

ZADANIA - ZESTAW 1

Zadanie 1.1

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At^2 + Be^t$, gdzie A, B to nieskorelowane zmienne losowe o parametrach: $EA = 2$; $EB = -3$, $D^2A = 1$, $D^2B = 3$.

Zadanie 1.1a

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = 2t - 1 + At - Bt^2$, gdzie A, B to nieskorelowane zmienne losowe o parametrach: $EA = 0$; $EB = 0$, $D^2A = 1$, $D^2B = 0,5$.

Zadanie 1.2.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At + B$, gdzie A, B to zmienne losowe

o parametrach: $EA = 0$; $EB = 0$, i macierzy kowariancji $K = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 \\ 0,4 & 1,5 \end{bmatrix}$.

Zadanie 1.3.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At + 1$, gdzie A jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w przedziale (0, 1). Jak wyglądają realizacje tego procesu? Które z poniższych funkcji są realizacjami tego procesu? $x_1(t) = 0,3t + 1$; $x_2(t) = -0,3t + 1$; $x_3(t) = 2t + 1$.

Wyznaczyć współczynniki a, b aby $X(t_2) = aX(t_1) + b$.

Zadanie 1.4.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At - 3$, gdzie A jest zmienną losową o rozkładzie $N(3, 1)$. Jak wyglądają realizacje tego procesu?

Wyznaczyć współczynniki a, b aby $X(t_2) = aX(t_1) + b$.

Zadanie 1.5.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = \cos(t + B)$, gdzie B to zmienna losowa o rozkładzie jednostajnym w przedziale $\langle -\Pi, \Pi \rangle$.

Zadanie 1.6.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = A \sin(t + B)$, gdzie A, B to zmienne losowe niezależne o rozkładach jednostajnych w przedziałach odpowiednio $\langle -0,5; 0,5 \rangle$ i $\langle -\Pi, \Pi \rangle$.;

Zadanie 1.7a.

Dany jest proces stochastyczny $X(t) = tA$, $t \in R$, gdzie A jest zmienną losową skokową o funkcji prawdopodobieństwa

a_i	-1	1	2
p_i	0,3	0,5	0,2

Wyznaczyć i narysować realizacje tego procesu.
Jakie są prawdopodobieństwa tych realizacji.

Zadanie 1.7.

Proces $X(t)$ ma tylko 3 realizacje:

$$x_1(t) = t; \quad x_2(t) = t + 1; \quad x_3(t) = t + 2.$$

Realizacje te są przyjmowane odpowiednio z prawdopodobieństwami: $1/2, 1/3, 1/6$.

Wyznaczyć parametry tego procesu.

Wyznaczyć współczynniki a, b aby $X(t_2) = aX(t_1) + b$.

Zadanie 1.7a.

Proces $X(t)$ ma tylko 3 realizacje: $x_i(t) = it; i = 1, 2, 3$. Realizacje te są przyjmowane odpowiednio z prawdopodobieństwami $i/6$.

Wyznaczyć parametry tego procesu.

Wyznaczyć współczynniki a, b aby $X(t_2) = aX(t_1) + b$.

Zadanie 1.8.

Proces $X(t)$ ma tylko 4 realizacje:

$$x_1(t) = t; \quad x_2(t) = t + 1; \quad x_3(t) = t + 2; \quad x_4(t) = t - 1.$$

Realizacja ostatnia jest przyjmowana z prawdopodobieństwem $0,1$, a pozostałe realizacje są przyjmowane z takim samym prawdopodobieństwem. Wyznaczyć parametry tego procesu.

Wyznaczyć współczynniki a, b aby $X(t_2) = aX(t_1) + b$.

Zadanie 1.8a.

Proces $X(t)$ ma tylko 4 realizacje:

$$x_1(t) = -t; \quad x_2(t) = -t + 1; \quad x_3(t) = -t + 2; \quad x_4(t) = -t - 1.$$

Realizacja ostatnia jest przyjmowana z prawdopodobieństwem 0,4, a pozostałe realizacje są przyjmowane z takim samym prawdopodobieństwem. Wyznaczyć parametry tego procesu.

Wyznaczyć współczynniki a, b aby $X(t_2) = aX(t_1) + b$.

Zadanie 1.9.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = Ae^t + Be^{-t}$, gdzie A, B to zmienne losowe o parametrach: $EA = 0$; $EB = 0$, i $D^2A = 1$, $D^2B = 2$; $\text{cov}(A, B) = -1$.

Zadanie 1.10.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = A + Bt$, gdzie A, B to zmienne losowe o parametrach: $EA = -1$; $EB = 1$, i $D^2A = 1$, $D^2B = 4$; $\rho_{AB} = -0,5$.

Zadanie 1.11.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At^2 + B$, gdzie A, B to zmienne losowe nieskorelowane. A ma rozkład wykładniczy z parametrem 1,5, B jest zmienną losową skokową o rozkładzie dwupunktowym takim, że: $P(B = -1) = P(B = 1)$;

Zadanie 1.12a.

Dany jest proces $X(t) = f(t)A$, gdzie f jest funkcją rzeczywistą (nielosową), A jest zmienną losową. Sprawdzić, że

$$m(t) = f(t)EA$$

$$D^2(t) = f^2(t)D^2A$$

$$K(t_1, t_2) = f(t_1)f(t_2)D^2A$$

$$|\rho(t_1, t_2)| = 1$$

Zadanie 1.12b.

Dany jest proces $X(t) = f(t)A + g(t)$, gdzie f, g są funkcjami rzeczywistymi (nielosowymi), A jest zmienną losową. Sprawdzić, że

$$m(t) = f(t)EA + g(t)$$

$$D^2(t) = f^2(t)D^2A$$

$$K(t_1, t_2) = f(t_1)f(t_2)D^2A$$

$$|\rho(t_1, t_2)| = 1$$

Zadanie 1.12.

Dany jest proces $Y(t) = f(t)X(t) + g(t)$, gdzie f, g są funkcjami rzeczywistymi (nielosowymi). Wyrazić parametry procesu $Y(t)$ za pomocą parametrów procesu $X(t)$.

Zadanie 1.13.

Wyznaczyć parametry procesu $X(n) = n^2 Y_n + 3n$, gdzie Y_n to niezależne zmienne losowe o rozkładzie zerojedynkowym gdzie $p = 0,25$.

Zadanie 1.14.

Wyznaczyć parametry procesu $X(n) = nY_n + 4n$, gdzie Y_n to niezależne zmienne losowe o rozkładzie dwumianowym o wartościach $\{0, 1, \dots, n\}$ i $p = 0,25$.

Zadanie 1.15.

Proces $X(t)$ ma tylko realizacje: $x_i(t) = it$; $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Realizacje te są przyjmowane

odpowiednio z prawdopodobieństwami $e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ gdzie $\lambda > 0$.

Wyznaczyć parametry tego procesu.

Zadanie 1.16.

Proces $X(t)$ ma tylko realizacje: $x_i(t) = i$; $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Realizacje te są przyjmowane

odpowiednio z prawdopodobieństwami $e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ gdzie $\lambda > 0$.

Wyznaczyć parametry tego procesu.

Zadanie 1.17.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = e^{At}$, $t > 0$; gdzie A to zmienna losowa o rozkładzie wykładniczym z parametrem $a > 0$.

$$\text{Odp. } m(t) = \frac{a}{t+a}, R(t_1, t_2) = \frac{a}{t_1 + t_2 + a}.$$

Zadanie 1.18.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = A \cos t + B \sin t$, gdzie A, B to zmienne losowe o parametrach: $EA = 0$; $EB = 0$, i $D^2A = 1$, $D^2B = 1$; $\text{cov}(A, B) = 0$.

Odp. $m(t) = 0$, $R(t_1, t_2) = \cos(t_1 - t_2)$.

Zadanie 1.19.

Dany jest proces stochastyczny $X(t) = -2t + A$, $t \in R$, gdzie A jest zmienną losową skokową o funkcji prawdopodobieństwa

a_i	-1	0	1
p_i	0,4	0,4	0,2

Wyznacz funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej $X(-2)$, $X(0)$, $X(2)$.

Zadanie 1.20.

Dany jest proces stochastyczny $X(t) = At$, $t \in R$, gdzie A jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(-1, 3)$.

- Wyznacz jednowymiarowy rozkład tego procesu.
- Oblicz $P(X(1) < 0)$.
- Wyznacz parametry tego procesu.

Zadanie 1.21.

Dany jest proces $X(t) = e^{-At}$, $t \in R$, gdzie A jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w przedziale w przedziale $(0;1)$.

- Wykonaj wykres trzech dowolnych realizacji tego procesu.
- Wyznacz parametry tego procesu.

Zadanie 1.22.

Dany jest proces $X(t) = A \cos(vt + \Phi)$, $t \in R$, gdzie A i Φ są zmiennymi losowymi niezależnymi; A ma parametry: $EA = 0$, $D^2A = \sigma^2$, zaś Φ ma rozkład jednostajny w przedziale $(0; 2\pi)$. Wyznacz parametry tego procesu.

Zadanie 1.23.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At - 5$, gdzie A jest zmienną losową o rozkładzie $N(1, 3)$. Jak wyglądają realizacje tego procesu?

Zadanie 1.24.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = Y$, gdzie Y jest zmienną losową o parametrach $EY = m$, $D^2Y = \sigma^2$. Jak wyglądają realizacje tego procesu?

Zadanie 1.25.

Wyznaczyć dwuwymiarową dystrybucję procesu $X(t) = Y$, gdzie Y jest ciągłą zmienną losową o dystrybucji F .

Zadanie 1.26.

Wyznaczyć jednowymiarową gęstość procesu $X(t) = Yt + c$, gdzie Y jest zmienną losową o rozkładzie $N(m, \sigma)$.

Zadanie 1.27.

Dany jest proces $X(t)$, $t \in [0; 1]$, gdzie $X(0) = 0$, $X(t) = A_j$, dla $t \in \left(\frac{1}{2^j}; \frac{1}{2^{j-1}}\right]$, $j = 1, 2, 3, 4$,

A_j - niezależne zmienne losowe o jednakowym rozkładzie, takie, że $EA_j = 0$, $D^2 A_j = 1$, np. $A_j = N(0; 1)$.

Sprawdź, że $m(t) = 0$, $R(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } (t_1, t_2) \in T_j \times T_j \\ 0 & \text{gdy } (t_1, t_2) \notin T_j \times T_j \end{cases}$.

Zadanie 1.28.

Uzasadnij własności:

$$K(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2)$$

$$D^2(t) = \sigma^2(t) = K(t, t)$$

$$D^2(t) = \sigma^2(t) = E(X_t^2) - (EX_t)^2$$

Wskazówka. Skorzystaj z odpowiednich własności parametrów zmiennych losowych.

Zadanie 1.29.

Dany jest proces $X(t) = f(t)A$, gdzie $f \neq \text{const}$ jest funkcją rzeczywistą (nielosową), A jest zmienną losową. Czy taki proces musi być słabo stacjonarny?

Odp. Nie, p. zadanie 1.12a

Zadanie 1.30.

Dlaczego podane funkcje nie mogą być autokowariancją procesu słabo stacjonarnego?

$$\text{a) } K(\tau) = \sin \tau, \text{ b) } K(\tau) = \sin|\tau|, \text{ c) } K(\tau) = \begin{cases} 1 - \tau^4 & \text{dla } |\tau| \leq 1 \\ 0 & \text{dla } |\tau| > 1 \end{cases},$$

$$\text{d) } K(\tau) = \ln|\tau|, \text{ e) } K(\tau) = 2e^{-\tau},$$

08.04.20