

ZADANIA - ZESTAW 2

Zadanie 2.1.

Wyznaczyć $m(n)$, $D^2(n)$ dla procesu symetrycznego ($p = q = 0,5$) błądzenia przypadkowego.

Zadanie 2.2.

Narysuj graf łańcucha Markowa – symetryczne ($p = q = 0,5$) błądzenie przypadkowe z odbiciem. Przyjmij liczbę stanów równą 6. Zapisz macierz prawdopodobieństw przejść tego łańcucha.

Czy jest to łańcuch ergodyczny?

Czy jest to łańcuch okresowy?

Czy istnieje rozkład stacjonarny tego procesu? Ile jest takich rozkładów.

Odp. To nie jest łańcuch ergodyczny, chociaż ma dokładnie jeden rozkład stacjonarny $\pi = [0,1; 0,2; 0,2; 0,2; 0,2; 0,1]$

Zadanie 2.3.

Wyznaczyć wartości własne macierzy $P = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$

Do jakiej klasy należy ta macierz stochastyczna?

Czy odpowiedni łańcuch Markowa jest ergodyczny. Narysować graf tego łańcucha.

Sprawdź, że $\pi = [6/23; 7/23; 10/23]$ jest rozkładem stacjonarnym.

Wyznacz $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$. Oblicz $m(\infty)$, $D^2(\infty)$.

Zadanie 2.4.

Wyznaczyć wartości własne macierzy

$$\text{a) } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{c) } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{d) } P = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } P = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{f) } P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \quad \text{g) } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{h) } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \end{bmatrix} \quad \text{i) } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Do jakich klas należą te macierze stochastyczne?

Czy odpowiedni łańcuch Markowa jest ergodyczny. Narysować graf tego łańcucha.

Sprawdzić, czy dla tego łańcucha istnieje rozkład graniczny.

Zadanie 2.5a.

Wyznaczyć kolejne potęgi macierzy $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Wyznaczyć wartości własne tej macierzy.

Czy odpowiedni łańcuch Markowa jest ergodyczny?. Narysować graf tego łańcucha.

Czy odpowiedni łańcuch Markowa jest okresowy?

Jaki jest rozkład stacjonarny tego łańcucha?

Odp. $P^3 = I$, $P^4 = P$, łańcuch okresowy.

$$\Pi = [1/3, 1/3, 1/3]$$

Zadanie 2.5.

Wyznaczyć kolejne potęgi macierzy $P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Czy odpowiedni łańcuch Markowa jest ergodyczny. Narysować graf tego łańcucha.

Porównać wiersze macierzy P^n i składowe wektora rozkładu granicznego.

Wyznaczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$. Obliczyć $m(\infty)$, $D^2(\infty)$.

$$\text{Odp. np. } P^6 = \begin{bmatrix} 0,671875 & 0,328125 \\ 0,65625 & 0,34375 \end{bmatrix} \quad \Pi = [2/3, 1/3]$$

Zadanie 2.6.

Łańcuch Markowa ma dwa stany i rozkład graniczny $[p, q]$. Wyznaczyć macierz P tego łańcucha.

$$\text{Odp. } P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ \frac{pa}{1-p} & 1-\frac{pa}{1-p} \end{bmatrix}, \text{ a - nieujemny parametr.}$$

Zadanie 2.7.

Rozkład początkowy łańcucha Markowa określonego macierzą prawdopodobieństw przejść

$$P = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

wyraża się wektorem

- a) (1, 0, 0),
- b) (0,5; 0; 0,5),

Wyznaczyć prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach tego łańcucha po

- 1) dwóch etapach,
- 2) trzech etapach,
- 3) nieskończenie wielu etapach.

Oblicz 1) $m(2)$, $D^2(2)$; 2) $m(3)$, $D^2(3)$; 3) $m(\infty)$, $D^2(\infty)$

Zadanie 2.8.

Rozkład początkowy łańcucha Markowa określonego macierzą prawdopodobieństw przejść

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wyraża się wektorem (1, 0, 0, 0). Narysować graf tego łańcucha.

Wyznaczyć prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach tego łańcucha po kolejnych etapach. Czy łańcuch ten ma określone prawdopodobieństwa graniczne?

$$\text{Wsk. } P^2 = P$$

Zadanie 2.8a.

Wyznaczyć wartości własne macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dokonać klasyfikacji stanów tego łańcucha.

Czy ten łańcuch Markowa jest ergodyczny?. Narysować graf tego łańcucha.

Zadanie 2.9.

Podaj przykład łańcucha, którego rozkłady graniczne zależą od rozkładu początkowego.

Zadanie 2.10.

Uzasadnij własność: Jeśli łańcuch Markowa ma dwa różne rozkłady stacjonarne to nie może to być łańcuch ergodyczny.

Zadanie 2.11a.

Wyznaczyć rozkłady graniczne łańcuchów wyznaczonych przez macierze

a)
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

b)
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c)
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0,6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

d)
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,1 & 0 & 0,8 & 0,1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Narysuj odpowiednie grafy. Oblicz $m(\infty)$, $D^2(\infty)$.

Odp. (wartości przybliżone)

a) [0,038461538; 0,096153845; 0,288461538; 0,576923079]

$m(\infty) = 2,4$, $D^2(\infty) = 0,66$

b) [0,212975437; 0,108286331; 0,361014268; 0,317723964]

$m(\infty) = 1,78$, $D^2(\infty) = 1,23$

c) [0,120481928; 0,301204819; 0,21686747; 0,361445783]

$m(\infty) = 1,82$, $D^2(\infty) = 1,11$

d) [0,19143736; 0,212810641; 0,170240108; 0,425511888]

$m(\infty) = 1,83$, $D^2(\infty) = 1,38$

Zadanie 2.11.

Wyznaczyć rozkłady graniczne łańcuchów wyznaczonych przez macierze

$$\text{a) } P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{b) } P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Narysuj odpowiednie grafy. Oblicz $m(\infty)$, $D^2(\infty)$.

Odp. a) [6/17, 7/17, 2/17, 2/17] b) [1/12, 3/12, 5/12, 1/12, 2/12]

Zadanie 2.12.

Rzucamy symetryczną czworościenną kostką (na ściankach liczby 1, 2, 3, 4). Rozpatrujemy łańcuch Markowa X_n określony jako ciąg maksymalnych wyników spośród rzutów 1,2,3,...,n. Sprawdź, że łańcuch ten ma macierz P równą

$$P = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wyznacz graf tego łańcucha. Czy łańcuch ten ma stany okresowe?

Zadanie 2.13.

Gracze A i B rozpoczynają grę z kapitałem 2zł każdy. W każdej partii gracz A wygrywa z prawdopodobieństwem 0,6, gracz B wygrywa z prawdopodobieństwem 0,4. Po każdej partii przegrywający płaci wygrywającemu 1 zł.

- jakie jest prawdopodobieństwo, że gra zakończy się po 2 partiach ?
- jakie jest prawdopodobieństwo, że po 4 partiach kapitał każdego gracza wyniesie 2 zł?
- Ile wynosi wartość oczekiwana kapitału gracza A po 2 partiach?

Przyjmijmy, że stany procesu to kapitał w posiadaniu gracza A czyli $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2.14.

Jeśli ciąg zmiennych losowych $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$ jest łańcuchem Markowa o macierzy P , to jaką macierz ma łańcuch Markowa który jest ciągiem zmiennych losowych $X_0, X_2, X_4, \dots$

Zadanie 2.15.

Dany jest łańcuch Markowa o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Wyznacz macierze prawdopodobieństw przejść po dwóch i po trzech krokach. Sporządź graf łańcucha. Które stany łańcucha są istotne? Które stany łańcucha są okresowe? Czy łańcuch jest ergodyczny? Oblicz prawdopodobieństwa graniczne.

Oblicz $m(\infty)$, $D^2(\infty)$.

Zadanie 2.16.

Wyznacz wartości własne i ich krotności dla macierzy

$$\begin{array}{ll} \text{A) } P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} & \text{B) } P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{C) } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \\ \text{D) } P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{E) } P = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Do jakiej klasy należy ta macierz?

Czy istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$?

Czy istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k$?

Zadanie 2.17.

Odwołując się do wartości własnej i wektora własnego uzasadnij, dlaczego ŁM o skończonej liczbie stanów mają, co najmniej jeden rozkład stacjonarny.

Zadanie 2.18.

Podaj po jednym przykładzie ŁM mającego dwa stany, który jest:

- a) ergodyczny,
- b) okresowy,
- c) przywiedlny.

Zadanie 2.19.

Sprawdź, że łańcuch Markowa o macierzy przejścia

$$\text{a) } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } P = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0,75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jest okresowy.

Wyznacz okres.

Zadanie 2.20.

Niech P będzie macierzą stochastyczną łańcucha Markowa o stanach $\{0, 1, 2\}$.

Wiedząc, że rozwiązaniem równania

$$\Pi P = \Pi$$

$$\text{jest } \Pi_1 = 1,5\Pi_0 \quad \Pi_2 = 3\Pi_0$$

wyznacz rozkład stacjonarny Π .

Odp. [2/11; 3/11; 6/11]

Zadanie 2.21.

Rozkład początkowy łańcucha Markowa o stanach $\{0, 1, 2\}$ określonego macierzą prawdopodobieństw przejść

$$P = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \end{bmatrix}$$

wyraża się wektorem $[0, 1, 0]$.

a) Czy jest to łańcuch ergodyczny? Wyznacz rozkład graniczny.

b) Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie 1 po dwóch krokach?

c) Wyznacz $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{00}(n)$. Wyznacz $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$.

Odp. a) [0,1; 0,3; 0,6] b) 0,375 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{00}(n) = 0,1$

Zadanie 2.22.

Rozkład początkowy łańcucha Markowa o stanach $\{0, 1, 2\}$ określonego macierzą prawdopodobieństw przejść

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,75 & 0,25 \end{bmatrix}$$

wyraża się wektorem $[0,25; 0,25; 0,5]$.

Oblicz a) $P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\}$; b) $P\{X_1 = 1, X_2 = 1 | X_0 = 2\}$.

Odp. a) $p_0 p_{01} p_{12} = 0,25 \cdot 0,5 \cdot 0,25$ b) $p_2 p_{21} p_{11} / p_2 = 0,75 \cdot 0,5$

Zadanie 2.22b.

Rozkład początkowy łańcucha Markowa o stanach $\{0, 1, 2\}$ określonego macierzą prawdopodobieństw przejść

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,25 \end{bmatrix}$$

wyraża się wektorem $[0,5; 0; 0,5]$.

Oblicz a) $P\{X_2 = 1 | X_1 = 2\}$; b) $P\{X_1 = 2, X_2 = 1\}$.

Odp. a) $p_{21} = 0,75$ b) $p_{2(1)} p_{21} = 0,375 \cdot 0,75$

Zadanie 2.23.

Rozkład początkowy łańcucha Markowa o stanach $\{0, 1\}$ określonego macierzą prawdopodobieństw przejść

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,75 & 0,25 \end{bmatrix}$$

jest równy a) $[0,5; 0,5]$, b) rozkładowi stacjonarnemu.

Oblicz $\rho(X_0, X_1)$.

Oblicz $\rho(X_0, X_2)$.

Wsk.

$E(X_0 \cdot X_1) = \sum_{ij} ij P(X_1 = j, X_0 = i) = \sum_{ij} ij P(X_1 = j | X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) = \sum_{ij} ij p_{ij} \cdot P(X_0 = i)$
Odp. $-0,258, -0,25; \quad 0,064; 0,0625$

Zadanie 2.23a.

Ciąg zmiennych losowych $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$ jest ergodycznym łańcuchem Markowa, o macierzy P, Π - jego rozkład stacjonarny.

Niech $p(0) = \Pi$. Ile wynosi $\text{cov}(X_0, X_n)$?; Ile wynosi $\lim \text{cov}(X_0, X_n)$?

Zadanie 2.23b.

Ciąg zmiennych losowych $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$ jest łańcuchem Markowa, o macierzy P, Π - jego rozkład graniczny.

Niech $p(0) = \Pi$. Ile wynosi $\lim P(X_n = j | X_{n-1} = i)$?; $\lim P(X_n = j | X_0 = i)$?

Odp, P_{ij}, Π_j ;

Zadanie 2.24.

Dany jest łańcuch Markowa o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0,75 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}$$

- a) Wyznacz wszystkie rozkłady stacjonarne.
- b) Czy istnieje prawdopodobieństwo ergodyczne?

Wsk. a) Wyznacz unormowane rozwiązania $\Pi P = \Pi$.

Zadanie 2.24a.

Dany jest łańcuch Markowa o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} 1-x & x & 0 \\ 0 & 1-y & y \\ z & 0 & 1-z \end{bmatrix} \quad x, y, z \in (0; 1)$$

Wyznacz rozkład stacjonarny.

Zadanie 2.25.

Dany jest łańcuch Markowa o bistochastycznej macierzy przejścia (sumy wierszy i sumy kolumn są równe 1).

Sprawdzić, że istnieje rozkład stacjonarny który jest rozkładem jednostajnym.

Wsk. Niech $0, 1, \dots, N$ to stany. Sprawdź ile wynosi ΠP jeśli $\Pi = [1/(N+1), \dots, 1/(N+1)]$.

Zadanie 2.26.

Łańcuch Markowa ma 5 stanów. Jeśli proces jest w stanie k to rzucamy symetryczną monetą, Jeśli wypadnie orzeł to pozostajemy w k , jeśli reszka to przechodzimy do dowolnego innego stanu z jednakowym prawdopodobieństwem. Wyznacz P . Wyznacz rozkład stacjonarny. Czy jest to rozkład ergodyczny?

Wsk. Zauważ, że P jest bistochastyczna (sumy wierszy i sumy kolumn są równe

L.Kowalski 24.05.2022