

ZADANIA - ZESTAW 4

Zadanie 4.1

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony tabelą:

$X \backslash Y$	-1	0
-1	0,4	c
0	0,1	0,2

Wyznacz c. Wyznacz rozkłady brzegowe. Czy X, Y są niezależne?

(odp. $c = 0,3$)

Zadanie 4.1-2

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony tabelą:

$X \backslash Y$	-1	0
-1	0,4	0,3
0	0,1	0,2

Wyznaczyć macierz kowariancji i korelacji. Czy X, Y są skorelowane? Czy X, Y są niezależne? Podać równanie prostej regresji Y względem X .

(odp. $\rho = 0,22$, $K = \begin{bmatrix} 0,21 & -0,05 \\ -0,05 & 0,25 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0,22 \\ 0,22 & 1 \end{bmatrix}$; $y = 0,24x - 0,336$)

Zadanie 4.2

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony tabelą:

Y	0	1	2
X			
5	0	0	0,1
6	0,1	0,2	0,1
7	0,3	0,1	0,1

- wyznaczyć $F(1; 1)$, $F(6; 2)$, $F(7; 1)$,
- obliczyć $P(|X| \geq 6; |Y| \leq 1)$,
- wyznacz rozkłady warunkowe $X | Y = 1$; $Y | X = 5$,

(odp. a) $F(1; 1) = 0$, $F(6; 2) = 0$, $F(7; 1) = 0,1$;
 b) $0,7$; c) $X | Y = 1: [6]2/3; [7]1/3; Y | X = 5: [2]1$)

Zadanie 4.2-2

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony tabelą:

$X \backslash Y$	0	1	2
5	0,0	0,0	0,1
6	0,1	0,2	0,1
7	0,3	0,1	0,1

Obliczyć współczynnik korelacji między tymi zmiennymi.

Podać równanie prostej regresji Y względem X .

Czy X, Y są skorelowane? Czy X, Y są niezależne?

(odp. $\rho = -0,47, y = 4,7 - 0,59x$)

Zadanie 4.3

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony tabelą:

$Y \backslash X$	0	1	2
-1	0,1	0	0,1
0	0,1	0,2	0,1
1	0,3	0,1	0

- obliczyć EX, EY ,
- obliczyć $cov(X, Y)$,
- obliczyć współczynnik korelacji,
- Czy X, Y są nieskorelowane? Czy są niezależne?
- wyznacz prostą regresji Y względem X ,

Zadanie 4.4

Zmienna losowa (X, Y) ma macierz kowariancji:

$$K = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ile wynosi współczynnik korelacji między X i Y ?

(odp. $-1/6$)

Zadanie 4.5

Macierz $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą kowariancji.

Zapisz odpowiadającą jej macierz korelacji R .

(odp. $R = \begin{bmatrix} 1 & -0,7 \\ -0,7 & 1 \end{bmatrix}$)

Zadanie 4.6

Wiadomo, że $EX = -2$, $EY = 3$ dla dwuwymiarowego rozkładu normalnego a macierz kowariancyjna

$$K = \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 25 \end{bmatrix}$$

Podać równanie prostej regresji Y względem X .

Oblicz współczynnik korelacji.

Czy X, Y są skorelowane?

Czy X, Y są niezależne?

(odp. są skorelowane, $\rho = 0,6$)

Zadanie 4.7

Wyznaczyć wartość parametru c aby funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{dla } |x| \leq 2, |y| \leq 2 \\ 0 & \text{dla innych } x, y \end{cases}$$

była gęstością prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej dwuwymiarowej.

Oblicz a) $P(X < -1, Y > 1)$, b) $P(X > 0, Y > 0)$, c) $P(X < Y)$.

Wyznacz $F(0,0)$. Wyznacz gęstości warunkowe $X | Y = 1$; $Y | X = 0$,

Czy X, Y są niezależne?

(odp. $c = 1/16$; a) $1/16$; b) $1/4$; c) $1/2$; $F(0,0) = 0,25$;

$$f(x, |Y = 1) = \begin{cases} 0,25 & \text{dla } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases}; f(y, |X = -1) = \begin{cases} 0,25 & \text{dla } |y| \leq 2 \\ 0 & \text{dla innych } y \end{cases}$$

X, Y są zależne)

Zadanie 4.8

(X, Y) jest zmienną losową o gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{dla } (x, y) \in D \\ 0 & \text{dla } (x, y) \notin D \end{cases}$$

gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $(0; 0)$; $(1; 0)$; $(1; 1)$.

a) wyznaczyć c ,

b) wyznaczyć $F(1; 0,5)$,

c) wyznaczyć gęstości rozkładów brzegowych,

d) wyznaczyć gęstość rozkładu $X | Y = 0,5$,

e) Czy są niezależne?

(odp. $c = 2$; $F(1; 0,5) = 0,75$;

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in (0,1) \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases}; f(y) = \begin{cases} 2(1-y) & \text{dla } y \in (0,1) \\ 0 & \text{dla innych } y \end{cases}$$

$$f(x, |Y = 0,5) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (0,5;1) \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases}$$

X, Y są zależne)

Zadanie 4.9

Wyznaczyć wartość parametru c aby funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{dla } |x| \leq 1, |y| \leq 2 \\ 0 & \text{dla innych } x, y \end{cases}$$

była gęstością prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej dwuwymiarowej. Wyznacz $F(0, 0)$. Oblicz a) $P(Y > 1)$, b) $P(X > 0, Y > 0)$, c) $P(X < 2Y)$.

Zadanie 4.10

Dystrybuanta zmiennej losowej (X, Y) wyraża się wzorem:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y} & \text{dla } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{dla innych } x, y \end{cases}$$

Wyznacz gęstość tej zmiennej losowej.

Wyznacz a) $P(X < 2, Y < 1)$, b) $P(X < 1)$.

$$\text{(odp. } f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{dla } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{dla innych } x, y \end{cases} ;$$

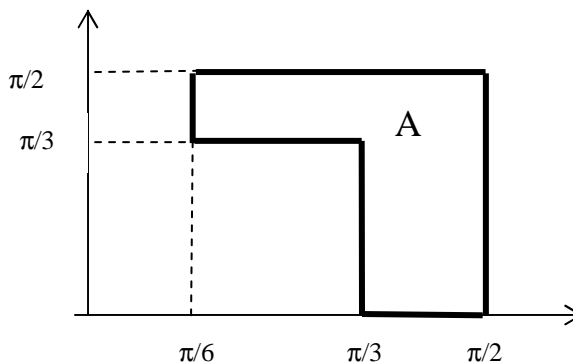
$$\text{a) } P(X < 2, Y < 1) = F(2, 1) = 1 - e^{-2} - e^{-1} + e^{-3}, \text{ b) } P(X < 1) = F(1, \infty) = 1 - e^{-1}$$

Zadanie 4.11

Dystrybuanta zmiennej losowej (X, Y) ma postać

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \vee y \leq 0 \\ 0,5(\sin x + \sin y - \sin(x+y)) & 0 < x \leq \pi/2, 0 < y \leq \pi/2 \\ 0,5(\sin x + 1 - \cos x) & 0 < x \leq \pi/2, y > \pi/2 \\ 0,5(\sin y + 1 - \cos y) & 0 < y \leq \pi/2, x > \pi/2 \\ 1 & x > \pi/2, y > \pi/2 \end{cases}$$

- Wyznacz gęstość tej zmiennej losowej,
- Wyznacz wektor wartości oczekiwanych tej zmiennej losowej,
- Oblicz $P((X, Y) \in A)$,
- Czy X, Y są niezależne?



$$\text{(odp. a) } f(x, y) = \begin{cases} 0,5(\sin(x+y)) & 0 < x \leq \pi/2, 0 < y \leq \pi/2 \\ 0 & \text{dla innych } x, y \end{cases} ,$$

$$\text{b) } [\pi/4; \pi/4], \quad \text{c) } \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Zadanie 4.12

(X, Y) ma rozkład o dystrybuancie

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-3x} - e^{-4y} + e^{-3x-4y} & \text{dla } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{dla innych } x, y \end{cases}$$

Wyznacz gęstość zmienne losowej (X, Y).

$$(\text{odp. } f(x, y) = \begin{cases} 12e^{-3x-4y} & \text{dla } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{dla innych } x, y \end{cases})$$

Zadanie 4.13

Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkłady jednostajne odpowiednio w przedziałach [0, 3] i [-2, 2]. Wyznacz gęstość rozkładu łącznego (X, Y).

Zadanie 4.14

Niezależne zmienne losowe X, Y przyjmują wartości -1 i 2 z prawdopodobieństwem i odpowiednio 0,6 i 0,4.

Obliczyć:

- rozkład łączny zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y) i dystrybuantę tego rozkładu
- wartość oczekiwaną i wariancję sumy X+Y i różnicy (X-Y) tych zmiennych losowych
- funkcję charakterystyczną sumy X+Y i różnicy X-Y tych zmiennych losowych

Odp. a)

X/Y	-1	2	
-1	0,36	0,24	0,6
2	0,24	0,16	0,4
	0,6	0,4	

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \vee y \leq -1 \\ 0,36 & -1 < x \leq 2 \wedge -1 < y \leq 2 \\ 0,6 & (-1 < x \leq 2 \wedge -1 < y) \vee (-1 < y \leq 2 \wedge -1 < x) \\ 1 & x > 2 \wedge y > 2 \end{cases}$$

b)

Rozkład X

xi	-1	2
pi	0,6	0,4

Rozkład Y

yi	-1	2
pi	0,6	0,4

EX = EY = 0,2;

D²X = D²Y = 2,16

E(X+Y) = 0,4

Wariancja sumy

D²(X+Y) = D²(X-Y) = D²X + D²Y = 4,32

c)

Funkcja charakterystyczna

$\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = 0,6e^{-it} + 0,4e^{2it}$

Dla niezależnych

$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = (0,6e^{-it} + 0,4e^{2it})^2$

$\varphi_{X-Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(-t) = (0,6e^{-it} + 0,4e^{2it})(0,6e^{it} + 0,4e^{-2it})$

Zadanie 4.15

Wyznaczyć wartość parametru c aby funkcja

$$f(x, y, z) = \begin{cases} c & \text{dla } |x| \leq 1, |y| \leq 2, |z| \leq 3 \\ 0 & \text{dla innych } x, y, z \end{cases}$$

była gęstością prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej trójwymiarowej.

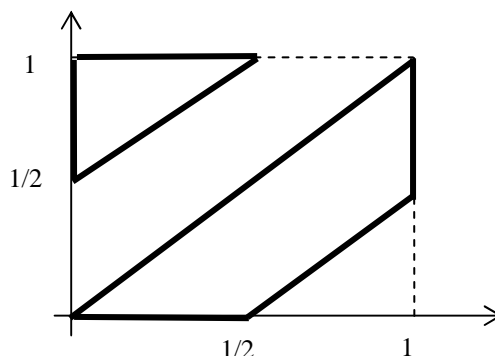
Wyznacz $F(0, 0, 0)$. Oblicz a) $P(Y > 1)$, b) $P(X > 0, Y > 0, Z > 0)$, c) $P(X < 2Y)$.

Wyznacz wektor wartości oczekiwanych tej zmiennej losowej.

Wyznacz macierz kowariancji i macierz korelacji tej zmiennej losowej.

Zadanie 4.16

Zmienna losowa (X, Y) ma stałą gęstość na zaznaczonym zbiorze



Sprawdź, że rozkłady brzegowe mają rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$.

Sprawdź, że X, Y są zależne.

Zadanie 4.17

(X, Y) ma rozkład o gęstości $f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y} & \text{dla } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{dla innych } x, y \end{cases}$

Oblicz $P(X > 1 | Y = y)$ dla $y > 0$.

$$\text{Wsk. } f(x | y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y}}{y} & \text{dla } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{dla innych } x, y \end{cases}$$

(odp. $e^{-1/y}$)

Zadanie 4.18

Sprawdź, że macierz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ nie może być macierzą kowariancji.

Zadanie 4.19

Wyznaczyć rozkład sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrami λ_1, λ_2 .

(odp. Jest to rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$)

28.04.2009