

ZADANIA - ZESTAW 0**Zadanie 0.1**

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony tabelą:

Y	0	1	2
X			
5	0	0	0,1
6	0,1	0,2	0,1
7	0,3	0,1	0,1

- wyznaczyć $F(1; 1)$, $F(6; 2)$, $F(7; 1)$,
- obliczyć $P(|X| \geq 6; |Y| \leq 1)$,
- wyznacz rozkłady warunkowe $X | Y = 1$; $Y | X = 5$,
- obliczyć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych X i Y ,
- wyznacz macierz kowariancji i macierz korelacji zmiennej (X, Y) ,
- obliczyć wartości oczekiwane zmiennych z punktu c).
- Czy X, Y są niezależne?, Czy X, Y są skorelowane? Oceń siłę korelacji.

$$\text{Odp. } K = \begin{bmatrix} 0,44 & -0,26 \\ -0,26 & 0,69 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & -0,47 \\ -0,47 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 0.1a

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony tabelą:

X	-1	0	1	2
Y				
-2	0	0,2	0	0,1
0	0,1	0,1	0,1	0,1
2	0	0	0	0,3

- wyznacz rozkłady brzegowe.
- obliczyć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych X i Y oraz (X, Y) ,
- wyznacz macierz kowariancji i macierz korelacji zmiennej (X, Y) ,
- Czy X, Y są niezależne?, Czy X, Y są skorelowane? Oceń siłę korelacji.

$$\text{Odp. } K = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,8 \\ 0,8 & 2,4 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0,47 \\ 0,47 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 0.1b

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony tabelą:

X \ Y	-1	0	1	2
-2	0	0,1	0	0,1
0	0,1	0,1	0,1	0,1
2	0	0	0	0,4

- wyznacz rozkłady brzegowe.
- obliczyć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych X i Y oraz (X, Y) ,
- wyznacz macierz kowariancji i macierz korelacji zmiennej (X, Y) ,
- Czy X, Y są niezależne?, Czy X, Y są skorelowane? Oceń siłę korelacji.

$$\text{Odp. } K = \begin{bmatrix} 1,16 & 0,72 \\ 0,72 & 2,24 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0,45 \\ 0,45 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 0.2

(X, Y) jest zmienną losową o gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{dla } (x, y) \in D \\ 0 & \text{dla } (x, y) \notin D \end{cases}$$

gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $(0; 0); (1; 0); (1; 1)$.

- wyznaczyć c ,
- wyznaczyć $F(1; 0,5)$,
- wyznaczyć gęstości rozkładów brzegowych,
- wyznaczyć gęstość rozkładu $X | Y = 0,5$,
- obliczyć EX, EY ,
- obliczyć $\text{cov}(X, Y)$,
- obliczyć współczynnik korelacji,
- Czy X, Y są nieskorelowane? Czy są niezależne?
- wyznacz prostą regresji Y względem X ,

$$\text{Odp. a) } c = 2; \text{ e) } EX = 2/3, EY = 1/3; \text{ f) } \text{cov}(X, Y) = 1/36; \text{ g) } \rho = 1/2$$

Zadanie 0.3

Zmienna losowa (X, Y) ma macierz kowariancji: $K = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$.

Ile wynosi współczynnik korelacji między X i Y ?

Zapisz macierz korelacji zmiennej (X, Y) ,

Wyznacz wariancje zmiennych X i Y , (X, Y) oraz $X + Y$.

Zadanie 0.3a

Wykaż, że

a) $D^2(X + Y) = D^2X + D^2Y + 2\text{cov}(X, Y)$.

b) $D^2(X + Y + Z) = D^2X + D^2Y + D^2Z + 2(\text{cov}(X, Y) + \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z))$.

Zadanie 0.3b

Zmienne losowe X, Y są niezależne. Wykaż, że

$$D^2(XY) = D^2X \cdot D^2Y + D^2X(EY)^2 + D^2Y(EX)^2$$

Wsk. Jeśli X, Y są niezależne i g, h to funkcje ciągłe wtedy $g(X), h(Y)$ też są niezależne.

Zadanie 0.3c

Niech $EX = -1; EY = 1; D^2X = 3; D^2Y = 2; X, Y$ to niezależne zmienne losowe.

Oblicz EZ gdy:

a) $Z = X^2 - 5Y^2 + 2XY - 2Y + 3X - 5$.

b) $Z = (X - Y + 2)^2$.

Zadanie 0.4

Funkcja $f(x, y, z)$ jest gęstością zmiennej losowej (X, Y, Z) .

$$f(x, y, z) = \begin{cases} c & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3 \\ 0 & \text{dla innych } x, y, z \end{cases}$$

a) wyznaczyć c ,

b) czy X, Y, Z są niezależne?

c) wyznacz wektor wartości oczekiwanych tej zmiennej losowej.

Zadanie 0.5

Wyznaczyć wartość parametru c aby funkcja $f(x, y) = c \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2)\right\}$

była gęstością 2 wymiarowego rozkładu normalnego.

Wyznaczyć parametry $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$.

Zadanie 0.6

(X, Y) ma rozkład o gęstości

$$f(x, y) = \frac{1}{300\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-30)^2}{100} + \frac{(y-40)^2}{225}\right]\right\}.$$

Czy X, Y są skorelowane? Czy X, Y są niezależne?

Zadanie 0.7

Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkłady jednostajne odpowiednio w przedziałach $[0, 3]$ i $[-2, 2]$.

Wyznacz gęstość rozkładu łącznego (X, Y) .

- obliczyć $EX, EY, D^2X; D^2Y$,
- ile wynosi $\text{cov}(X, Y)$,
- ile wynosi współczynnik korelacji,

Zadanie 0.8

(X, Y) ma rozkład o dystrybuancie

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-3x} - e^{-4y} + e^{-3x-4y} & \text{dla } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{dla innych } x, y \end{cases}$$

Wyznacz gęstość zmiennej losowej (X, Y) .

Zadanie 0.9

Wyznaczyć wartość parametru c aby funkcja

$$f(x, y) = c \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 - xy + y^2)\right\}$$

była gęstością 2 wymiarowego rozkładu normalnego.

Wyznaczyć macierz kowariancji tej zmiennej losowej.

Zadanie 0.10

Wyznaczyć gęstość rozkładu normalnego (X, Y, Z) jeśli rozkład ten ma wektor wartości oczekiwanych $E(X, Y, Z) = [1, -1, 0]$ i macierz kowariancji:

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Oblicz $D^2(X + Y + Z)$.

Odp. $D^2(X + Y + Z) = 21$

Zadanie 0.11

Funkcja

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{230\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{230}(39x^2 + 36y^2 + 26z^2 - 44xy + 36xz - 38yz)\right\}$$

jest gęstością 3 wymiarowego rozkładu normalnego.

Wyznaczyć wektor wartości oczekiwanych i macierz kowariancji tej zmiennej losowej.

Zadanie 0.12

Rzucamy 4 razy monetą.

X - liczba orłów uzyskanych w tych rzutach,

Y - liczba serii orłów.

- a) Wypisać wszystkie zdarzenia elementarne w tym doświadczeniu losowym.
- b) Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej (X, Y) ,
- c) Wyznaczyć rozkłady brzegowe i ich wartości oczekiwane,
- d) Czy X i Y są niezależne ? czy są skorelowane?

Zadanie 0.12a

Rzucamy 3 razy monetą.

X - liczba orłów w pierwszym rzucie,

Y - liczba wszystkich orłów.

- a) Wypisać wszystkie zdarzenia elementarne w tym doświadczeniu losowym.
- b) Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej (X, Y) ,
- c) Wyznaczyć rozkłady brzegowe i ich wartości oczekiwane,
- d) Obliczyć $E[3(1+X)Y]$

Wsk. d) skorzystać z wartości oczekiwanej funkcji zmiennej losowej. Odp. 7,5

Zadanie 0.13

Wyznaczyć wartość parametru c aby funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{dla } |x| \leq 2, |y| \leq 2 \\ 0 & \text{dla innych } x, y \end{cases}$$

była gęstością prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej dwuwymiarowej.

Oblicz a) $P(X < -1, Y > 1)$, b) $P(X > 0, Y > 0)$, c) $P(X < Y)$.

Wyznacz dystrybuantę tej zmiennej losowej.

Wyznacz wektor wartości oczekiwanych tej zmiennej losowej.

Wyznacz macierz kowariancji i macierz korelacji tej zmiennej losowej.

Czy X, Y są niezależne?

Zadanie 0.14

Wykazać, że macierz $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą kowariancji.

Zapisz odpowiadającą jej macierz korelacji R .

Zadanie 0.15

Wyznaczyć $E(X_n)$, $\text{cov}(X_n, X_m)$, $D^2(X_n)$, $\rho(X_n, X_m)$, dla ciągu losowego $X_n = An+B$, gdzie A , to zmienna losowa $A \sim N(-1, 2)$, B to stała.

Zadanie 0.15a

Wyznaczyć $E(X_n)$, $\text{cov}(X_n, X_m)$, $D^2(X_n)$, $\rho(X_n, X_m)$, dla ciągu losowego $X_n = An+B$, gdzie A , B to zmienne losowe o parametrach: $EA = 1$; $EB = -1$, $D^2A = 2$, $D^2B = 3$, $\rho = -0,5$.

Zadanie 0.16

Wyznaczyć $E(X_n)$, $\text{cov}(X_n, X_m)$, $D^2(X_n)$, $\rho(X_n, X_m)$, dla ciągu losowego

$$X_n = A\cos(n+B),$$

gdzie A, B to niezależne zmienne losowe o jednostajnym rozkładzie w przedziale $[-\pi, \pi]$.

Zadanie 0.17

Zmienne losowe X i Y są niezależne. X ma rozkład $N(-1, 2)$ a Y ma rozkład Poissona z parametrem 2.

Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $Z = -2X + 3Y - 1$.

$$\text{Odp. } EZ = 7; D^2Z = 34$$

Zadanie 0.17a

Zmienne losowe X i Y są niezależne. X ma rozkład $N(-2, 3)$ a Y ma rozkład wykładniczy z parametrem 0,5.

Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $Z = -3X + 2Y - 4$.

Zadanie 0.18

Macierz $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą kowariancji zmiennych X i Y .

Ile wynosi współczynnik korelacji między X i Y ?

Zapisz macierz korelacji zmiennej (X, Y) ,

Wyznacz wariancje zmiennych X i Y , (X, Y) oraz $X + Y$.

Zadanie 0.19

Wykazać, że ciąg zmiennych losowych

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - m)}{n}$$

jest zbieżny stochastycznie do zera.

Zakładamy, że zmienne losowe są niezależne o takim samym rozkładzie i skończonych momentach rzędu 2.

(Wsk. Wykazać zbieżność średniokwadratową)

Zadanie 0.20

Sprawdź, że punktowa granica ciągu dystrybuant

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \leq -n \\ \frac{x+n}{2n} & \text{gdy } -n < x \leq n \\ 1 & \text{gdy } x > n \end{cases}$$

jest funkcją, która nie jest dystrybuantą.

Zadanie 0.21

Niech X_1, X_2, \dots, X_n , zmienne losowe niezależne o rozkładzie jednostajnym w $(0; 1)$. Jaki asymptotyczny rozkład ma zmienna losowa

$$Y_n = \sqrt{\frac{12}{n}} \left(\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{2} \right)$$

(Odp. $N(0; 1)$. Wsk. Skorzystać z Centralnego Twierdzenia Granicznego)

Zadanie 0.22

Niech X_1, X_2, \dots, X_n , zmienne losowe o rozkładzie równomiernym na zbiorze

$$\left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$$

Oblicz $E(X_n), D^2(X_n)$,

(Odp. $E(X_n) = 1/2, D^2(X_n) = (n+2)/(12n)$.)

$$\text{Wsk. } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$