ZADANIA - ZESTAW 2

Zadanie 2.1
Badano maksymalną prędkość pewnego typu samochodów osobowych (cecha X populacji). W 225 pomiarach tej prędkości otrzymano $\overline{x}$ = 195,8 km/h i s = 12,5 km/h.
Na poziomie ufności 0,99 oszacuj przedziałem ufności średnią maksymalną prędkość samochodów tego typu i oblicz błąd względny tego oszacowania.

(odp. <193,6; 197,9>; 1%).

Zadanie 2.2
Z populacji dorosłych Polaków wybrano próbę liczącą 1200 osób, z których 400 oświadczyło, że w wyborach będzie głosować na pewną partię.
Oszacuj przedziałem ufności wskaźnik struktury dorosłych Polaków mających zamiar głosować na tę partię, przyjmując poziom ufności 0,98. Oblicz względny błąd tego oszacowania. Wyznacz n aby δ = 5%.

(odp. <0,3; 0,36>; 9,5 %), około 4400.

Zadanie 2.3
Wynagrodzenie miesięczne pracowników pewnego przedsiębiorstwa jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym $N(m$, 300 zł). Ilu pracowników należy wylosować do próby , aby oszacować średnie wynagrodzenie m pracowników tego przedsiębiorstwa przedziałem ufności o błędzie wynoszącym 100zł na poziomie ufności 0,95?

(odp. n = 35).

Zadanie 2.4
Interesuje nas wskaźnik struktury gospodarstw domowych mających zmywarkę.
Jak wielką próbę gospodarstw domowych należy pobrać by wskaźnik ten oszacować przedziałem ufności o błędzie względnym 8%, na poziomie ufności 0,96, jeśli wstępne badanie wykazało, że wskaźnik struktury w próbie wynosi 0,3?

(odp. n = 1540).

Zadanie 2.5
Odchylenie standardowe czasu biegu na 1000 m w próbie liczącej 338 szesnastoletnich chłopców wynosiło 4,2 s. Oszacuj przedziałem ufności odchylenie standardowe w całej populacji tych chłopców, na poziomie ufności 0,97. Zakładamy, że cecha X – czas biegu na 1 000 m ma rozkład normalny.

(odp. <3,85; 4,55>).

Zadanie 2.6
Badano miesięczne wydatki na oświatę X (setki zł) w gospodarstwach domowych Krakowa.
Na podstawie danych dla wylosowanych 26 gospodarstw obliczono, że $\sum x_i = 78$, $\sum x_i^2 = 260$.
Zakładając, że badana cecha ma rozkład normalny oszacuj na poziomie ufności 0,99 średnie wydatki na oświatę w gospodarstwach domowych Krakowa. Podaj interpretację poziomu ufności 0,99.
Wyznacz n aby δ = 4%.

(odp. <2,44; 3,56>; 18,6%; około 540)

Zadanie 2.7
W losowo wybranej próbie 400 dorosłych osób, 160 osób grało w LOTTO. Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0{,}94$

a) oszacować przedziałem ufności procent dorosłych osób nie grających w LOTTO.
b) wyznaczyć błąd względny tego oszacowania.
c) jak liczna powinna być próba aby względny błąd oszacowania wynosił 4% ?

(odp. <55%; 65%>; 8,3%; około 1490)

Zadanie 2.8
W losowo wybranej próbie 144 osób (w wieku 30-50 lat), 36 osób czytało „Politykę”.
Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0{,}96$
a) oszacować procent osób czytających „Politykę” wśród osób 30-50 letnich.
b) wyznaczyć błąd względny tego oszacowania.
c) jak liczna powinna być próba aby względny błąd oszacowania wynosił 8% ?

(odp. <17,7%; 32,3%>; 29,2%; około 1965)

Zadanie 2.9
Badano miesięczne wydatki na prasę X (dziesiątki zł) w gospodarstwach domowych Gdańska. Na podstawie danych dla wylosowanych 26 gospodarstw obliczono, że $\sum x_i = 78$, $\sum (x_i - x)^2 = 225$.
Zakładając, że badana cecha ma rozkład normalny oszacuj na poziomie ufności 0,95 średnie wydatki na prasę w gospodarstwach domowych Gdańska.

(odp. <1,79; 4,21>)

Zadanie 2.10
W celu oszacowania średniego czasu wykonania jednego detalu , z grupy robotników wykonujących te detale pobrano próbę liczącą 10 robotników i otrzymano, że średni czas wykonania detalu przez robotników z tej próby wynosi 5,6 h, zaś odchylenie standardowe 1,5 h. Zakładając, że czas wykonania detalu jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym N(m, σ) oszacuj przedziałem ufności:
a) średni czas m wykonania detalu przez robotników z całej populacji, na poziomie ufności 0,99 i oblicz błąd względny tego oszacowania,
b) odchylenie standardowe σ czasu wykonania detalu przez robotników z całej populacji, na poziomie ufności 0,9.

(odp. a) <3,975; 7,225>, 29%; b) <1,15; 2,6>).

Zadanie 2.11

Badano miesięczne dochody X (tysiące zł) w grupie pracowników sektora ubezpieczeniowego. W wylosowanej próbie 8 osób uzyskano dochody:

14, 10, 6, 15, 3, 6, 17, 10

Zakładając, że cecha jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym N(m, σ) oszacuj przedziałem ufności:
a) średni dochód m całej populacji, na poziomie ufności 0,98 i oblicz błąd względny tego oszacowania,
b) odchylenie standardowe σ dochodu całej populacji, na poziomie ufności 0,98.

(odp. a) <4,89; 15,36>, 29%; b) <3,04; 11,74>).

Zadanie 2.11a
Korzystając z podanych informacji wyznacz przedział ufności dla wartości oczekiwanej.
(a) n = 250, średnia = 6, s = 1,2, poziom ufności 0,98;
(b) n = 400, średnia = 0,3, $s^2 = 0{,}0001$, poziom ufności 0,96;
(c) n = 100, średnia = 3, suma kwadratów danych = 1000, poziom ufności 0,92;

Zadanie 2.11b
Korzystając z podanych informacji wyznacz przedział ufności dla wartości oczekiwanej.
Zakładamy, że rozpatrywana cecha ma rozkład normalny.
(a) n = 5, średnia = 6, s = 1,2, poziom ufności 0,98;
(b) n = 10, średnia = 0,3, $s^2 = 0{,}0001$, poziom ufności 0,96;

(c) n = 17, średnia = 3, suma kwadratów danych = 170, poziom ufności 0,92;

Zadanie 2.11c
Korzystając z podanych informacji wyznacz przedział ufności dla odchylenia standardowego. Zakładamy, że rozpatrywana cecha ma rozkład normalny.
(a) n = 8, s = 1,5, poziom ufności 0,98;
(b) n = 12, s^2 = 0,0001, poziom ufności 0,96;
(c) n = 22, średnia = 3, suma kwadratów danych = 220, poziom ufności 0,92;

Zadanie 2.11d
Korzystając z podanych informacji wyznacz przedział ufności dla prawdopodobieństwa sukcesu p.
(a) n = 25, liczba sukcesów = 20, poziom ufności 0,98;
(b) n = 10, liczba sukcesów = 5, poziom ufności 0,94;
(c) n = 16, wskaźnik struktury = 0,75, poziom ufności 0,9;
Skorzystaj z modelu dla małych prób.

W poniższych zadaniach przyjąć poziom ufności 0,95.

Zadanie 2.12 L-1
Wiadomo, że czas świecenia żarówek z pewnej partii jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym $N(m, 50\text{ h})$. Oszacować przedziałem ufności średni czas świecenia żarówek z tej partii, jeśli na podstawie próby 10-elementowej otrzymano $\bar{x}_{10} = 830{,}5h$.

Zadanie 2.13 L-2
Wzrost mężczyzn mieszkających w pewnym mieście jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym $N(m, 2\text{ cm})$. Ilu mężczyzn należy wylosować z próby, aby na jej podstawie można oszacować średni wzrost mężczyzn tego miasta przedziałem ufności o długości jednego centymetra?

Zadanie 2.14 L-3
W celu wyznaczenia ładunku elektronu równego $e_0 10^{-10}$ jednostek CGSE dokonano 5 pomiarów i otrzymano wyniki: 4,781; 4,7951; 4,792; 4,779; 4,769. Zakładając, że pomiary te pochodzą z populacji o rozkładzie normalnym $N(e_0, \sigma)$, wyznaczyć przedział ufności dla e_0 i obliczyć błąd względny tego oszacowania.

Zadanie 2.15 L-4
Z pewnej populacji wybrano próbę liczącą 200 osób. Wśród nich 120 paliło papierosy. Oszacować przedziałem ufności procent osób w tej populacji palących papierosy.

Zadanie 2.16 L-5
Przeprowadzono 40 pomiarów maksymalnej prędkość samochodu i otrzymano $\bar{x}$ = 205,6 km/h i s = 5,9 km/h. Oszacuj przedziałem ufności średnią maksymalną prędkość tego samochodu i oblicz błąd względny tego oszacowania.

Zadanie 2.17 L-6
Wiadomo, że wytrzymałość pewnego materiału budowlanego jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(m, 0{,}5\ \mathrm{kG/cm^2})$. Aby oszacować nieznaną średnią wytrzymałość m tego materiału zbadano wytrzymałość 15 sztuk i otrzymano $\bar{x}_{15} = 38{,}6 kG/cm^2$.
Oszacuj m przedziałem ufności i oblicz błąd względny tego oszacowania.

Zadanie 2.18 L-7
Dokonano 50 pomiarów wytrzymałości elementów żelbetonowych i otrzymano wyniki (w $\mathrm{kG/cm^2}$):

Wytrzymałość	[293, 295)	[295, 297)	[297, 299)	[299, 301)	[301, 303)
Liczba pomiarów	2	8	23	11	6

Oszacuj przedziałem ufności średnią wytrzymałość tego typu elementów i oblicz błąd względny tego oszacowania.

Zadanie 2.19 L-8
Z partii towaru wybrano próbę liczącą 4000 sztuk. W próbie tej było 113 sztuk wadliwych. Oszacować przedziałem ufności wadliwość tej partii towaru.

Zadanie 2.20 L-9
Angielski fizyk Cavendish opublikował w 1789 roku 29 pomiarów gęstości Ziemi uzyskując wyniki:
5,50; 5,61; 5,88; 5,07; 5,26; 5,55; 5,36; 5,29; 5,58; 5,65;
5,57; 5,53; 5,62; 5,29; 5,44; 5,34; 5,79; 5,10; 5,27; 5,39;
5,42; 5,47; 5,63; 5,34; 5,46; 5,30; 5,75; 5,68; 5,85;
Zakładając, że pomiary te pochodzą z populacji o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$, wyznaczyć przedział ufności dla gęstości Ziemi m i obliczyć błąd względny tego oszacowania.

Zadanie 2.21 L-10
Przebadano trwałość 145 oporników i otrzymano wyniki :

Trwałość w godz.	Liczba oporników
[1150, 1154)	7
[1154, 1158)	13
[1158, 1162)	17
[1162, 1166)	19
[1166, 1170)	48
[1170, 1174)	22
[1174, 1178)	14
[1178, 1182)	5

Zakładając, że pomiary te pochodzą z populacji o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$, wyznaczyć przedział ufności dla odchylenia standardowego σ.

Zadanie 2.22 L-11
Z partii tranzystorów wybrano próbę liczącą 5 sztuk i zmierzono, że w tej próbie średni prąd nasycenia wynosi $\bar{x}_5 = 2{,}42\ \mu A$, a odchylenie standardowe $s_5 = 0{,}93\ \mu A$. Zakładając, że pomiary te pochodzą z populacji o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$, oszacować przedziałem ufności wartość oczekiwaną tej cechy i obliczyć błąd względny tego oszacowania.

Zadanie 2.23 L-12
Średnia temperatura lipca wynosiła w 1985 r. $20{,}7^0$C, w 1986 r. $21{,}2^0$C, w 1987 r. $19{,}6^0$C, w 1988 r. $22{,}1^0$C, w Zakładając, że pomiary te pochodzą z populacji o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$, zbadać przez ile lat należy powtarzać pomiary, aby oszacować wartość oczekiwaną tej cechy przedziałem ufności o długości $0{,}2^0$C.

Zadanie 2.24 L-13
Ile osób z danej populacji należy przebadać, aby oszacować procent ludzi w tej populacji palących papierosy, z dokładnością 1% (błąd bezwzględny).

Zadanie 2.25 L-14
Na 100 strzałów oddanych z pewnego rodzaju broni cel został trafiony 93 razy. Znaleźć przedział ufności dla prawdopodobieństwa p trafienia celu w jednym strzale, obliczyć błąd względny tego oszacowania.

Zadanie 2.26 L-15
Wykonano 10 pomiarów pewnej wielkości i otrzymano wyniki: 0,32; 0,38; 0,33; 0,33; 0,37; 0,32; 0,35; 0,34; 0,36; 0,31. Zakładając, że pomiary te pochodzą z populacji o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$, wyznaczyć przedział ufności dla wartości średniej i odchylenia standardowego mierzonej wielkości.

Zestaw 1

Korzystając z podanych informacji wyznacz przedział ufności dla wartości oczekiwanej. Zakładamy, że rozpatrywana cecha ma rozkład normalny.

l.p.	n	średnia	s	1 - α
1	5	10	2	0,9
2	7	12	3	0,91
3	9	14	4	0,92
4	11	16	5	0,93
5	13	18	6	0,94
6	15	20	2	0,95
7	17	22	3	0,96
8	19	24	4	0,97
9	21	26	5	0,98
10	23	28	6	0,99
11	8	11	2	0,9
12	10	13	3	0,91
13	12	15	4	0,92
14	14	17	5	0,93
15	16	19	6	0,94
16	18	21	2	0,95
17	20	23	3	0,96
18	22	25	4	0,97
19	24	27	5	0,98
20	26	29	6	0,99
21	5	20	2	0,94
22	7	22	3	0,95
23	9	24	4	0,96
24	11	26	5	0,97
25	13	28	6	0,98

Zestaw 2

Korzystając z podanych informacji wyznacz przedział ufności dla wartości oczekiwanej. Zakładamy, że rozpatrywana cecha ma rozkład normalny.

l.p.	n	średnia	s^2	1 - α
1	10	10	1	0,9
2	12	12	2	0,91
3	14	14	3	0,92
4	16	16	4	0,93
5	18	18	5	0,94
6	20	20	1	0,95
7	22	22	2	0,96
8	24	24	3	0,97
9	26	26	4	0,98
10	28	28	5	0,99
11	9	11	1	0,9
12	11	13	2	0,91
13	13	15	3	0,92
14	15	17	4	0,93
15	17	19	5	0,94
16	19	21	1	0,95
17	21	23	2	0,96
18	23	25	3	0,97
19	25	27	4	0,98
20	27	29	5	0,99
21	5	20	1	0,94
22	7	22	2	0,95
23	9	24	3	0,96
24	11	26	4	0,97
25	13	28	5	0,98

Zestaw 3

Korzystając z podanych informacji wyznacz przedział ufności dla wartości oczekiwanej. Zakładamy, że rozpatrywana cecha ma rozkład normalny.

l.p.	n	średnia	suma kwadratów	1 - α
1	8	20	3208	0,9
2	11	22	5346	0,91
3	14	24	8106	0,92
4	17	26	11560	0,93
5	20	28	15780	0,94
6	23	30	20838	0,95
7	26	32	26806	0,96
8	29	34	33756	0,97
9	8	36	10440	0,98
10	11	38	15994	0,99
11	14	21	6188	0,9
12	17	23	9027	0,91
13	20	25	12560	0,92
14	23	27	16859	0,93
15	26	29	21996	0,94
16	29	31	28043	0,95
17	8	33	8768	0,96
18	11	35	13563	0,97
19	14	37	19292	0,98
20	17	39	26027	0,99
21	5	20	2055	0,94
22	7	22	3472	0,95
23	9	24	5301	0,96
24	11	26	7590	0,97
25	13	28	10387	0,98

Zestaw 4

Korzystając z podanych informacji wyznacz przedział ufności dla odchylenia standardowego. Zakładamy, że rozpatrywana cecha ma rozkład normalny.

l.p.	n	s	1 - α
1	5	2	0,9
2	7	3	0,91
3	9	4	0,92
4	11	5	0,93
5	13	6	0,94
6	15	2	0,95
7	17	3	0,96
8	19	4	0,97
9	21	5	0,98
10	23	6	0,99
11	8	2	0,9
12	10	3	0,91
13	12	4	0,92
14	14	5	0,93
15	16	6	0,94
16	18	2	0,95
17	20	3	0,96
18	22	4	0,97
19	24	5	0,98
20	26	6	0,99
21	5	7	0,93
22	7	8	0,94
23	9	9	0,95
24	11	10	0,96
25	13	11	0,97

Zestaw 5

Korzystając z podanych informacji wyznacz przedział ufności dla odchylenia standardowego. Zakładamy, że rozpatrywana cecha ma rozkład normalny.

l.p.	n	s^2	1 - α
1	10	1	0,9
2	12	2	0,91
3	14	3	0,92
4	16	4	0,93
5	18	5	0,94
6	20	1	0,95
7	22	2	0,96
8	24	3	0,97
9	26	4	0,98
10	28	5	0,99
11	9	1	0,9
12	11	2	0,91
13	13	3	0,92
14	15	4	0,93
15	17	5	0,94
16	19	1	0,95
17	21	2	0,96
18	23	3	0,97
19	25	4	0,98
20	27	5	0,99
21	9	6	0,93
22	11	7	0,94
23	13	8	0,95
24	15	9	0,96
25	17	10	0,97

Zestaw 6

Korzystając z podanych informacji wyznacz przedział ufności dla odchylenia standardowego. Zakładamy, że rozpatrywana cecha ma rozkład normalny.

l.p.	n	średnia	suma kwadratów	1 - α
1	8	20	3208	0,9
2	11	22	5346	0,91
3	14	24	8106	0,92
4	17	26	11560	0,93
5	20	28	15780	0,94
6	23	30	20838	0,95
7	26	32	26806	0,96
8	29	34	33756	0,97
9	8	36	10440	0,98
10	11	38	15994	0,99
11	14	21	6188	0,9
12	17	23	9027	0,91
13	20	25	12560	0,92
14	23	27	16859	0,93
15	26	29	21996	0,94
16	29	31	28043	0,95
17	8	33	8768	0,96
18	11	35	13563	0,97
19	14	37	19292	0,98
20	17	39	26027	0,99
21	8	41	13616	0,93
22	11	43	20581	0,94
23	14	45	28672	0,95
24	17	47	37791	0,96
25	20	49	48320	0,97

Zestawienie najważniejszych przedziałów ufności.

Poziom ufności = $1-\alpha$ (typowe wartości $1-\alpha$: 0,9; **0,95**; 0,99).

L.p.	Parametr	Rozkład cechy, założenia	Przedział ufności	Wyznaczanie liczby u_α	Błąd względny δ
1	Wartość oczekiwana m	Normalny $N(m,\sigma)$, σ – jest znane	$<\overline{X}-\frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}};\ \overline{X}+\frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}}>$	$\Phi(u_\alpha)=1-\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\sigma u_\alpha}{\overline{x}\sqrt{n}}$
2	Wartość oczekiwana m	Normalny $N(m,\sigma)$, σ – nie jest znane	$<\overline{X}-\frac{S u_\alpha}{\sqrt{n-1}};\ \overline{X}+\frac{S u_\alpha}{\sqrt{n-1}}>$	$P(\lvert T_{n-1}\rvert \geq u_\alpha)=\alpha$	$\frac{S u_\alpha}{\overline{X}\sqrt{n-1}}$
3	Wartość oczekiwana m	Dowolny Liczna próba $n>120$	$<\overline{X}-\frac{S u_\alpha}{\sqrt{n}};\ \overline{X}+\frac{S u_\alpha}{\sqrt{n}}>$	$\Phi(u_\alpha)=1-\frac{\alpha}{2}$	$\frac{S u_\alpha}{\overline{X}\sqrt{n}}$
4	Wariancja σ^2	Normalny $N(m,\sigma)$,	$<\frac{nS^2}{u_1};\frac{nS^2}{u_2}>$	$P(Y_{n-1}\geq u_1)=\frac{\alpha}{2}$ $P(Y_{n-1}\geq u_2)=1-\frac{\alpha}{2}$	—
5	Odchylenie standardowe σ	Normalny $N(m,\sigma)$,	$<\sqrt{\frac{nS^2}{u_1}};\sqrt{\frac{nS^2}{u_2}}>$	$P(Y_{n-1}\geq u_1)=\frac{\alpha}{2}$ $P(Y_{n-1}\geq u_2)=1-\frac{\alpha}{2}$	—
6	Odchylenie standardowe σ	Normalny $N(m,\sigma)$, liczna próba $n>120$	$<S-\frac{u_\alpha S}{\sqrt{2n}};S+\frac{u_\alpha S}{\sqrt{2n}}>$	$\Phi(u_\alpha)=1-\frac{\alpha}{2}$	$\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}$
7	Wariancja σ^2	Normalny $N(m,\sigma)$, liczna próba $n>120$	$<(S-\frac{u_\alpha S}{\sqrt{2n}})^2;(S+\frac{u_\alpha S}{\sqrt{2n}})^2>$	$\Phi(u_\alpha)=1-\frac{\alpha}{2}$	—
8	Prawdopodobieństwo sukcesu p	Rozkład zerojedynkowy $P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$ liczna próba, $n>100$	$<W-u_\alpha\sqrt{\frac{W(1-W)}{n}};W+u_\alpha\sqrt{\frac{W(1-W)}{n}}>$ Gdzie $W=k/n$ k-liczba sukcesów	$\Phi(u_\alpha)=1-\frac{\alpha}{2}$	$\frac{u_\alpha}{W}\sqrt{\frac{W(1-W)}{n}}$

ϕ – dystrybuanta rozkładu normalnego $N(0,1)$

T_{n-1} – zmienna losowa o rozkładzie Studenta z $n-1$ stopniami swobody

Y_{n-1} – zmienna losowa o rozkładzie chi kwadrat (χ^2) z $n-1$ stopniami swobody.

9.11.20