ZADANIA - ZESTAW 5

Zadanie 5.1

Gęstość 2 wymiarowego rozkładu normalnego wyraża się funkcją

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x^2+2xy+5y^2\right)\right\}$$

Zapisać gęstość rozkładu brzegowego $f_1(x)$ i określić jego parametry.
Zapisać gęstość rozkładu warunkowego $f_2(y|x)$ i określić jego parametry.

Zadanie 5.2

Wyznaczyć wartość parametru c aby funkcja

$$f(x,y)=c\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x^2-xy+y^2\right)\right\}$$

była gęstością 2 wymiarowego rozkładu normalnego.
Wyznaczyć macierz kowariancji tej zmiennej losowej.

Zadanie 5.3

Wyznaczyć gęstość rozkładu normalnego (X, Y, Z) jeśli rozkład ten ma wektor wartości oczekiwanych E(X, Y, Z) = $[1, -1, 0]^T$ i macierz kowariancji:

$$K=\begin{bmatrix}3&1&3\\1&2&2\\3&2&4\end{bmatrix}$$

Zadanie 5.4

Funkcja

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{230\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{230}\left(39x^2+36y^2+26z^2-44xy+36xz-38yz\right)\right\}$$

jest gęstością 3 wymiarowego rozkładu normalnego.
Wyznaczyć wektor wartości oczekiwanych i macierz kowariancji tej zmiennej losowej.

Zadanie 5.5

Funkcja $f(t,s)=\exp\left\{2it-is-\frac{1}{2}\left(4t^2+9ts+9s^2\right)\right\}$

jest funkcją charakterystyczną 2 wymiarowego rozkładu normalnego. Wyznaczyć wektor wartości oczekiwanych i macierz kowariancji tej zmiennej losowej. Wyznaczyć gęstość tego rozkładu.

Zadanie 5.6

Wykazać, że ciąg zmiennych losowych

$$Y_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-m\right)}{n}$$

jest zbieżny stochastycznie do zera.

Zakładamy, że zmienne losowe są niezależne o takim samym rozkładzie i skończonych momentach rzędu 2.

(Wsk. Wykazać zbieżność średniokwadratową)

Zadanie 5.7
Sprawdź, że punktowa granica ciągu dystrybuant

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \le -n \\ \dfrac{x+n}{2n} & \text{gdy } -n < x \le n \\ 1 & \text{gdy } x > n \end{cases}$$

jest funkcją która nie jest dystrybuantą.

Zadanie 5.8
Rzucamy a) 100, b) 1000, c) 10000 razy monetą. Oszacować stosując nierówność Czebyszewa i Bernsteina prawdopodobieństwo, że liczba orłów będzie różnić się od wartości oczekiwanej o wiecej niż 5%.

Zadanie 5.9
Wiadomo, że 70% studentów pewnego wydziału WAT kończy studia w terminie. Jeśli studia na tym wydziale rozpoczęło 60 studentów, to oceń szansę ukończenia przez przynajmniej 45 z nich studiów w terminie. Zastosuj twierdzenie graniczne.

(odp. około 0,2)

Zadanie 5.10
Rzucamy 500 razy kostką sześcienną. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że częstość wypadania jedynki będzie należała do przedziału (1/6 – 0,05; 1/6 + 0,05).

(odp. około 0,9974)

Zadanie 5.11
Ile razy należy rzucić monetą aby z prawdopodobieństwem co najmniej 0,975 twierdzić, że częstość wypadania orła będzie należała do przedziału (0,4; 0,6).

(odp. co najmniej 127 razy)

Zadanie 5.12
Ile razy należy rzucić monetą aby z prawdopodobieństwem 0,95 twierdzić, że częstość wypadania orła będzie różniła się od 0,5 co najwyżej o 0,1.

(odp. co najmniej 96 razy)

Zadanie 5.13
Wadliwość pewnego wyrobu wynosi 10%. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 100 losowo wybranych sztuk tego wyrobu będzie od 5 do 12 sztuk wadliwych.

(odp. około 0,7)

Zadanie 5.14

Zmienna losowa Y jest średnią arytmetyczną 3200 niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie o wartości oczekiwanej 3 i wariancji 2.

Obliczyć prawdopodobieństwo, że Y przyjmuje wartości z przedziału (2,95; 3,075).

(odp. około 0,976)

Zadanie 5.15

Wiedząc, że wariancja każdej z 4500 niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jest równa 5, oszacować prawdopodobieństwo, że średnia tych zmiennych odchyli się od jej wartości oczekiwanej nie więcej niż o 0,04.

(odp. około 0,77)

30.04.2009