

### ZADANIA - ZESTAW 3

#### Zadanie 3.1 L

Prawdopodobieństwo trafienia celu w jednym strzale wynosi 0,6.

Do celu oddano niezależnie 10 strzałów. Oblicz prawdopodobieństwo, że cel został trafiony:

- a) jeden raz,
- b) dwa razy,
- c) co najmniej raz,
- d) więcej niż dwa razy,
- e) co najmniej trzy razy i mniej niż 8 razy.

#### Zadanie 3.2 L

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład Poissona z parametrem  $\lambda = 8$ . Oblicz:

- a)  $P(X = 6)$
- b)  $P(X = 8)$
- c)  $P(X = 12)$
- d)  $P(X < 10)$
- e)  $P(X \leq 10)$
- f)  $P(X > 7)$
- g)  $P(X \geq 7)$
- h)  $P(6 \leq X < 10)$
- i)  $P(6 \leq X \leq 10)$

#### Zadanie 3.3 L

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład dwumianowy z parametrami  $n = 100$ ,  $p = 0,02$ .

Stosując przybliżenie Poissona oblicz:

- a)  $P(X = 0)$
- b)  $P(X = 2)$
- c)  $P(X = 5)$
- d)  $P(X \geq 1)$
- e)  $P(X \geq 2)$
- f)  $P(X \leq 4)$

**Zadanie 3.4 L**

Wadliwość produkcji pewnych detali jest równa 0,03. Zmienna losowa  $X$  oznacza liczbę wadliwych detali w pudełku liczącym 80 sztuk. Oblicz:

- a)  $P(X = 3)$
- b)  $P(2 \leq X < 7)$
- c)  $P(2 \leq X \leq 7)$
- d)  $P(2 < X \leq 7)$

**Zadanie 3.5 L**

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład  $N(2; 3)$ . Oblicz:

- a)  $P(-4 < X < 11)$
- b)  $P(X < 0)$
- c)  $P(X < 5)$
- d)  $P(X > 1)$
- e)  $P(X > 4)$

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

Oblicz wartość tej zmiennej losowej w punkcie:

- a) 2
- b) 0
- c) -2
- d) 5

**Zadanie 3.6 L**

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład  $N(0; 1)$ .  $\Phi$  jest dystrybucją tej zmiennej losowej. Wyznacz liczbę  $a$  spełniającą zależność:

- a)  $\Phi(a) = 0,01$
- b)  $\Phi(a) = 0,05$
- c)  $\Phi(a) = 0,95$
- d)  $\Phi(a) = 0,99$
- e)  $P(X > a) = 0,02$
- f)  $P(|X| < a) = 0,5$
- g)  $P(|X| > a) = 0,95$

**Zadanie 3.7**

Próbujemy niezależnie 5 razy połączyć się z serwerem poczty elektronicznej. Prawdopodobieństwo połączenia w jednej próbie wynosi 0,8.  $X$  – liczba połączeń. Stablicować funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $X$  i narysować jej wykres. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że z serwerem połączymy się:

- a) 4 razy,
- b) najwyżej 3 razy,
- c) co najmniej 3 razy,
- d) co najmniej 2 razy i nie więcej niż 4 razy,

(odp. a) 0,4096; b) 0,2627; c) 0,94; 0,6656).

**Zadanie 3.8**

Sprawdzić, że dla rozkładu dwumianowego zachodzi następujący wzór rekurencyjny:

$$P(X = k + 1) = \frac{n - k}{k + 1} \frac{p}{q} P(X = k)$$

**Zadanie 3.9**

Wiedząc, że  $X$  jest zmienną losową o rozkładzie dwumianowym ( $n = 3$ ), oraz, że prawdopodobieństwo co najmniej jednego sukcesu wynosi 0,999, wyznacz prawdopodobieństwo sukcesu (parametr  $p$ ).

**Zadanie 3.10**

Zmienna losowa ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej równej 1,5. Obliczyć:

- a)  $P(X = 0)$
- b)  $P(X > 3)$

(odp. a) 0,2231; b) 0,07)

**Zadanie 3.11**

Prawdopodobieństwo wygrania nagrody na loterii wynosi 0,003. Korzystając z przybliżenia Poissona wyznaczyć prawdopodobieństwo, że wśród 500 osób grających na tej loterii:

- a) żadna nie wygra,
- b) wygrają 2 osoby,
- c) wygra najwyżej 5 osób,
- d) wygrają co najmniej 3 osoby,
- e) wygra 0,6% grających,
- f) wygra 0,2% ÷ 0,4% grających,

(odp. a) 0,2231; b) 0,251; c) 0,9955; d) 0,19; e) 0,1255 f) 0,5857)

**Zadanie 3.12**

Czas (w minutach) między kolejnymi wypadkami drogowymi w Polsce ma rozkład wykładniczy o parametrze 2. Ile wynosi średni czas między kolejnymi wypadkami?

Jakie jest prawdopodobieństwo, że najwyżej w ciągu trzech minut nastąpi kolejny wypadek.

(odp.  $EX = 0,5$ ,  $P(X < 3) = 1 - e^{(-6)}$ )

**Zadanie 3.13**

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład  $N(0; 1)$ . Obliczyć:

- a)  $P(X > 1,5)$ ,
- b)  $P(-0,5 < X < 1)$
- c)  $P(|X| < 1,2)$ ,
- d)  $P(|X| > 2)$ ,

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

(odp. a) 0,06681; b) 0,5328; c) 0,76986; d) 0,0455)

**Zadanie 3.14**

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład  $N(-2; 3)$ . Obliczyć:

- a)  $P(X > -1)$ ,
- b)  $P(X < -5)$ ,
- c)  $P(-5 < X < -1)$

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

(odp. a) 0,3707; b) 0,1592; c) 0,47)

**Zadanie 3.15**

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład  $N(1,5; 3)$ . Obliczyć:

- a)  $P(X < 2,5)$ ,
- b)  $P(X > -0,5)$ ,
- c)  $P(0,5 < X < 2)$
- d)  $P(|2X - 1| < 1)$ ,
- e)  $P(|X| > 0,5)$ ,

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

(odp. a) 0,6293; b) 0,75; c) 0,2, d) 0,1, e) 0,88)

**Zadanie 3.16**

Wzrost ludzi w pewnej populacji ma rozkład  $N(170,10)$ . Wyznaczyć procent osób w tej populacji:

- a) mających wzrost poniżej 165 cm,
- b) mających wzrost powyżej 170 cm,
- c) mających wzrost powyżej 180 cm,
- d) mających wzrost powyżej 190 cm,
- e) mających wzrost powyżej 200 cm,
- f) mających wzrost pomiędzy 165 a 170 cm,

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

(odp. a) 31%; b) 50%; c) 16%; d) 2%; e) 0,1%; f) 19%)

**Zadanie 3.17**

Dochód pewnej grupy pracowników ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 1000 zł i odchyleniu standardowym 200 zł. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 2 wylosowanych pracowników z tej grupy nie będzie ani jednego o dochodzie powyżej 1200 zł.

(odp. około 0,7)

**Zadanie 3.18**

Według producenta maksymalny przebieg silnika bez remontu jest zmienną losową o rozkładzie  $N(300000, 40000)$ . Jakie jest prawdopodobieństwo, że silnik zapewni przebieg powyżej 350 000 km?

(odp. około 0,1056)

**Zadanie 3.19**

Reklama cukierków TIK-TAK zapewnia, że mają one tylko 2 kalorie. Jak duże powinno być odchylenie standardowe rozkładu kaloryczności tych cukierków aby szansa trafienia na cukierek zawierający co najmniej 3 kalorie była mniejsza niż 0,01 (przyjmujemy rozkład normalny  $N(2, \sigma)$ )?

(odp.  $\sigma < 0,429$ )

**Zadanie 3.20**

Straty pewnej grupy firm mają rozkład normalny o wartości oczekiwanej 10 000 zł i odchyleniu standardowym 5 000 zł. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 3 wylosowanych firm z tej grupy będzie dokładnie jedna przynosząca zyski.

**Zadanie 3.21**

Gęstość zmiennej losowej  $X$  określona jest wzorem:  $f(x) = ae^{-\frac{(x+3)^2}{8}}$   $x \in R$ .  
Wyznaczyć:

- a) wartość parametru  $a$ ,
  - b) obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wartości tej zmiennej losowej będą różnić się od jej wartości oczekiwanej nie więcej niż o 1 (wynik zinterpretować na wykresie gęstości).
- (odp. a)  $a = 0,19947$ ; b)  $0,68$ )

**Zadanie 3.22**

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład  $N(m, \sigma)$ .

Wyznaczyć współczynnik asymetrii i kurtozę tego rozkładu.

**Zadanie 3.23**

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład  $N(0; 1)$ . Wyznaczyć  $x$  dla których:

- a)  $P(X < x) = 0,5$        $P(X > x) = 0,5$
- b)  $P(X < x) = 0,05$        $P(X > x) = 0,05$
- c)  $P(|X| < x) = 0,95$        $P(|X| < x) = 0,99$

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

(odp. a) 0; b) -1,64; 1,64 c) 1,96; 2,58)

**Zadanie 3.24**

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład  $N(-2; 3)$ . Wyznaczyć  $x$  dla których:

- a)  $P(X < x) = 0,6$        $P(X < x) = 0,4$        $P(X > x) = 0,1$
- b)  $P(|X + 2| > x) = 0,1$        $P(|X + 2| < x) = 0,98$

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

(odp. a) - 1,24; - 2,76; 1,84; b) 4,9; 6,99)

**Zadanie 3.25**

Określić błąd standardowy dalmierza wiedząc, że jego pomiary nie są obarczone błędem systematycznym a błędy przypadkowe  $X$  mają rozkład normalny i z prawdopodobieństwem 0,95 mieszczą się w przedziale  $\pm 20$  m.

(odp. 10,2)

**Zadanie 3.26**

Wzrost  $X$  w pewnej populacji chłopców ma rozkład  $N(160, 10)$ . Jaki jest wzrost określonego chłopca z tej populacji jeśli wiadomo, że co czwarty chłopiec z tej populacji jest od niego wyższy?

Wskazówka. Wyznacz  $x$  z zależności  $P(X > x) = 0,25$ .

(odp. 166,7)

**Zadanie 3.27**

Które z poniższych funkcji nie mogą być funkcjami charakterystycznymi?

1.  $\varphi(t) = \frac{1}{1+t}$ ,

2.  $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$ ,

3.  $\varphi(t) = \sin at$ ,

4.  $\varphi(t) = \cos at$ ,

5.  $\varphi(t) = 1 - it$ .

(odp. 1) , 3) nie sp. wł. f); 5) nie sp. wł. a))

**Zadanie 3.28**

Wyznacz funkcję charakterystyczną rozkładu Poissona.

Korzystając z niej wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję tego rozkładu.

**Zadanie 3.29**

Korzystając z funkcji charakterystycznej rozkładu wykładniczego wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję tego rozkładu.

**Zadanie 3.30**

Wyznacz funkcję charakterystyczną rozkładu geometrycznego.

Korzystając z niej wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję tego rozkładu.

**Zadanie 3.31**

Wyznacz funkcję charakterystyczną rozkładu jednostajnego na przedziale (0, 1). Następnie korzystając z własności funkcji charakterystycznej wyznacz funkcję charakterystyczną rozkładu jednostajnego na przedziale (a, b),  $a < b$ .

**Zadanie 3.32**

Wyznacz funkcję charakterystyczną rozkładu liczby wyrzuconych orłów przy rzucie trzema monetami.

**Zadanie 3.33**

Pokazać, że suma niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrami  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  jest również zmienną losową o rozkładzie Poissona o parametrze  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ .

**Zadanie 3.34**

Pokazać, że suma niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie  $N(m_i, \sigma_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; jest zmienną losową  $N(m_1 + \dots + m_n, \sigma_1 + \dots + \sigma_n)$ .

**Zadanie 3.35**

Zmienna losowa  $X$  ma funkcję prawdopodobieństwa

$$P(X = -2) = 0,25; P(X = 0) = 0,5; P(X = 2) = 0,25$$

Wyznacz funkcję charakterystyczną tej zmiennej losowej.

(odp. a)  $\cos^2 t$ )

**Zadanie 3.36**

Zmienna losowa  $X$  ma dystrybuantę 
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ 0,5 & -1 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

a) Wyznacz funkcję charakterystyczną tej zmiennej losowej.

b) Wyznacz funkcję charakterystyczną zmiennej losowej  $Y = 2X + 1$ .

(odp. a)  $\cos t$ )

**Zadanie 3.37**

Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej, której funkcja charakterystyczna ma postać  $\varphi(t) = \cos t$ .

$$(\text{Wsk. } \cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \text{ odp. } P(X = -1) = P(X = 1) = 0,5)$$

**Zadanie 3.38**

Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej, której funkcja charakterystyczna ma postać  $\varphi(t) = \cos^2 t$ .

$$(\text{Wsk. } \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)),$$

$$(\text{odp. } P(X = -2) = 0,25; P(X = 0) = 0,5; P(X = 2) = 0,25)$$

**Zadanie 3.39**

Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej, której funkcja charakterystyczna ma postać  $\varphi(t) = 0,25(1 + e^{it})^2$ .

$$(\text{Wsk. } 0,25(1 + e^{it})^2 = 0,25 + 0,5e^{it} + 0,25e^{2it}),$$

$$(\text{odp. } P(X = 0) = 0,25; P(X = 1) = 0,5; P(X = 2) = 0,25)$$

**Zadanie 3.40**

Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej, której funkcja charakterystyczna ma postać  $\varphi(t) = e^{-0,5t^2}$ .

$$(\text{odp. } N(0, 1))$$

**Zadanie 3.41**

Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 0,5x & 0 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Wyznacz funkcję charakterystyczną tej zmiennej losowej.

$$(\text{odp. } \frac{e^{2it} - 1}{2it})$$

15.04.2009