STATYSTYKA MATEMATYCZNA

ZESTAW 0 (POWT. RACH. PRAWDOPODOBIEŃSTWA)

ZADANIA

Zadanie 0.1
Zmienna losowa X ma rozkład określony funkcją prawdopodobieństwa:

x_k	– 2	0	4
p_k	1/3	1/6	1/2

obliczyć EX, D^2X.

(odp. 4/3; 68/9).

Zadanie 0.2
Zmienna losowa X ma rozkład określony funkcją prawdopodobieństwa:

x_k	– 1	0	1	3	4
p_k	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

obliczyć EX, D^2X

(odp. 1,6; 2,84).

Zadanie 0.3
X jest zmienną losową o gęstości $f(x) = \begin{cases} 1{,}5\sqrt{x-1} & dla \;\; 1 < x < 2 \\ 0 & \text{dla } innych \;\; x \end{cases}$

obliczyć EX, D^2X.

(odp. 1,6; 12/175).

Zadanie 0.4
Wykaż, że jeśli istnieje moment rzędu 2 to $D^2X \le E(X-a)^2$, dla dowolnej stałej a.

Zadanie 0.5
Zmienne losowe X , Y mają rozkłady określone funkcjami prawdopodobieństwa:

x_i	– 1	1	3
p_i	1/8	3/4	1/8

y_j	0	2
p_j	1/2	1/2

Sprawdź, że EX = EY, D^2X = D^2Y. Zauważ, że rozkłady X, Y są różne.

Zadanie 0.6
Zmienna losowa X ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej równej 1,5.
Zmienna losowa Y ma rozkład jednostajny w przedziale (-1, 1).
Wiedząc, że X, Y są niezależne, obliczyć:
a) E(-2X + 3EY+2)
b) D^2(2X - 3D^2Y +4)

(odp. a) -1; b) 7)

Zadanie 0.7
Zmienna losowa X ma rozkład $N(1{,}5;\,3)$. Obliczyć:
a) $P(X < 2{,}5)$,
b) $P(X > -0{,}5)$,
c) $P(0{,}5 < X < 2)$
d) $P(|2X - 1| < 1)$,
e) $P(|X| > 0{,}5)$,
Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.
(odp. a) 0,6293; b) 0,75; c) 0,2, d) 0,1, e) 0,88)

Zadanie 0.8
Dochód pewnej grupy pracowników ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 1000 zł i odchyleniu standardowym 200 zł. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 2 wylosowanych pracowników z tej grupy nie będzie ani jednego o dochodzie powyżej 1200 zł.
(odp. około 0,7)

Zadanie 0.9
Według producenta maksymalny przebieg silnika bez remontu jest zmienną losową o rozkładzie $N(500000,\,40000)$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że silnik zapewni przebieg powyżej 550 000 km?
(odp. około 0,1056)

Zadanie 0.10
Gęstość zmiennej losowej X określona jest wzorem:

$$f(x) = ae^{-\frac{(x+3)^2}{8}} \quad x \in R\,.$$

Wyznaczyć:
a) wartość parametru a,
b) obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wartości tej zmiennej losowej będą różnić się od jej wartości oczekiwanej nie więcej niż o 1 (wynik zinterpretować na wykresie gęstości).

(odp. a) a = 0,19947; b) 0,68)

Zadanie 0.11
Zmienna losowa X ma rozkład $N(0;\,1)$. Wyznaczyć x dla których:
a) $P(X < x) = 0{,}5$ $\quad P(X > x) = 0{,}5$
b) $P(X < x) = 0{,}05$ $\quad P(X > x) = 0{,}05$
c) $P(|X| < x) = 0{,}95$ $\quad P(|X| < x) = 0{,}99$

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.
(odp. a) 0; b) 1,64; –1,64 c) 1,96; 2,58)

Zadanie 0.12
Zmienna losowa X ma rozkład $N(-2;\,3)$. Wyznaczyć x dla których:
a) $P(X < x) = 0{,}6$ $\quad P(X < x) = 0{,}4$ $\quad P(X > x) = 0{,}1$
b) $P(|X+2| > x) = 0{,}1$ $\quad P(|X+2| < x) = 0{,}98$

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.
(odp. a) – 1,24; – 2,76; 1,84; b) 4,9; 6,99)

Zadanie 0.13
Określić błąd standardowy dalmierza wiedząc, że jego pomiary nie są obarczone błędem systematycznym a błędy przypadkowe X mają rozkład normalny i z prawdopodobieństwem 0,95 mieszczą się w przedziale ± 20 m.

(odp. 10,2)

Zadanie 0.14
Wzrost X w pewnej populacji chłopców ma rozkład $N(160, 10)$. Jaki jest wzrost określonego chłopca z tej populacji jeśli wiadomo, że co czwarty chłopiec z tej populacji jest od niego wyższy?

Wskazówka. Wyznacz x z zależności $P(X > x) = 0,25$.

(odp. 166,7)

Zadanie 0.15
Zmienna losowa Y_{20} ma rozkład chi kwadrat o 20 stopniach swobody. Obliczyć:

a) $P(Y_{20} > 20)$;

b) $P(Y_{20} < 20)$;

c) $P(Y_{20} > 30)$;

d) $P(Y_{20} < 10)$

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

(odp. a) około 0,45; b) 0,54; c) 0,07; d) 0,03)

Zadanie 0.16
Zmienna losowa Y_n ma rozkład chi kwadrat o n stopniach swobody
Stosując tablice dystrybuanty N(0; 1) i przybliżenie

$$\sqrt{2Y_n} \sim N(\sqrt{2n-1};1).$$

Obliczyć

a) $P(Y_{61} > 32)$;

b) $P(Y_{61} < 50)$;

c) $P(Y_{113} > 72)$;

d) $P(Y_{113} < 98)$;

(odp. a) 0,999; b) 0,16; c) 0,999; d) 0,16)

Zadanie 0.17
Zmienna losowa Y_n ma rozkład chi kwadrat o n stopniach swobody. Wyznaczyć x dla których:

a) $P(Y_{20} > x) = 0,9$; $P(Y_{20} > x) = 0,95$; $P(Y_{20} > x) = 0,99$;

b) $P(Y_{10} > x) = 0,9$; $P(Y_{10} > x) = 0,95$; $P(Y_{10} > x) = 0,99$;

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

(odp. a) 12,443; 10,851; 8,26 b) 4,865; 3,94; 2,558

Zadanie 0.18
Zmienna losowa T_n ma rozkład Studenta o n stopniach swobody. Obliczyć:

a) $P(|T_{15}| > 0{,}8)$,

b) $P(|T_{100}| < 0{,}3)$,

c) $P(T_{20} > 2{,}5)$;

d) $P(T_{20} < 2)$;

e) $P(|T_{30} - 1| < 0{,}6)$

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

(odp. a) około 0,45; b) 0,24; c) 0,01; d) 0,97; e) 0,286)

Zadanie 0.19
Zmienna losowa T_n ma rozkład Studenta o n stopniach swobody. Wyznaczyć x dla których:

a) $P(|T_6| > x) = 0{,}05$; $P(|T_6| > x) = 0{,}1$;

b) $P(T_8 > x) = 0{,}1$; $P(T_8 < x) = 0{,}05$;

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

(odp. a) 2,447; 1,943)

Zadanie 0.20
Zmienna losowa $F_{n_1;n_2}$ ma rozkład F-Snedecora o (n_1, n_2) stopniach swobody.
Wyznaczyć x dla których:

a) $\mathrm{P}(F_{5;10} > x) = 0{,}05$;

b) $\mathrm{P}(F_{20;12} < x) = 0{,}95$;

(odp. a) 3,33)

Zadanie 0.21
Pokazać, że suma niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrami λ_1, ..., λ_n jest również zmienną losową o rozkładzie Poissona o parametrze $\lambda_1 + ... + \lambda_n$.

(Wskazówka: zastosować f. charakterystyczne)

Zadanie 0.22
Pokazać, że suma niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(m_i, \sigma_i)$, $i = 1, ..., n$; jest zmienną losową $N(m_1 + ... + m_n, \sigma_1 + ... + \sigma_n)$.

(Wskazówka: zastosować f. charakterystyczne)

Zadanie 0.23
Zmienna losowa X ma gęstość

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le -1\\ x+1 & -1<x\le 0\\ 1-x & 0<x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

Wyznacz funkcję charakterystyczną tej zmiennej losowej.

(odp. $\frac{1}{it}\left(\frac{1}{it}e^{-it}+\frac{1}{it}e^{it}-\frac{2}{it}\right)=\left(\frac{\sin 0{,}5t}{0{,}5t}\right)^2$)

Zadanie 0.24
Niech X i Y będą niezależne o rozkładzie jednostajnym na (-0,5; 0,5). Pokazać, że ich suma ma rozkład o gęstości jak w poprzednim zadaniu.

Zadanie 0.25
Zmienna losowa (*X, Y*) ma rozkład określony tabelą:

X \ *Y*	– 1	0
1	0,4	0,3
0	0,1	0,2

Wyznaczyć macierz korelacji. Obliczyć współczynnik korelacji między tymi zmiennymi. Czy *X, Y* są skorelowane? Czy *X, Y* są niezależne?

(odp. $K=\begin{bmatrix}0{,}21 & -0{,}05\\ -0{,}05 & 0{,}25\end{bmatrix}$)

Zadanie 0.26
Zmienna losowa (*X, Y*) ma rozkład określony tabelą:

X \ *Y*	0	1	2
5	0,0	0,0	0,1
6	0,1	0,2	0,1
7	0,3	0,1	0,1

Wyznacz rozkład zmiennej losowej *X*. Wyznacz rozkład zmiennej losowej *Y*.
Obliczyć współczynnik korelacji między tymi zmiennymi.
Czy *X, Y* są skorelowane? Czy *X, Y* są niezależne?

(odp. – 0,47)

Zadanie 0. 27
Zmienna losowa (*X, Y*) ma macierz kowariancji: $K=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -1 & 9\end{bmatrix}$.

Ile wynosi współczynnik korelacji między *X* i *Y*?

(odp. – 1/6)

Zadanie 0.28

(X, Y) ma rozkład o gęstości $f(x,y)=\frac{1}{300\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-30)^2}{100}+\frac{(y-40)^2}{225}\right]\right\}$.

Czy X, Y są skorelowane? Czy X, Y są niezależne?

(odp. są nieskorelowane i niezależne)

Zadanie 0.29

Wiadomo, że EX = – 2, EY = 3 dla dwuwymiarowego rozkładu normalnego a macierz kowariancyjna

$$K=\begin{bmatrix}16 & 12\\ 12 & 25\end{bmatrix}$$

Zapisać wzór na gęstość tego rozkładu. Zapisać wzór na funkcję charakterystyczną tej zmiennej losowej.

Podać równanie prostej regresji Y względem X. Oblicz współczynnik korelacji.

Czy X, Y są skorelowane? Czy X, Y są niezależne?

(odp. są skorelowane, ρ = 0,6)

Zadanie 0.30

Gęstość 2 wymiarowego rozkładu normalnego wyraża się funkcją

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x^2+2xy+5y^2\right)\right\}$$

Zapisać gęstość rozkładu brzegowego $f_1(x)$ i określić jego parametry.

Zapisać gęstość rozkładu warunkowego $f_2(y|x)$ i określić jego parametry.

Zadanie 0.31

Wyznaczyć wartość parametru c aby funkcja

$$f(x,y)=c\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x^2-xy+y^2\right)\right\}$$

była gęstością 2 wymiarowego rozkładu normalnego.

Wyznaczyć macierz kowariancji tej zmiennej losowej.

Zadanie 0.32

Rzucamy 4 razy monetą. X - liczba orłów uzyskanych w tych rzutach, Y - liczba serii orłów.

a) Wypisać wszystkie zdarzenia elementarne w tym doświadczeniu losowym.
b) Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej (X, Y),
c) Wyznaczyć rozkłady brzegowe i i ich wartości oczekiwane,
d) Wyznaczyć i narysować linie regresji I rodzaju,
e) Wyznaczyć i narysować proste regresji II rodzaju.
f) Czy X i Y są niezależne ? czy są skorelowane?

Zadanie 0.33

Sprawdź, że punktowa granica ciągu dystrybuant

$$F_n(x)=\begin{cases}0 & \text{gdy } x\le -n\\ \frac{x+n}{2n} & \text{gdy } -n<x\le n\\ 1 & \text{gdy } x>n\end{cases}$$

jest funkcją, która nie jest dystrybuantą.

Zadanie 0.34
Rzucamy a) 100, b) 1000, c) 10000 razy monetą. Oszacować stosując nierówność Czebyszewa i Bernsteina prawdopodobieństwo, że liczba orłów będzie różnić się od wartości oczekiwanej o więcej niż 5%.

Zadanie 0.35
Wiadomo, że 70% studentów pewnego wydziału WAT kończy studia w terminie. Jeśli studia na tym wydziale rozpoczęło 60 studentów, to oceń szansę ukończenia przez przynajmniej 45 z nich studiów w terminie. Zastosuj twierdzenie graniczne.

(odp. około 0,2)

Zadanie 0.36
Rzucamy 500 razy kostką sześcienną. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że częstość wypadania jedynki będzie należała do przedziału
(1/6 – 0,05; 1/6 + 0,05).

(odp. około 0,9974)

Zadanie 0.37
Ile razy należy rzucić monetą, aby z prawdopodobieństwem co najmniej 0,975 twierdzić, że częstość wypadania orła będzie należała do przedziału (0,4; 0,6).

(odp. co najmniej 127 razy)

Zadanie 0.38
Wadliwość pewnego wyrobu wynosi 10%. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 100 losowo wybranych sztuk tego wyrobu będzie od 5 do 12 sztuk wadliwych.

(odp. około 0,7)

Zadanie 0.39
Zmienna losowa Y jest średnią arytmetyczną 3200 niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie o wartości oczekiwanej 3 i wariancji 2.

Obliczyć prawdopodobieństwo, że Y przyjmuje wartości z przedziału (2,95; 3,075).

(odp. około 0,976)

Zadanie 0.40
Wiedząc, że wariancja każdej z 4500 niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jest równa 5, oszacować prawdopodobieństwo, że średnia tych zmiennych odchyli się od jej wartości oczekiwanej nie więcej niż o 0,04.

(odp. około 0,77)

L.Kowalski, 26.09.2011