

ZADANIA - ZESTAW 2

Zadanie 2.1

Zmienna losowa X ma rozkład określony funkcją prawdopodobieństwa:

x_k	- 1	0	2
p_k	1/3	1/6	1/2

- a) wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej losowej i naszkicować jej wykres,
b) obliczyć $P(X > 0)$, $P(X \geq 0)$, $P(X < 1)$, $P(|X| \geq 1)$.

(odp. b) 1/2; 2/3; 1/2; 5/6).

Zadanie 2.1-2

Zmienna losowa X ma rozkład określony funkcją prawdopodobieństwa:

x_k	- 1	0	2
p_k	1/3	1/6	1/2

obliczyć EX , D^2X .

(odp. 2/3; 17/9).

Zadanie 2.2

Zmienna losowa X ma dystrybuantę:

x	$(-\infty, -1]$	$(-1, 3]$	$(3, 7]$	$(7, 10]$	$(10, 15]$	$(15, \infty)$
$F(x)$	0	0,15	0,25	0,4	0,85	1

- a) wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej,
b) obliczyć $P(X > 0)$, $P(X \geq 10)$, $P(0 < X < 5)$, $P(|X| \geq 1)$,

(odp. b) 0,85; 0,6; 0,1; 1;).

Zadanie 2.2-2

Zmienna losowa X ma dystrybuantę:

x	$(-\infty, -1]$	$(-1, 3]$	$(3, 7]$	$(7, 10]$	$(10, 15]$	$(15, \infty)$
$F(x)$	0	0,15	0,25	0,4	0,85	1

Obliczyć EX , D^2X Obliczyć m_4 i kurtozę,

(odp. a) 7,95; 23,9475).

Zadanie 2.3

Dla jakich wartości a funkcja
$$p(k) = a \left(\frac{1}{2} \right)^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

jest funkcją prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej skokowej X ?

(odp. $a = 0,5$).

Zadanie 2.4

Dla jakich wartości a funkcja
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 1 \\ \frac{a}{x^3} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

jest gęstością pewnej zmiennej losowej X .

Wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej losowej i naszkicować jej wykres,

Oblicz $P(X < 2)$. Wyznacz x aby $P(X > x) = 0,5$.

(odp. $a = 2, x = \sqrt{2}$).

Zadanie 2.5

X jest zmienną losową o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases}$$

a) wyznaczyć a ,

b) obliczyć $P(0,25 < X < 0,64)$ i zinterpretować na wykresie gęstości,

(odp. a) 1,5).

Zadanie 2.5-2

X jest zmienną losową o gęstości
$$f(x) = \begin{cases} 1,5\sqrt{x} & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases}$$

Obliczyć EX , EX^2 , D^2X .

(odp. 0,6; 3/7; 12/175).

Zadanie 2.6

X jest zmienną losową o gęstości $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{dla } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{dla } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases}$

Wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej losowej i naszkicować jej wykres,

Obliczyć $P(-0,5 < X < 0,5)$ i zinterpretować na wykresie gęstości,

(odp. 0,75).

Zadanie 2.6-2

X jest zmienną losową o gęstości $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{dla } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{dla } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases}$

a) obliczyć EX, D^2X , b) $Y = 3X - 2$, obliczyć EY, D^2Y .

(odp. a) 0; 1/6; b) -2; 1,5).

Zadanie 2.7

X jest zmienną losową o dystrybuancie $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 10 \\ 0,1x - 1 & \text{dla } 10 < x \leq 20 \\ 1 & \text{dla } x > 20 \end{cases}$

a) wyznaczyć gęstość tej zmiennej losowej

b) obliczyć $P(12 < X < 15)$ i zinterpretować na wykresie gęstości,

c) wyznaczyć x aby $P(X < x) = 0,75$.

Zadanie 2.7-2

X jest zmienną losową o dystrybuancie $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 10 \\ 0,1x - 1 & \text{dla } 10 < x \leq 20 \\ 1 & \text{dla } x > 20 \end{cases}$

a) Obliczyć EX, D^2X . b) $Y = -2X + 4$, obliczyć EY, D^2Y . c) $Z = X^3$, obliczyć EZ .

(odp. a) 15; 100/12).

Zadanie 2.8

X - rozkład wykładniczy o parametrze $a = 10$, tzn. $f(x) = \begin{cases} 10e^{-10x} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$,

wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej $Y = 2 - 3X$.

Zadanie 2.9

X - zmienna losowa skokowa o funkcji prawdopodobieństwa:

-2	-1	0	1	2
0,3	0,1	0,1	0,3	0,2

wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Y = X^2$.

Zadanie 2.10

Zmienna losowa X ma rozkład określony funkcją prawdopodobieństwa:

x_k	-2	-1	0	2	3
p_k	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

a) wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej losowej i naszkicować jej wykres,

b) obliczyć $P(X < 0)$, $P(X \geq 0)$, $P(-2 < X < 1)$, $P(|X| \geq 1)$,

(odp. b) 0,3; 0,7; 0,5; 0,7).

Zadanie 2.10-2

Zmienna losowa X ma rozkład określony funkcją prawdopodobieństwa:

x_k	-2	-1	0	2	3
p_k	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Obliczyć EX , D^2X . Obliczyć m_3 i współczynnik asymetrii.

(odp. a) 0,6; 2,84).

Zadanie 2.11

Czas X bezawaryjnej pracy urządzenia jest zmienną losową o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 10e^{-10x} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases} \quad (\text{rozkład wykładniczy})$$

a) wyznaczyć dystrybuantę,

b) obliczyć $P(0,05 < X < 0,1)$ i zinterpretować na wykresie gęstości i dystrybuanty,

Zadanie 2.12

X jest zmienną losową o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} x - 0,5 & \text{dla } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases}$$

a) wyznaczyć dystrybuantę, narysować wykres dystrybuanty i gęstości,

b) obliczyć $P(1,5 < X < 2)$ i zinterpretować na wykresie gęstości,

(odp. b) 0,625).

Zadanie 2.12-2

X jest zmienną losową o gęstości $f(x) = \begin{cases} x - 0,5 & \text{dla } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases}$

Obliczyć EX , D^2X

(odp. a) 19/12).

Zadanie 2.13

X jest zmienną losową o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{dla } x \in [-2; -1] \\ 0,25 & \text{dla } x \in [0; 2] \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases}$$

Wyznaczyć dystrybuantę, narysować wykres dystrybuanty i gęstości,

a) obliczyć EX , EX^2 ; D^2X b) $Y = 3X - 1$. Oblicz EY , D^2Y .

(odp. a) -1/4; 11/6; 85/48).

Zadanie 2.14

X jest zmienną losową o gęstości $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & \text{dla } x \geq 1 \\ 0 & \text{dla } x < 1 \end{cases}$

Obliczyć EX , D^2X .

(odp. 1,5; 0,75).

Zadanie 2.15

Wykaż, że

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3,$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4,$$

Zadanie 2.16

X jest zmienną losową skokową o funkcji prawdopodobieństwa

$$P(X = 2^n) = a5^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Oblicz a . Dla jakich k istnieją EX^k . Obliczyć EX , D^2X .

(odp. $a = 4$, $k < 3$, $8/3$, $80/9$).

Zadanie 2.17

X jest zmienną losową o gęstości $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{dla } x \notin (0, \pi) \end{cases}$

Obliczyć a . $Y = \cos X$, obliczyć EY .

(odp. $(2\pi - 4)/\pi^2$).

Zadanie 2.18

X jest zmienną losową o gęstości $f(x) = \begin{cases} 0,5x & \text{dla } x \in (0, 2) \\ 0 & \text{dla } x \notin (0, 2) \end{cases}$

Obliczyć m_3 , m_4 , μ_3 , μ_4 .

(odp. $3,2$; $16/3$; $-8/135$; $16/135$).

Zadanie 2.19a

Rzucamy kostką sześcienną. X jest zmienną losową równą liczbie wyrzuconych oczek.

Wyznacz EX , EX^2 ; D^2X .

(odp. $3,5$; $91/6$; $35/12$)

Zadanie 2.19b komputer

Wygeneruj 1000 liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o rozkładzie jednostajnym (symulacja tysiąca rzutów kostką). X jest zmienną losową równą liczbie wyrzuconych oczek.

Wyznacz średnią wartość wyników i porównaj ją z $EX = 3,5$.

Wyznacz średnią wartość kwadratów różnic wyników i liczby 3,5, następnie porównaj ją z $D^2X = 35/12$.

Zadanie 2.20

Rzucamy dwa razy kostką sześcienną. X jest zmienną losową równą iloczynowi liczby wyrzuconych oczek. Korzystając z wyników zadania 2.19a, wyznacz EX , D^2X .

(odp. $49/4$; $11515/144$)

Zadanie 2.21a

Rzucamy dwa razy monetą. Nasza wygrana to tyle złotych ile wyrzucono orłów. Gdy brak orła płacimy 3zł. Czy gra jest sprawiedliwa?, Po ilu turach tej gry możemy przeciętnie wygrać 10zł.

(odp. nie, gra jest korzystna dla nas ($EX = 0,25$); po 40)

Zadanie 2.21b komputer

Wygeneruj 1000 par liczb ze zbioru $\{0, 1\}$ o rozkładzie jednostajnym (symulacja tysiąca dwukrotnych rzutów monetą, 0 = orzeł; 1 = reszka).

X jest zmienną losową równą wygranej w grze z Zadania 2.21a. Wyznacz średnią wartość wygranej i porównaj ją z $EX = 0,25$.

Zadanie 2.22

Nowak zaproponował nam następującą grę: Rzucamy kostką gdy wypadnie nieparzysta liczba oczek to otrzymujemy 1000zł, gdy wypadną dwa oczka płacimy 600zł, gdy wypadną cztery oczka płacimy 1000zł, gdy wypadną dwa oczka płacimy 2000zł.

- jaką mamy szansę wygrania z Nowakiem?,
- jaką mamy szansę przegrania najwyżej 1000zł?,
- jaką mamy szansę przegrania co najmniej 1000zł?,
- czy warto grać z Nowakiem?

(odp. $1/2$; $1/3$; $1/6$; nie, $EX = -100$)

Zadanie 2.23

Zmienne losowe X, Y mają rozkłady określone funkcjami prawdopodobieństwa:

x_i	-2	0	2
p_i	1/8	3/4	1/8

y_j	-1	1
p_j	1/2	1/2

Sprawdź, że $EX = EY, D^2X = D^2Y$. Zauważ, że rozkłady X, Y są różne.

Zadanie 2.24

X jest zmienną losową o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2c|x|^{c+1}} & \text{dla } |x| > 1 \\ 0 & \text{dla } |x| \leq 1 \end{cases} \quad \text{gdzie } c > 0.$$

Dla jakich c istnieje moment rzędu k a nie istnieje moment rzędu $k + 1$?

(odp. $k < c < k + 1$).

Zadanie 2.25a (paradoks petersburski)

Mamy propozycję następującej gry: Wpłacamy pewną stawkę S , następnie rzucamy monetą; gdy wypadnie orzeł to otrzymujemy 2zł, gdy wypadnie reszka to rzucamy ponownie monetą i gdy tym razem wypadnie orzeł to otrzymujemy 4zł, gdy natomiast wypadnie reszka to rzucamy ponownie monetą i gdy tym razem wypadnie orzeł to otrzymujemy 8zł, itd.

- a) jaką stawkę S warto zapłacić?,
- b) jaka jest wartość oczekiwana tej gry?,

Zadanie 2.25b komputer

Wygeneruj kilkadziesiąt 10-cio liczbowych ciągów liczb ze zbioru $\{0, 1\}$ o rozkładzie jednostajnym (symulacja kilkadziesiątu dziesięciokrotnych rzutów monetą, 0 = orzeł; 1 = reszka, zakładamy, że nie trafimy na serię samych jedynek). Wykasuj lub nie bierz pod uwagę elementów ciągu następujących po pierwszym zerze.

X jest zmienną losową równą wygranej w grze z Zadania 2.25a dla $S=0$. Wyznacz średnią wartość wygranej po kolejnych partiach gry. Wynik zilustruj na wykresie.