest modelowany procesem Poissona. Wiadomo, że przeciętnie jedna awaria zdarza się raz na 20 godzin.

a) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia dokładnie jednej awarii w ciągu 10 godzin,
b) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia najwyżej dwóch awarii w ciągu 10 godzin,
c) obliczyć prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy w ciągu 10 godzin,
d) obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi awariami będzie większy niż 20 godzin,
e) obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi awariami będzie większy niż 10 godzin i mniejszy od 20 godzin,
f) obliczyć wartość oczekiwaną bezawaryjnego czasu pracy tego systemu.

Zadanie 3.6a.
X(t) jest procesem Poissona, $\lambda = 1{,}5$. Oblicz:

a) $P(X_1 = 2,\ X_4 = 6)$,
b) $P(X_4 = 6 | X_1 = 2)$,
c) $P(X_1 = 2 | X_4 = 6)$.

Odp. a) 0,0476; b) 0,1898; c) 0,2966

Zadanie 3.6b.
X(t) jest procesem Poissona, $\lambda = 3$.
Oblicz $P(X_2 = 2, X_4 = 5, X_6 = 6)$.
Wyprowadź ogólny wzór dla $t_1 < t_2 < t_3$ i $k_1 < k_2 < k_3$ oraz $\lambda > 0$

$$P(X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2, X(t_3) = k_3) = \frac{\lambda^{k_3} t_1^{k_1} (t_2 - t_1)^{(k_2 - k_1)} (t_3 - t_2)^{(k_3 - k_2)}}{k_1!(k_2 - k_1)!(k_3 - k_2)!} e^{-\lambda}.$$

Odp. 0,000059

Zadanie 3.6c.
Strumień zgłoszeń do pewnego centrum obsługi jest modelowany procesem Poissona X_n. Wiadomo, że przeciętnie jest pięć zgłoszeń na minutę.
a) obliczyć prawdopodobieństwo, że nikt się nie zgłosi w ciągu 30 sekund,
b) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia 4 zgłoszeń w pierwszej minucie i kolejnych 6 zgłoszeń po kolejnej minucie,
c) obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu 5 minut będzie 25 zgłoszeń, przy czym 6 z nich było w pierwszej minucie,

Wsk. a) $P(X_{0,5} = 0)$, b) $P(X_1 = 4, X_2 = 10)$, c) $P(X_1 = 6, X_5 = 25)$,
Odp. a) 0,082, b) 0,026, c) 0,013,

Zadanie 3.6d.
Strumień zgłoszeń klientów do myjni jest modelowany procesem Poissona X_n. Wiadomo, że przeciętnie są trzy zgłoszenia na godzinę. Myjnia rozpoczyna pracę o 9.00.
a) obliczyć prawdopodobieństwo, że do 9.30 zgłosi się co najmniej dwóch klientów,
b) obliczyć prawdopodobieństwo, że do południa zgłosi się 10 klientów przy czym 8 z nich było przed 11.00,
c) obliczyć prawdopodobieństwo, że do 9.15 zgłosił się jeden klient, przy czym wiadomo, że 6 klientów przybyło w pierwszej godzinie,

Wsk. a) $P(X_{0,5} \geq 2)$, b) $P(X_2 = 8, X_3 = 10)$, c) $P(X_{0,25} = 1, X_1 = 6)$,
Odp. a) 0,442, b) 0,023, c) 0,356,

Zadanie 3.6e.
X(t) jest procesem Poissona, $\lambda = 2$. Oblicz $\mathrm{cov}(X_3, X_4)$:
Wsk. $E(X_3 \cdot X_4) = E(X_3 \cdot (X_4 - X_3 + X_3)) = E(X_3 \cdot (X_4 - X_3)) + E((X_3)^2)$
Odp. 6

Zadanie 3.7.
Strumień zgłoszeń do systemu telekomunikacyjnego jest procesem Poissona. Wiadomo, że intensywność tego procesu wynosi $\lambda = 3$ zgł/min.
a) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najwyżej jednego zgłoszenia w ciągu 30 sekund,
b) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia trzech zgłoszeń w ciągu 30 sekund,
c) obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi zgłoszeniami będzie większy niż 12 sekund,
d) ile sekund wynosi średni czas oczekiwania na pierwsze zgłoszenie?

Odp. Ad. a) $\lambda t = 1{,}5$; 0,558 Ad. b) 0,126 Ad. c) $\lambda t = 0{,}6$; $e^{-0{,}6} = 0{,}5488$
Ad. d) $E(T) = 1/\lambda =$ 20 sek.

Zadanie 3.7a.
Kasa została otwarta o 5.00. Strumień zgłoszeń klientów jest procesem Poissona. Wiadomo, że intensywność tego procesu wynosi $\lambda = 3$ zgł/15min.
Jakie jest prawdopodobieństwa, że

I. między 8.00 a 8.15 napłynie,
   a. dwóch klientów
   b. co najwyżej 4 klientów
   c. ponad 5 klientów.

II. między 9.00 a 9.45 napłynie,
   a. pięciu klientów
   b. co najwyżej 5 klientów
   c. ponad 5 klientów.

III. między 12.00 a 13.00 napłynie,
   a. pięciu klientów
   b. co najwyżej 5 klientów
   c. ponad 5 klientów.

Odp. I. a) 0,224 b) 0,8153 c) 0,0839

Zadanie 3.7b.
Strumień przychodzących do firmy emaili jest procesem Poissona. Wiadomo, że intensywność tego procesu wynosi $\lambda = 5$ zgł/godz. W ciągu pierwszej godziny przyszło 10 emaili. Jakie jest prawdopodobieństwa, że w ciągu trzech pierwszych godzin przyjdzie co najwyżej 25 emaili?

Odp. 0,9513

Zadanie 3.8a.
Sprawdź, że parametry procesu Poissona są równe:

$$m(t) = \lambda t \qquad t \geq 0,$$

$$K(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2),$$

$$\rho(t_1, t_2) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{t_1}{t_2}} & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \sqrt{\dfrac{t_2}{t_1}} & \text{dla } t_2 \leq t_1 \end{cases}$$

Zadanie 3.8.
Wyznaczyć parametry i narysować przykładowa realizacje procesu

$$Z(t) = X(t) - \lambda t$$

gdzie $X(t)$ jest jednorodnym procesem Poissona o intensywności λ.

Zadanie 3.9.
Sprawdź, że macierz prawdopodobieństw przejścia procesu przełączania między stanami {-1, 1} generowanego procesem Poissona, tzn. procesu

$$Z(t) = Z(0)(-1)^{X(t)}, \quad t \ge 0$$

gdzie $X(t)$ jest jednorodnym procesem Poissona o intensywności λ ma postać

$$P(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(1+e^{-2\lambda t}\right) & \frac{1}{2}\left(1-e^{-2\lambda t}\right) \\ \frac{1}{2}\left(1-e^{-2\lambda t}\right) & \frac{1}{2}\left(1+e^{-2\lambda t}\right) \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz intensywności.
Wyznaczyć rozkład graniczny.

Wskazówka.

$$p_{-1,1}(t) = p_{1,-1}(t) = p(X(t) = \text{l.nieparzysta}) = \sum_{n=0}^{\infty} p(X(t) = 2n+1) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}\left(1-e^{-2\lambda t}\right)$$

$$p_{-1,-1}(t) = 1 - p_{-1,1}(t), \quad p_{1,1}(t) = 1 - p_{1,-1}(t).$$

Odp.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix} \qquad \Pi = [1/2;\ 1/2]$$

Zadanie 3.10.
W zakładzie pracują maszyny, z których każda psuje się niezależnie od pozostałych z intensywnością λ = 3 maszyny/godz. Maszyny te są naprawiane przez robotników. Niech X(t) oznacza liczbę zepsutych maszyn w chwili t. Rozpatrzmy następujące przypadki:

1) są 3 maszyny i 1 robotnik pracujący z intensywnością 1maszyna/godz.
2) są 3 maszyny i 2 robotników pracujących bez współpracy z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
3) są 4 maszyny i 2 robotników pracujących bez współpracy z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
4) są 3 maszyny i 3 robotników pracujących z pełną współpracą z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
5) są 3 maszyny i 2 robotników pracujących z pełną współpracą z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
6) są 3 maszyny i 2 robotników pracujących z ograniczoną współpracą (z intensywnością 1maszyna/godz. każdy gdy pracują osobno i z intensywnością 1,5maszyny/godz. gdy pracują razem).

W każdym przypadku:

a) narysować graf,
b) wyznaczyć prawdopodobieństwa graniczne,
c) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że żaden robotnik nie pracuje,
d) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że przynajmniej jedna maszyna jest sprawna,
e) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że przynajmniej jedna maszyna czeka na naprawę,
f) obliczyć średnia liczbę zepsutych maszyn,

g) obliczyć średnia liczbę zajętych robotników.

Odp. Ad. 1, [0,042; 0,25; 0,717]; Ezm ≈ 2,6; Ezr ≈ 1.
Ad. 2, [0,0129; 0,1164; 0,348; 0,523]; Ezm = 2,38; Ezr = 1,86.
Ad. 3, [0,002; 0,025; 0,115; 0,344; 0,516]; Ezm = 3,34; Ezr = 1,97.
Ad. 4, [1/16; 3/16; 6/16; 6/16]; Ezm = 2,06; Ezr = 2,8.

Zadanie 3.11.
Proces Yule'a to proces urodzeń dla którego intensywności urodzeń są równe $\lambda_i = i\lambda$, i = 0, 1, ...

Przyjmujemy, że p(t) = (p_0(t), p_1(t), ...) (wektor rozkładu procesu w momencie t), oraz początkowy p(0) = (0, 1, 0, 0, ...).

Wyznacz graf i macierz intensywności tego procesu.
Sprawdź, że równanie Kołmogorowa p'(t) = p(t)·Λ ma dla tego procesu postać

$$\begin{cases} p_0'(t) = 0 \\ p_1'(t) = -\lambda\ p_1(t) \\ p_2'(t) = \lambda\ p_1(t) - 2\lambda\ p_2(t) \\ \dots \end{cases}$$

a prawdopodobieństwa

$$p_k(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{k-1} & \text{dla } k > 0 \\ 0 & \text{dla } k = 0 \end{cases}$$

spełniają to równanie.

L.Kowalski 24.05.2022