ELEMENTY SYSTEMÓW KOLEJKOWYCH

WYBRANE ZAGADNIENIA

Lucjan Kowalski

Warszawa 2008

Literatura:

L.Kowalski, materiały dydaktyczne z procesów stochastycznych.
B.Filipowicz, „Modele stochastyczne w badaniach operacyjnych”,
D.Bobrowski, „Probabilistyka w zastosowaniach technicznych”,
A.Plucińska, E.Pluciński, „Probabilistyka”,
L.Kowalski, „Statystyka”.

(Ω, S, P) – **przestrzeń probabilistyczna**
(matematyczny model zjawiska losowego),

Ω – zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych,
S – zbiór zdarzeń, (podzbiory zbioru Ω),
P – prawdopodobieństwo (funkcja przyporządkowująca zdarzeniom szansę ich zajścia).

$$P : S \to R$$

Aksjomaty prawdopodobieństwa:

(PI) $P(A) \geq 0 \quad A \in S$

(PII) $P(\Omega) = 1$

(PIII) $P(A_1 \cup A_2 \cup ....) = P(A_1) + P(A_2) + ...$
$A_i \in S$; parami wykluczające się.

Własności prawdopodobieństwa

a) $P(\emptyset) = 0$

b) $P(A') = 1 - P(A)$
gdzie $A' = \Omega - A$ jest zdarzeniem przeciwnym

c) Jeśli zdarzenia $A_1,...A_n$ wykluczają się, to $\mathrm{P}(A_1 \cup ... \cup A_n) = \mathrm{P}(A_1) + ... + \mathrm{P}(A_n)$

d) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \qquad A_1, A_2 \in S;$

e) $P(A_1) \leq P(A_2)$ dla $A_1 \subset A_2 \quad A_1, A_2 \in S;$

f) Jeśli $A_1 \subset A_2$, to $\mathrm{P}(A_2 - A_1) = \mathrm{P}(A_2) - \mathrm{P}(A_1)$,

Jeśli zdarzeń elementarnych jest skończenie wiele i są one jednakowo prawdopodobne to możemy skorzystać z tzw. **klasycznej definicji prawdopodobieństwa.**

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{liczba \quad zdarzeń \ - \ elementarnych \ sprzyjających}{liczba \ wszystkich \ zdarzeń \ - \ elementarnych} \qquad A \in S$$

Zmienną losową X nazywamy funkcję (praktycznie każdą) przyporządkowującą zdarzeniom elementarnym liczby rzeczywiste.

$$X : \Omega \longrightarrow R$$

Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F: R \longrightarrow R$ określoną wzorem:

$$F(x) = P(X < x) = P_X((-\infty, x))$$

Własności dystrybuanty:

a) F jest funkcją niemalejącą,

b) F jest funkcją lewostronnie ciągłą,

c) $F(-\infty) = 0; \quad F(\infty) = 1,$

d) dystrybuanta zmiennej losowej wyznacza jednoznacznie jej rozkład,

e) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a); \quad a < b$

f) $P(X = a) = F(a^+) - F(a);$ gdzie $F(a^+)$ oznacza granicę prawostronną, (jeśli a jest punktem ciągłości dystrybuanty to $P(X = a) = 0$).

Zmienna losowa jest **skokowa** (**dyskretna**) jeśli zbiór wszystkich jej wartości jest skończony lub przeliczalny.
Rozkład zmiennej losowej skokowej często określamy za pomocą **funkcji prawdopodobieństwa:**

$$P(X = x_k) = p_k$$

(własność: $\sum_k p_k = 1; \ p_k > 0$)

Liczby p_k nazywamy **skokami**, a wartości x_k **punktami skokowymi**.

Zmienna losowa X o dystrybuancie F jest **ciągła** jeśli jej dystrybuanta da się przedstawić w postaci

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad x \in R$$

gdzie f jest funkcją spełniającą warunki:

$$f(x) \geq 0; \quad x \in R; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

i nazywamy ją **gęstością prawdopodobieństwa** zmiennej losowej X.

Własności zmiennej losowej ciągłej:

a) $P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(a)$,

b) $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) =$

$$= P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

c) $P(X > b) = \int_{b}^{\infty} f(x)dx = 1 - F(b)$,

d) $P(X = a) = 0,$ dla dowolnego $a \in R$; (brak punktów skokowych),

e) F jest funkcją ciągłą i prawie wszędzie różniczkowalną $F'(x) = f(x)$ (równość zachodzi dla punktów ciągłości gęstości). Wyznaczając gęstość przez różniczkowanie dystrybuanty, w punktach w których F nie jest różniczkowalna można przyjąć, że gęstość jest równa zero.

Własności rozkładu zmiennej losowej często charakteryzujemy jej **parametrami**.
Jednym z podstawowych parametrów jest wartość oczekiwana.

Wartość oczekiwana. Oznaczenie *EX* lub *m*.
Dla zmiennej losowej skokowej

$$EX = \sum_i x_i p_i$$

(jeśli ewentualny szereg jest zbieżny bezwzględnie, takie szeregi są "odporne" np. na zmianę kolejności wyrazów).
Dla zmiennej losowej ciągłej

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

(jeśli ewentualna całka niewłaściwa jest zbieżna bezwzględnie).

Przykład
Dla zmiennej losowej o funkcji prawdopodobieństwa

x_k	-1	2	3
p_k	0,2	0,6	0,2

$EX = -1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$.

Przykład
Dla zmiennej losowej o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in <0,1> \\ 0 & x \notin <0,1> \end{cases}$$

$$EX = \int_0^1 x \cdot 2x dx = 2\int_0^1 x^2 dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Własności wartości oczekiwanej

a) $Ec = c$; c – stała,

b) $E(aX) = aE(X)$,

c) $E(X + Y) = EX + EY$,

d) Jeśli $a \le X \le b$, to $a \le EX \le b$, jeśli $X \le Y$, to $EX \le EY$,

e) $EX \le E|X|$, $|EX| \le E|X|$

f) X, Y – niezależne, to $E(XY) = EX \cdot EY$.
Miarą rozrzutu wartości zmiennej losowej jest wariancja.
Wariancja. Oznaczenie D^2X lub σ^2 lub VX.

$$D^2X = E(X - EX)^2$$

Dla zmiennej losowej skokowej $D^2X = \sum (x_i - EX)^2 p_i$

Dla zmiennej losowej ciągłej $D^2X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$

Własności wariancji

a) $D^2c = 0$; c – stała,

b) $D^2(aX) = a^2 D^2(X)$,

c) $D^2(X + b) = D^2X$, b – stała,

d) X, Y – niezależne, to $D^2(X \pm Y) = D^2X + D^2Y$

e) $D^2X = E(X^2) - (EX)^2$.

Uzasadnienie e)

$D^2X = E(X - EX)^2 = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = EX^2 - 2EXEX + (EX)^2 =$
$= E(X^2) - (EX)^2$.

Jeśli rozrzut wartości zmiennej losowej chcemy (np. z powodu interpretacji w zastosowaniach) mierzyć w tych samych jednostkach co X to stosujemy odchylenie standardowe.

Odchylenie standardowe. Oznaczenie DX lub σ.

$$DX = \sqrt{D^2 X}$$

Podstawowe rozkłady.

Rozkład dwupunktowy (zerojedynkowy)

Niech $p \in (0, 1)$ będzie ustaloną liczbą. Określamy:

$$P(X = 0) = q,\ P(X = 1) = p\ ;\ \text{gdzie } q = 1 - p.$$

Rozkład ten jest wykorzystywany w statystycznej kontroli jakości. Można np. przyjąć, że $X = 0$ gdy wyrób dobry, $X = 1$ gdy wyrób jest wadliwy, wtedy $p = P(X = 1)$ traktujemy jako wadliwość wyrobu.

Rozkład dwumianowy

Dla danych $p \in (0, 1)$, $n \in N$ określamy funkcję prawdopodobieństwa

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad \text{gdzie } q = 1 - p$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Zauważmy, że gdy $n = 1$ to rozkład dwumianowy jest rozkładem zerojedynkowym.

Jeśli przyjmiemy, że n oznacza liczbę niezależnych doświadczeń z których każde kończy się jednym z dwóch wyników: „sukcesem" (z prawdopodobieństwem p w każdym doświadczeniu) lub „porażką" i zmienna losowa X oznacza liczbę „sukcesów" to powyższy wzór wyznacza **prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie *k* sukcesów w *n* doświadczeniach** (próbach).

Przykład

Prawdopodobieństwo uszkodzenia kserokopiarki przed upływem gwarancji wynosi 0,2. Firma zakupiła 6 kserokopiarek. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przed upływem gwarancji 2 kserokopiarki ulegną uszkodzeniu. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba uszkodzonych kserokopiarek przed upływem gwarancji.

X – liczba uszkodzonych kserokopiarek przed upływem gwarancji,

$$P(X=2)=\binom{6}{2}0{,}2^2 0{,}8^4 = 15\cdot 0{,}04\cdot 0{,}4096 = 0{,}24576$$

Uwaga
Funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X można przedstawić
w tabelce:

x_k	0	1	2	3	4	5	6
p_k	0,2621	0,3932	0,2458	0,0819	0,0154	0,0015	0,0001

Zauważmy, że najbardziej prawdopodobną liczba uszkodzonych kserokopiarek jest 1.

Przykład
Rzucamy 4 razy kostką sześcienną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w co najmniej 3 rzutach liczba oczek będzie podzielna przez 3?.

Szukane prawdopodobieństwo to
P(X ≥ 3) = P(X = 3) + P(X = 4), gdzie „sukcesem” jest uzyskanie 3 lub 6 oczek, więc p = 1/3.
Zatem

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=4\cdot\frac{2}{81}=\frac{8}{81}$$

$$P(X=4)=\binom{4}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=1\cdot\frac{1}{81}=\frac{1}{81}$$

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)=\frac{8}{81}+\frac{1}{81}=\frac{1}{9}$$

Przykład
Obliczymy wartość oczekiwaną rozkładu dwumianowego.

$$EX=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}=$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}=np(p+q)^{n-1}=np$$

Rozkład Poissona
Dla $\lambda > 0$ określamy funkcję prawdopodobieństwa

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(wartości tych prawdopodobieństw zawiera tablica rozkładu Poissona)
Rozkład Poissona (możliwość odczytu w tablicy) może dla dużych n (praktycznie $n \geq 30$) i małych p (praktycznie $p \leq 0{,}2$) przybliżać rozkład dwumianowy (przybliżenie Poissona)

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \text{gdzie } \lambda = n \cdot p$$

Przykład
W pudełku jest 400 żarówek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród nich jest 5 żarówek wadliwych, jeśli wadliwość produkcji takich żarówek wynosi 0,5%? Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba uszkodzonych żarówek w tym pudełku?

Zastosujemy przybliżenie Poissona, $\lambda = n \cdot p = 400 \cdot 0{,}005 = 2$.
W tablicy rozkładu Poissona (tablica I) odczytamy, że:

$$P(X = 5) = 0{,}0361$$

Również w tablicy rozkładu Poissona odczytamy, że najbardziej prawdopodobna liczba uszkodzonych żarówek w tym pudełku to 1 lub 2 (dla obu tych liczb prawdopodobieństwo jest równe 0,2707).

Rozkłady ciągłe

Rozkład jednostajny
Rozkład którego gęstość jest stała w pewnym przedziale nazywamy **jednostajnym**.

Gęstość rozkładu jednostajnego w (a, b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a;\ b) \\ 0 & x \notin (a;\ b) \end{cases}$

Ponieważ gęstość ta ma oś symetrii w punkcie x = (a + b)/2 to

$$\mathrm{E}X = (a+b)/2$$

Pokażemy, że

$$\mathrm{D}^2X = (b-a)^2/12$$

Przykład
Najpierw obliczymy $\mathrm{E}X^2$

$$EX^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{a^2 + 2ab + b2}{3}$$

Zatem

$$D^2 X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Rozkład wykładniczy

Rozkład ten występuje często w zagadnieniach rozkładu czasu między zgłoszeniami (awariami) lub czasu oczekiwania na obsługę w systemach kolejkowych.

Gęstość rozkładu wykładniczego o parametrze a > 0 ma postać

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

dystrybuantą tego rozkładu jest funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

(uzasadnienie: F'(x) = f(x))

Przykład

Obliczymy EX

$$EX = \int_0^\infty xae^{-ax} dx = \left(-xe^{-ax} - \frac{1}{a}e^{-ax}\right)\Big|_0^\infty = \frac{1}{a}$$

Własność.

1) Jeśli liczba zgłoszeń w systemie kolejkowym w przedziale czasu (t, t + T) ma rozkład Poissona o parametrze λT, oraz liczby zgłoszeń przychodzące w rozłącznych przedziałach czasu są niezależne to czas X między kolejnymi zgłoszeniami ma rozkład wykładniczy o parametrze a = 1/λ.
2) Dla dowolnych t, T > 0 mamy

   $P(X \ge t + T \mid X \ge t) = P(X \ge T)$ (własność braku pamięci)

   Uzasadnienie.

   $$P(X \ge t + T \mid X \ge t) = \frac{P(X \ge t + T \wedge X \ge t)}{P(X \ge t)} = \frac{P(X \ge t + T)}{P(X \ge t)} =$$

   $$= \frac{e^{-(t+T)a}}{e^{-ta}} = e^{-Ta} = P(X \ge T)$$

Jest to jedyny rozkład ciągły o tej własności.

Dyskretnym odpowiednikiem rozkładu wykładniczego jest rozkład geometryczny.

Rozkład normalny

Dla $m \in R, \ \sigma \in (0, +\infty)$

Określamy gęstość rozkładu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in R$$

W tablicy II dla $x \in [0; 5)$ podano wartości dystrybuanty Φ rozkładu $N(0, 1)$
Wartości dystrybuanty dla argumentów ujemnych wyznaczamy na podstawie zależności

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

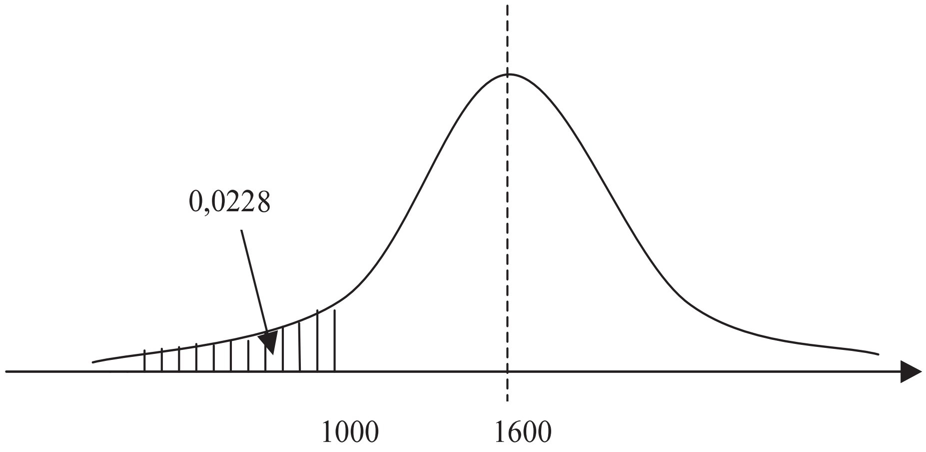
Uwaga
Jeśli X ma rozkład $N(m, \sigma)$ to zmienna losowa $Y = (X - m)/\sigma$ ma rozkład $N(0, 1)$ (takie przekształcenie nazywamy **standaryzacją**).

Przykład
Dochód miesięczny (zł) w pewnej populacji osób ma rozkład normalny $N(1600; 300)$.

Jaki procent osób w tej populacji ma dochód miesięczny poniżej 1000 zł?

X – wysokość miesięcznego dochodu

$$P(X < 1000) = P\left(\frac{X - 1600}{300} < \frac{1000 - 1600}{300}\right) = P(Y < -2) =$$
$$= \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228 = 2{,}28\%$$



Interpretacja graficzna wyniku.

Przykład
Czas wykonania pewnego detalu (min.) jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(m;\ \sigma)$. Wiadomo, że 80% robotników wykonuje ten detal dłużej niż 10 minut a 60% robotników dłużej niż 12 minut.
a) wyznacz parametry rozkładu czasu wykonania detalu m i σ,
b) jaki odsetek robotników wykonuje ten detal w czasie krótszym niż 6 minut?

X – czas wykonania detalu.

$P(X > 10) = 0{,}8$ stąd $\dfrac{m-10}{\sigma} = 0{,}84$

$P(X > 12) = 0{,}6$ stąd $\dfrac{m-12}{\sigma} = 0{,}25$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymamy m = 12,85; σ = 3,39.

$$P(X < 6) = P\left(\frac{X-12{,}85}{3{,}39} < \frac{6-12{,}85}{3{,}39}\right) = P(Y < -2{,}02) =$$
$$= \Phi(-2{,}02) = 1 - \Phi(2{,}02) = 0{,}0217 = 2{,}17\%$$

Prawo trzech sigm

Jeśli X ma rozkład $N(m,\ \sigma)$ to

$$P(m-\sigma < X < m+\sigma) = 0{,}683,$$

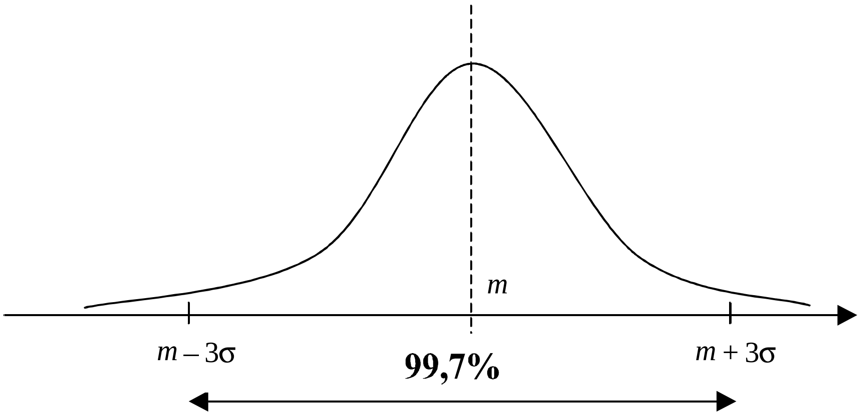
$$P(m-2\sigma < X < m+2\sigma) = 0{,}955\ ,$$

$$\boxed{P(m-3\sigma < X < m+3\sigma) = 0{,}997}$$

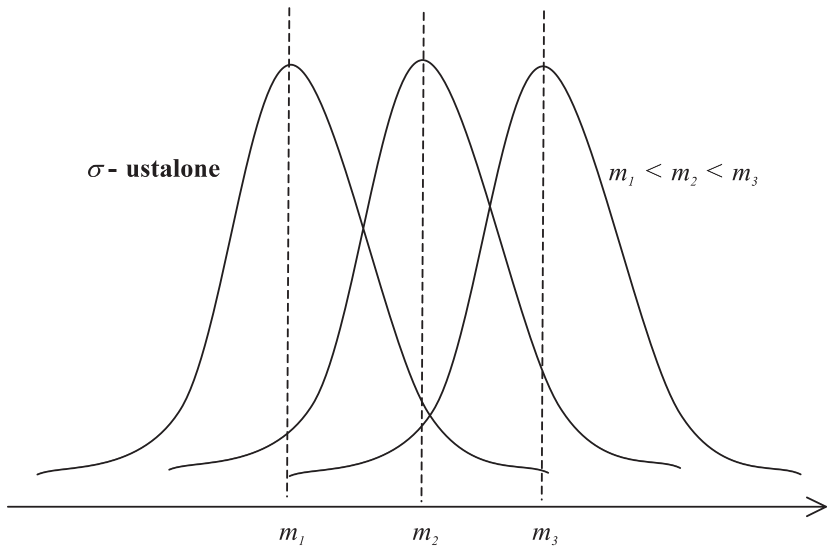
Ostatnia równość świadczy o tym, że chociaż rozkład normalny ma gęstość różną od zera na całej prostej to praktycznie niemal wszystkie realizacje skupiają się w przedziale

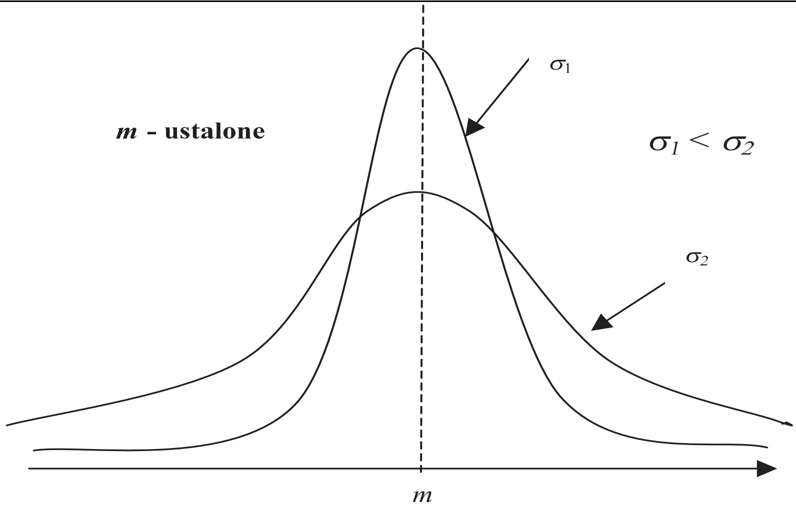
$$(m-3\sigma, m+3\sigma)$$

własność tą nazywamy **prawem trzech sigm**.



Interpretacja graficzna parametrów rozkładu *N*(*m*, σ)




σ_1
m **- ustalone**
$\sigma_1 < \sigma_2$
σ_2
m

PODSTAWOWE ROZKŁADY PRAWDOPODOBIEŃSTWA - ZESTAWIENIE

Rozkłady skokowe.

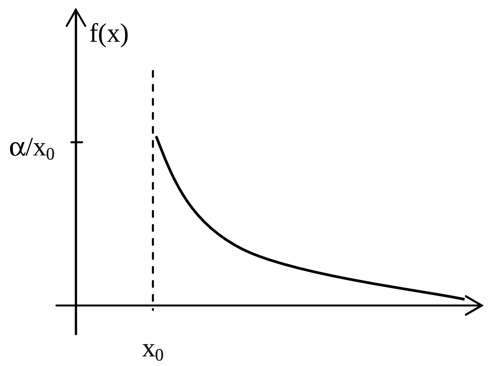
NAZWA ROZKŁADU	**FUNKCJA ROZKŁADU PRAWDOPODOBIEŃSTWA WŁASNOŚCI**	**WART. OCZEKIWANA WARIANCJA INNE PARAMETRY**
Rozkład jednostajny dyskretny c, n - całkowite; n > 0	$P(X=k)=\frac{1}{n}$ k = c, c + 1, c + 2, ..., c + n - 1 (gdy n = 1 to rozkład jednopunktowy) $\varphi(t)=\frac{e^{ict}\left(1-e^{\text{int}}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$	EX = c + (n - 1)/2; $D^2X = (n^2 - 1)/12$ a = 0 $k = 1{,}8 - 2{,}4/(n^2 - 1)$
Rozkład zerojedynkowy $p\in(0,1)$	P(X = 0) = q P(X = 1) = p ; q = 1 - p $\varphi(t)=q+pe^{it}$	EX = p; $D^2X = pq$ $a=\frac{q-p}{\sqrt{pq}}$ $k=\frac{1}{pq}-3$
Rozkład dwumianowy $p\in(0,1)$, $n\in N$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ q = 1 - p k = 0, 1, 2, ... , n X - liczba sukcesów w n próbach B. (patrz przybliżenie Poissona) $\varphi(t)=\left(q+pe^{it}\right)^n$	EX = np; $D^2X = npq$ $a=\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$ $k=\frac{1-6pq}{npq}+3$

Rozkład geometryczny $p \in (0, 1)$	$P(X=k) = pq^k$ q = 1 - p k = 0, 1, 2, ... X - liczba prób B. poprzedzających pierwszy sukces $\varphi(t) = \dfrac{p}{1-qe^{it}}$	EX = q/p; $D^2X = q/p^2$ $a = \dfrac{1+q}{\sqrt{q}}$ $k = \dfrac{p^2}{q} + 9$
Rozkład Poissona λ > 0	$P(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ (tablica I) k = 0, 1, 2, ... dla λ > 9 rozkład Poissona można przybliżać rozkładem N(λ, $\sqrt{\lambda}$), zachodzi wtedy $P(X=k) \approx \Phi\left(\dfrac{k+0{,}5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\dfrac{k-0{,}5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$ gdzie Φ - dystrybuanta rozkładu N(0, 1) $\varphi(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$ Przybliżenie Poissona (n - duże, p - małe) $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $\lambda = n \cdot p$	EX = λ ; $D^2X = \lambda$ $a = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ $k = \dfrac{1}{\lambda} + 3$ $m_3 = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3$, $m_4 = \lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4$ $\mu_3 = \lambda$, $\mu_4 = \lambda + 3\lambda^2$

Rozkłady ciągłe.

NAZWA ROZKŁADU	GĘSTOŚĆ WŁASNOŚCI	WART. OCZEKIWANA WARIANCJA INNE PARAMETRY
Rozkład jednostajny $a, b \in R$ a < b	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a;\ b) \\ 0 & x \notin (a;\ b) \end{cases}$ $\varphi(t) = \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{i(b-a)t}$	EX = (a+b)/2 $D^2X = (b-a)^2/12$ $a = 0$ $k = 1{,}8$ $x_{0,5}$ = (a+b)/2 d - nie istnieje
Rozkład normalny $m \in R,\ \sigma \in (0, +\infty)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in R$ funkcja gęstości ma punkty przegięcia $x = m \pm \sigma$ W tablicy II dla x ∈ [0; 5) podano wartości dystrybuanty Φ rozkładu N(0, 1) Φ(-x) = 1 - Φ(x) X - N(m, σ) ⇒ Y = (X - m)/σ - N(0, 1) (standaryzacja) $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$	EX = m; $D^2X = \sigma^2$ $a = 0$ $k = 3$ $x_{0,5}$ = m d = m $m_k = m \cdot m_{k-1} + (k-1)\sigma^2 m_{k-2}$ $\mu_k = \begin{cases} 0 & \text{gdy k} - \text{nieparzyste} \\ \sigma^k (k-1)!! & \text{gdy k} - \text{parzyste} \end{cases}$

Rozkład wykładniczy $a \in (0, +\infty)$	$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$ (szczególny przypadek rozkładu gamma) $\varphi(t) = \dfrac{a}{a - it}$	EX = 1/a; $D^2X = 1/a^2$ $a = 2$ $k = 9$ $x_{0,5}$ = (ln2)/a ≈ 0,6931/a d = 0 $m_k = \dfrac{k!}{a^k}$ $\mu_k = \dfrac{k!}{a^k} \sum_{j=1}^{k} \dfrac{(-1)^j}{j!}$
Rozkład gamma $p, \lambda \in (0, +\infty)$	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{p-1} e^{-\frac{x}{\lambda}}}{\lambda^p \Gamma(p)} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$ (dla p = 1 jest to rozkład wykładniczy o parametrze a = 1/λ $\varphi(t) = \left(\dfrac{1}{1 - it\lambda} \right)^p$	EX = λp; $D^2X = p\lambda^2$ $a = \dfrac{2}{\sqrt{p}}$ $k = \dfrac{6}{p} + 3$ d = λ(p - 1), p ≥ 1 $m_k = p(p+1)...(p+k-1)\lambda^k$

Rozkład Pareto $\alpha, x_0 \in (0,+\infty)$	$$f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} & x > x_0\\ 0 & x \le x_0\end{cases}$$ 	$EX = \frac{\alpha}{\alpha-1}x_0$ dla α > 1 $D^2X = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}x_0^2$ dla α > 2 $a = \frac{2(\alpha+1)}{\alpha-3}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}}$ dla α > 2 $k = \frac{6(\alpha^3+\alpha^2-6\alpha-2)}{\alpha(\alpha-3)(\alpha-3)}+3$ dla α > 4 $d = x_0$, $x_{0,5} = x_0 2^{1/\alpha}$ $m_k = \frac{\alpha}{\alpha-k}x_0^k$ dla α > k
Rozkład Erlanga $a \in (0, +\infty)$ $m \in N$	$$f(x)=\begin{cases}\frac{a^m}{(m-1)!}x^{m-1}e^{-ax} & x>0\\ 0 & x \le 0\end{cases}$$ (szczególny przypadek rozkładu gamma) Dla m = 1 jest to rozkład wykładniczy. **Uwaga**. Suma m niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem a ma rozkład Erlanga. $$\varphi(t) = \left(\frac{a}{a-it}\right)^m$$	EX = m/a; $D^2X = m/a^2$ $a = \frac{2}{\sqrt{m}}$ $k = \frac{6}{m}+3$ d = (m - 1)/a $m_k = \frac{m(m+1)...(m+k-1)}{a^k}$

Rozkład chi kwadrat $n \in N$	$f(y) = \begin{cases} \dfrac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$ $\boxed{Y_n = X_1^2 + \ldots + X_n^2}$ $X_1, \ldots, X_n$ - niezależne, o rozkładzie N(0, 1) W tablicy III dla n = 1, 2, ..., 30; $P(Y_n \ge k) = \alpha$ dla n > 30 $\sqrt{2Y_n} \sim N(\sqrt{2n-1};1)$ $\varphi(t) = \left(\dfrac{1}{1-2it}\right)^{\frac{n}{2}}$	EX = n; D^2X = 2n $a = \sqrt{\dfrac{8}{n}}$ $k = \dfrac{12}{n} + 3$ $x_{0,5} \approx$ n - 0,67 d = n - 2, n ≥ 2 $m_k = \prod_{j=0}^{k-1}(n+2j)$
Rozkład Studenta $n \in N$	$f(t) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \quad t \in R$ $\boxed{T_n = \dfrac{X}{\sqrt{Y_n}}\sqrt{n}}$ X, Y_n - niezależne X o rozkładzie N(0, 1); Y_n o rozkładzie chi kwadrat z n stopniami swobody W tablicy IV $P(\lvert T_n \rvert \ge k) = \alpha$ Uwaga. $T_n \xrightarrow{n\to\infty} N(0,1)$	EX = 0 ; dla n > 1 D^2X = n/(n-2) dla n > 2 $a = 0$ dla n > 3 $k = \dfrac{6}{n-4} + 3$, dla n > 4 $x_{0,5}$ = 0 dla n > 1 d = 0, dla n > 1 $m_k = \mu_k = 0$ dla k nieparzystych $m_k = \mu_k = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot (k-1)}{(n-2)(n-4)\ldots(n-k)} n^{k/2}$ dla k parzystych

Rozkład F Snedecora $n_1; n_2 \in N$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1-2}{2}}\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ $\boxed{F_{n_1,n_2}=\dfrac{\frac{1}{n_1}Y_{n_1}}{\frac{1}{n_2}Y_{n_2}}};$ $Y_{n_1}; Y_{n_2}$ - niezal. o rozkł. chi kwadrat W tablicy V: $P(F_{n_1;n_2}\ge k)=\alpha$ Uwaga. 1) $\dfrac{F_{n_1;n_2}-\frac{n_1-n_2}{2n_1n_2}}{\frac{n_1+n_2}{2n_1n_2}} \sim N(0,1)$ dla $n_1; n_2 > 30$ 2) $nF(n,\infty)$ ma rozkład Y_n	EX = $\dfrac{n_2}{n_2-2}$ dla $n_2 > 2$ $D^2X = \dfrac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$ dla $n_2 > 4$

Uwaga. Γ - funkcja Eulera, $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

np. Γ(n) = (n - 1)!; $\Gamma(1/2)=\sqrt{\Pi}$; $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\Pi}$.

Zadania.

Zadanie 1

Czas X bezawaryjnej pracy urządzenia jest zmienną losową o gęstości

$$f(x)=\begin{cases}10e^{-10x} & dla\ \ x\geq 0\\ 0 & dla\ \ x<0\end{cases}$$ (rozkład wykładniczy)

a) wyznaczyć dystrybuantę,

b) obliczyć $P(\ 0{,}05 < X < 0{,}1)$ i zinterpretować na wykresie gęstości i dystrybuanty,

Zadanie 2

Czas X bezawaryjnej pracy urządzenia jest zmienną losową o gęstości

$$f(x)=\begin{cases}10e^{-10x} & dla\ \ x\geq 0\\ 0 & dla\ \ x<0\end{cases}$$ (rozkład wykładniczy)

obliczyć EX, D^2X.

Zadanie 3

Próbujemy niezależnie 5 razy połączyć się z serwerem poczty elektronicznej. Prawdopodobieństwo połączenia w jednej próbie wynosi 0,8. X – liczba połączeń. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że z serwerem połączymy się:

a) 4 razy,

b) najwyżej 3 razy,

c) co najmniej 3 razy,

d) co najmniej 2 razy i nie więcej niż 4 razy,

(odp. a) 0,4096; b) 0,2627; c) 0,94; 0,6656).

Zadanie 4

Sprawdzić, że dla rozkładu dwumianowego zachodzi następujący wzór rekurencyjny:

$$P(X=k+1)=\frac{n-k}{k+1}\frac{p}{q}P(X=k)$$

Zadanie 5

Zmienna losowa ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej równej 1,5. Obliczyć:

a) $P(X = 0)$
b) $P(X > 3)$

(odp. a) 0,2231; b) 0,07)

Zadanie 6

Prawdopodobieństwo wygrania nagrody na loterii wynosi 0,003. Korzystając z przybliżenia Poissona wyznaczyć prawdopodobieństwo, że wśród 500 osób grających na tej loterii:

a) żadna nie wygra,
b) wygrają 2 osoby,
c) wygra najwyżej 5 osób,
d) wygrają co najmniej 3 osoby,
e) wygra 0,6% grających,
f) wygra 0,2% ÷ 0,4% grających,

(odp. a) 0,2231; b) 0,251; c) 0,9955; d) 0,19; e) 0,1255) f) 0,5857)

Zadanie 7

Zmienna losowa *X* ma rozkład wykładniczy o parametrze 1.
Pokazać, że zmienna losowa c*X* ma rozkład wykładniczy o parametrze 1/c.

Zadanie 8

Czas (w minutach) między kolejnymi wypadkami drogowymi w Polsce ma rozkład wykładniczy o parametrze 2. Ile wynosi średni czas między kolejnymi wypadkami?
Jakie jest prawdopodobieństwo, że najwyżej w ciągu trzech minut nastąpi kolejny wypadek.

(odp. EX = 0,5, $P(X < 3) = 1- e^{(-6)}$)

Zadanie 9

Zmienna losowa *X* ma rozkład $N(0; 1)$. Obliczyć:

a) $P(X > 1{,}5)$,
b) $P(-0{,}5 < X < 1)$
c) $P(|X| < 1{,}2)$,
d) $P(|X| > 2)$,

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

(odp. a) 0,06681; b) 0,5328; c) 0,76986; d) 0,0455)

Zadanie 10

Zmienna losowa X ma rozkład $N(-2; 3)$. Obliczyć:

a) $P(X > -1)$,
b) $P(X < -5)$,
c) $P(-5 < X < -1)$

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

Zadanie 11

Zmienna losowa X ma rozkład $N(1{,}5; 3)$. Obliczyć:

a) $P(X < 2{,}5)$,
b) $P(X > -0{,}5)$,
c) $P(0{,}5 < X < 2)$
d) $P(|2X - 1| < 1)$,
e) $P(|X| > 0{,}5)$,

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

(odp. a) 0,6293; b) 0,75; c) 0,4706, d) 0,1, e) 0,88)

Zadanie 12

Wzrost ludzi w pewnej populacji ma rozkład $N(170,10)$. Wyznaczyć procent osób w tej populacji:

a) mających wzrost poniżej 165 cm,
b) mających wzrost powyżej 170 cm,
c) mających wzrost powyżej 180 cm,
d) mających wzrost powyżej 190 cm,
e) mających wzrost powyżej 200 cm,
f) mających wzrost pomiędzy 165 a 170 cm,

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

(odp. a) 31%; b) 50%; c) 16%; d) 2%; e) 0,1%; f) 19%)

Zadanie 13

Dochód pewnej grupy pracowników ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 1000 zł i odchyleniu standardowym 200 zł. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 2 wylosowanych pracowników z tej grupy nie będzie ani jednego o dochodzie powyżej 1200 zł.

(odp. około 0,7)

Zadanie 14

Według producenta maksymalny przebieg silnika bez remontu jest zmienną losową o rozkładzie *N*(300000, 40000). Jakie jest prawdopodobieństwo, że silnik zapewni przebieg powyżej 350 000 km?

(odp. około 0,1056)

Zadanie 15

Reklama cukierków TIK-TAK zapewnia, że mają one tylko 2 kalorie. Jak duże powinno być odchylenie standardowe rozkładu kaloryczności tych cukierków aby szansa trafienia na cukierek zawierający co najmniej 3 kalorie była mniejsza niż 0,01 (przyjmujemy rozkład normalny $N(2, \sigma)$)?

(odp. $\sigma < 0{,}429$)

Proces stochastyczny

(Ω, S, P) - ustalona **przestrzeń probabilistyczna**.

$T \subset R$, przedział (skończony lub nieskończony), lub podzbiór dyskretny.

Def.

Funkcję $X : T \times \Omega \to R$ nazywamy **procesem stochastycznym** jeśli

$$\bigwedge_{t \in T} \bigwedge_{x \in R} \{\omega : X(t, \omega) < x\} \in S$$

czyli dla każdego ustalonego t funkcja X rozważana jako funkcja argumentu ω jest zmienną losową.

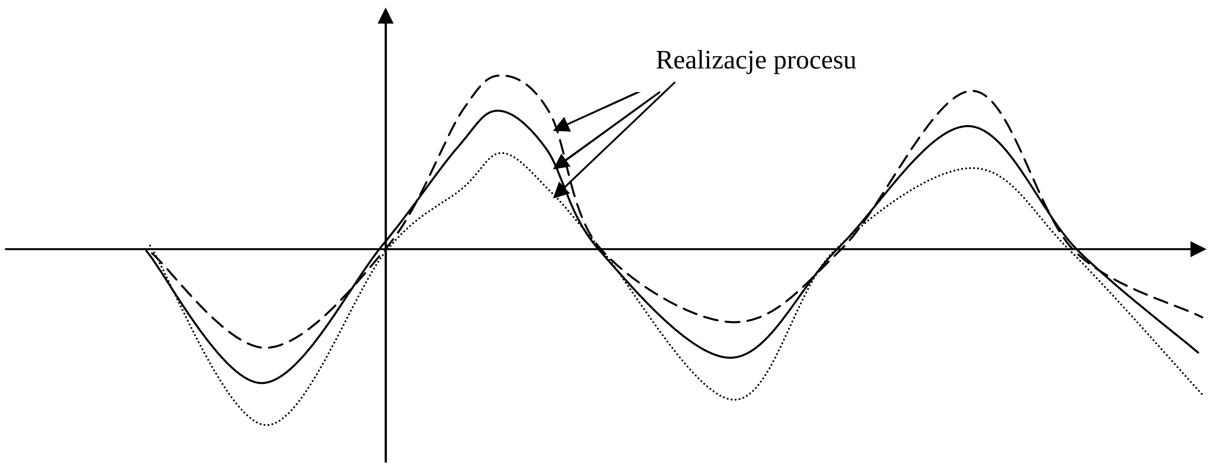
Najczęściej w zastosowaniach interpretujemy t jako **czas**.

Stosujemy zapis $X(t,\omega) = X_t(\omega)$

Przykład.
Amplituda napięcia generowanego przez prądnicę prądu zmiennego zależy od czynników losowych i może być zapisana jako proces

$$X(t) = A\sin\omega t$$

ω - stała określająca częstotliwość,
A - zmienna losowa o rozkładzie np. N(230, 5),
t - czas, t $\in$ R.



Np. dla wartości parametru $t = 0$ otrzymujemy zmienną losową X_0 o rozkładzie jednopunktowym (o wartości zerowej), dla wartości parametru $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$ otrzymujemy zmienną losową $X_{\frac{\pi}{2\omega}} = \mathrm{A}$ o rozkładzie N(230, 5), dla wartości parametru $t = \dfrac{3\pi}{2\omega}$ otrzymujemy zmienną losową $X_{\frac{3\pi}{2\omega}} = -\mathrm{A}$.

Dla ustalonego $\omega \in \Omega$ i dowolnego $t \in T$ przyjmujemy

$$x(t) = X(t,\omega)$$

Funkcja *x* określona na T nie ma charakteru losowego, nazywamy ją **realizacją procesu stochastycznego** (wyraża ewolucję w czasie wybranego zdarzenia losowego).

Wartości procesu nazywamy **stanami**.
Zbiór wszystkich stanów nazywamy **przestrzenią stanów**.

Przykładowe rodzaje procesów

Stany	Czas	Przykład	nazwa procesu
C	**C**	jak wyżej, lub proces Gaussa,	**CC**
C	**D**	n - wymiarowy rozkład normalny,	**CD**
D	**C**	proces Poissona,	**DC**
D	**D**	łańcuchy Markowa.	**DD**

Przykład.
X_t – czas uzyskania połączenia z określoną stroną internetową, jeśli polecenie połączenia zostało wydane na przeglądarce w chwili t. Jest to proces typu CC.

Przykład.
$\{X_n$, n = 1, 2, ..., 7$\}$– czas efektywnej pracy modemu danego komputera w poszczególne dni konkretnego tygodnia. Jest to proces typu CD.

Przykład.
X_t – liczba uczestników forum dyskusyjnego na określonej stronie internetowej, zalogowanych w chwili t. Jest to proces typu DC.

Przykład.
$\{X_n$, n = 1, 2, ..., 365 (366)$\}$– liczba zalogowań komputerów do danego serwera w poszczególne dni konkretnego roku. Jest to proces typu DD.

Parametry procesu stochastycznego.

Wartość oczekiwana procesu.

$$m(t) = E\left(X_t\right)$$

Wariancja procesu.

$$V(t) = D^2(t) = \sigma^2(t) = E\left(\left(X_t - m(t)\right)^2\right)$$

Odchylenie standardowe procesu to pierwiastek z wariancji procesu.

Autokowariancja

$$K(t_1, t_2) = E\left(\left(X_{t_1} - m(t_1)\right)\left(X_{t_2} - m(t_2)\right)\right)$$

Autokowariancja unormowana (współczynnik autokorelacji procesu)

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{\sqrt{V(t_1)}\sqrt{V(t_2)}} = \frac{K(t_1, t_2)}{D(t_1)D(t_2)}$$

Autokorelacja

$$R(t_1, t_2) = E\left(X_{t_1} X_{t_2}\right)$$

Własności:

1) $V(t) = D^2(t) = \sigma^2(t) = K(t,t)$

2) $K(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m\left(t_1\right)m\left(t_2\right)$

3) $\left|K(t_1, t_2)\right| \le \sqrt{V\left(t_1\right)V\left(t_2\right)} = D\left(t_1\right)D\left(t_2\right)$

4) $V(t) = D^2(t) = \sigma^2(t) = E\left(X_t^2\right) - \left(EX_t\right)^2$

Uwaga.

1. Z powyższych własności wynika, że praktycznie wystarczy wyliczyć $m(t)$ i $R(t_1,t_2)$ a pozostałe parametry uzyskamy na ich podstawie.
2. Przy obliczaniu $m(t)$ i $R(t_1,t_2)$ przydatne bywają następujące zależności znane z rachunku prawdopodobieństwa

$EX^2 = D^2X + (EX)^2$, bo $D^2X = EX^2 - (EX)^2$

$EXY = Cov(X,Y) + EXEY$ bo $Cov(X,Y) = EXY - EXEY$

$Cov(X,Y) = \rho DXDY$ bo $\rho = \dfrac{Cov(X,Y)}{DXDY}$

Przykład.

Obliczymy parametry procesu $X(t) = At^2$, $t \in$ R.

A - zmienna losowa skokowa o funkcji prawdopodobieństwa

-1	1
0,5	0,5

Rozwiązanie.

Zauważmy, ze rozpatrywany proces ma tylko dwie realizacje: parabolę $y = t^2$ i parabolę $y = -t^2$.

Wartość oczekiwana wynosi

$$m(t) = E(X_t) = -0{,}5 + 0{,}5 = 0$$

Autokorelacja wynosi

$$R(t_1,t_2) = E\left(X_{t_1}X_{t_2}\right) = E\left(At_1^2At_2^2\right) = t_1^2t_2^2E(A^2) =$$
$$= t_1^2t_2^2\left(D^2A + (EA)^2\right) = t_1^2t_2^2(1+0) = t_1^2t_2^2$$

Autokowariancja wynosi

$$K(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2) = t_1^2t_2^2$$

Wariancja wynosi

$$V(t) = t^4$$

Zauważmy, że dla wartości parametru $t = 0$ otrzymujemy zmienną losową o rozkładzie jednopunktowym i wtedy wariancja procesu jest zerowa. Wraz z bezwzględnym wzrostem t wariancja gwałtownie rośnie.

Współczynnik autokorelacji procesu wynosi

$$\rho(t_1,t_2) = \frac{K(t_1,t_2)}{\sqrt{V(t_1)}\sqrt{V(t_2)}} = \frac{t_1^2 t_2^2}{\sqrt{t_1^4}\sqrt{t_2^4}} = 1$$

Oznacza to, że zmienne losowe tworzące proces są w pełni skorelowane, tzn. zmienna losowa X_{t_2} jest funkcja liniową od X_{t_1}.

Mamy $X_{t_2} = kX_{t_2}$, gdzie $k = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2$.

Przykład.
Obliczymy parametry procesu

$$X(t) = At + B, \quad t \in R$$

A, B - zmienne losowe o parametrach EA = 0; EB = 1, i $D^2A = 1$, $D^2B = 2$; cov(A, B) = -1.
Rozwiązanie.
Wartość oczekiwana wynosi

$$m(t) = E(X_t) = E(At + B) = tEA + EB = 1$$

Autokorelacja wynosi

$$\begin{aligned}
R(t_1,t_2) &= E\left(X_{t_1}X_{t_2}\right) = E\left((At_1 + B)(At_2 + B)\right) = \\
&= E\left(A^2 t_1 t_2 + AB(t_1 + t_2) + B^2\right) = \\
&= t_1 t_2 E(A^2) + (t_1 + t_2)E(AB) + E(B^2) = \\
&= t_1 t_2 \left(D^2A + (EA)^2\right) + (t_1 + t_2)(\mathrm{cov}(A,B) + EAEB) + D^2B + (EB)^2 = \\
&= t_1 t_2 (1 + 0) + (t_1 + t_2)(-1 + 0\cdot 1) + 2 + 1 = t_1 t_2 - t_1 - t_2 + 3
\end{aligned}$$

Autokowariancja wynosi

$$K(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2) = t_1 t_2 - t_1 - t_2 + 2$$

Wariancja wynosi

$$V(t) = t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1$$

Zauważmy, że wariancja tego procesu jest nie mniejsza niż 1 dla dowolnego t.

Współczynnik autokorelacji procesu wynosi

$$\rho(t_1,t_2) = \frac{K(t_1,t_2)}{\sqrt{V(t_1)}\sqrt{V(t_2)}} = \frac{t_1 t_2 - t_1 - t_2 + 2}{\sqrt{(t_1-1)^2+1}\sqrt{(t_2-1)^2+1}}$$

Proces stochastyczny X nazywamy **procesem o przyrostach niezależnych**, jeśli dla dowolnego naturalnego n, dowolnych $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ zmienne losowe

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots\dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

są niezależne.
Przykład: proces Poissona.

Proces stochastyczny X o przyrostach niezależnych nazywamy **jednorodnym**, jeśli dla dowolnego nieujemnego t, X(0, ω) = 0 i dla dowolnych $t_1 < t_2$ rozkład różnicy zmiennych losowych

$$X_{t_2} - X_{t_1}$$

zależy tylko od różnicy $t_2 - t_1$ (nie zależy od t_1).
Przykład: proces Poissona.

Zadania

Zadanie 1.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At^2 + Be^t$, gdzie A, B to nieskorelowane zmienne losowe o parametrach: EA = 2; EB = -3, $D^2A = 1$, $D^2B = 3$.

Zadanie 2.
Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At + B$, gdzie A, B to zmienne losowe o parametrach: EA = 0; EB = 0, i macierzy kowariancji $K = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}5 \end{bmatrix}$.

Zadanie 3.
Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At + 1$, gdzie A jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w przedziale (0, 1). Jak wyglądają realizacje tego procesu? Które z poniższych funkcji są realizacjami tego procesu? $x_1(t) = 0{,}3t + 1$; $x_2(t) = -0{,}3t + 1$; $x_3(t) = 2t + 1$.

Zadanie 4.
Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At - 3$, gdzie A jest zmienną losową o rozkładzie N(3, 1). Jak wyglądają realizacje tego procesu?

Zadanie 5.
Proces X(t) ma tylko 3 realizacje: $x_1(t) = t$; $x_2(t) = t + 1$; $x_3(t) = t + 2$. Realizacje te są przyjmowane odpowiednio z prawdopodobieństwami: 1/2, 1/3; 1/6.
Wyznaczyć parametry tego procesu.

Zadanie 6.
Proces X(t) ma tylko 4 realizacje: $x_1(t) = t$; $x_2(t) = t + 1$; $x_3(t) = t + 2$; $x_4(t) = t - 1$. Realizacja ostatnia jest przyjmowana z prawdopodobieństwem 0,1, a pozostałe realizacje są przyjmowane z takim samym prawdopodobieństwem. Wyznaczyć parametry tego procesu.

Zadanie 7.
Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = Ae^t + Be^{-t}$, gdzie A, B to zmienne losowe o parametrach: EA = 0; EB = 0, i $D^2A = 1$, $D^2B = 2$; cov(A, B) = -1.

Zadanie 8.
Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = A + Bt$, gdzie A, B to zmienne losowe o parametrach: EA = -1; EB = 1, i $D^2A = 1$, $D^2B = 4$; ρ_{AB} = -0,5.

Zadanie 9.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At^2 + B$, gdzie A , B to zmienne losowe nieskorelowane. A ma rozkład wykładniczy z parametrem 1,5, B jest zmienną losową skokową o funkcji prawdopodobieństwa: P(B = -1) = 0,5; P(B = 1) = 0,5;

Łańcuchy Markowa

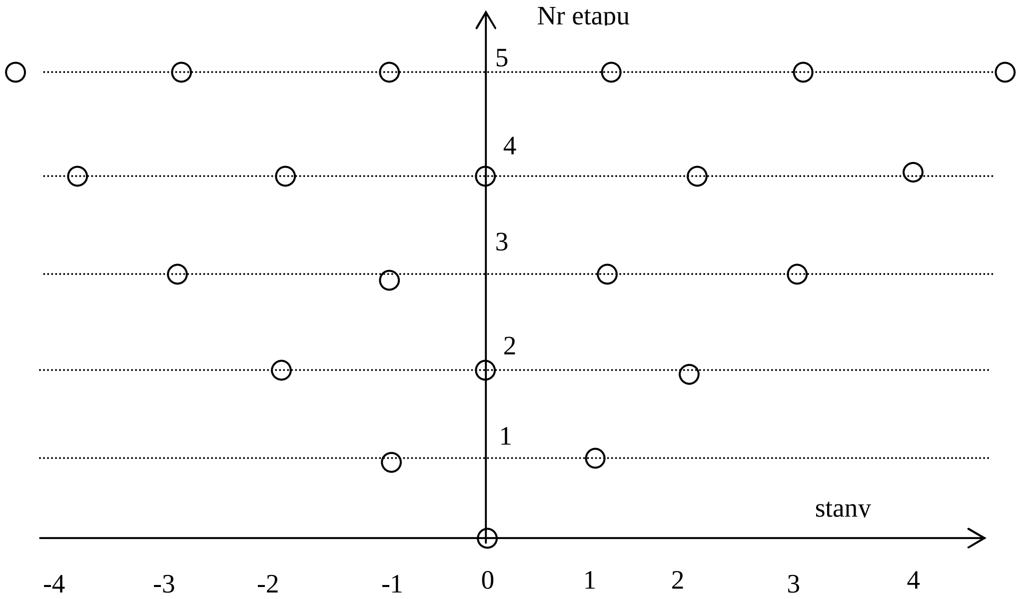
Przykład.

Symetryczne błądzenie przypadkowe.

Jako zbiór stanów rozpatrujemy zbiór liczb całkowitych. Kolejne etapy błądzenia będziemy numerować jako chwile czasu 0, 1, 2, ...

Załóżmy, że w chwili 0 proces jest w stanie 0. Następnie w kolejnych etapach z prawdopodobieństwem p = ½ przechodzimy do stanu o numerze wyższym lub z prawdopodobieństwem q = 1 – p = ½ przechodzimy do stanu o numerze niższym (możemy sobie wyobrazić, że rzucamy monetą symetryczną i „orzeł” powoduje przesunięcie w prawo, a „reszka” w lewo) .

Na wykresie możliwe do osiągnięcia stany w poszczególnych etapach możemy przedstawić następująco (zauważmy, że w parzystych numerach etapów można być tylko w stanach o numerach parzystych).



Jeśli Z_i to niezależne zmienne losowe o rozkładzie dwupunktowym

$$P(Z_i = -1) = P(Z_i = 1) = \frac{1}{2}$$

to rozpatrywany proces stochastyczny możemy zapisać następująco

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k, \quad n > 0 \end{cases}$$

Zauważmy, że jeśli po pewnej liczbie etapów *n* chcemy określić prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie k, w etapie następnym, to prawdopodobieństwo to zależy tylko od tego gdzie jesteśmy po n etapach a nie zależy od tego w jakich stanach byliśmy „wcześniej”, tzn.

$$P(X_{n+1} = k \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots.., X_0 = 0) = P(X_{n+1} = k \mid X_n = i_n)$$

Uzasadnienie

Ponieważ $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$ więc ciąg (X_n) ma przyrosty niezależne, oraz Z_{n+1} jest niezależny od X_m, m < n.

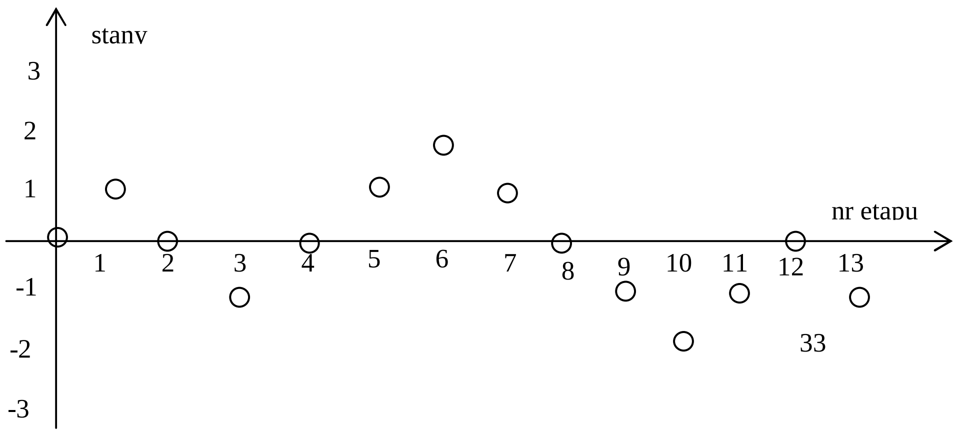
Mamy

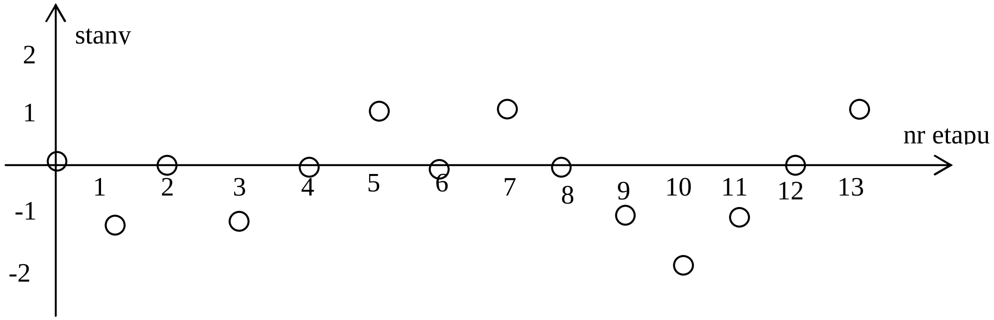
$$P(X_{n+1} = k \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots.., X_0 = 0) = P(X_n + Z_{n+1} = k \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots.., X_0 = 0) =$$
$$= P(Z_{n+1} = k - i_n \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots.., X_0 = 0) = P(Z_{n+1} = k - i_n)$$

Również

$$P(X_{n+1} = k \mid X_n = i_n) = P(X_{n+1} = k \mid X_n = i_n) = P(X_n + Z_{n+1} = k \mid X_n = i_n) = P(Z_{n+1} = k - i_n)$$

Przykładowe realizacje tego procesu można przedstawić następująco





Można też rozpatrywać bardziej ogólne błądzenie przypadkowe gdy zmienne Z_i to niezależne zmienne losowe o dowolnym rozkładzie dwupunktowym $P(Z_i = 1) = p > 0, \quad P(Z_i = -1) = 1 - p = q > 0$

Powyższy proces można też przedstawić w postaci grafu

$$\ldots\ldots \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [-2] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [-1] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [0] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [1] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [2] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \ldots\ldots$$

pamiętając o stanie z którego rozpoczynamy błądzenie.

Łańcuchy Markowa to procesy dyskretne w czasie i o dyskretnym zbiorze stanów, "bez pamięci".

Zwykle będziemy zakładać, że zbiór stanów to podzbiór zbioru liczb całkowitych Z lub zbioru $\{0, 1, 2, ...\}$ jako uproszczenie zapisu $\{S_0, S_1, S_2, ...\}$.

Łańcuchem Markowa nazywamy proces będący ciągiem zmiennych losowych X_0, X_1, ...

Określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej, przyjmujących wartości całkowite i spełniające warunek

$$P\left(X_n = j \middle| X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\right) =$$
$$= P\left(X_n = j \middle| X_{n-1} = i_{n-1}\right) \qquad \bigwedge_{n} \quad \bigwedge_{i_0,\ldots,i_{n-1}, j \subset \{0,1,2,....\}}$$

Zatem dla łańcucha Markowa rozkład prawdopodobieństwa warunkowego położenia w n-tym kroku zależy tylko od prawdopodobieństwa warunkowego położenia w kroku poprzednim a nie od wcześniejszych punktów trajektorii (historia).

Niech $p_{ij}^{(n)} = P\left(X_n = j \middle| X_{n-1} = i\right)$

oznacza prawdopodobieństwo warunkowe przejścia w n-tym kroku ze stanu i do stanu j.

Jeśli $p_{ij}^{(n)}$ nie zależą od n to łańcuch nazywamy **jednorodnym (jednorodnym w czasie)** i stosujemy zapis p_{ij} .

Zakładając, że numery stanów są całkowite, nieujemne można prawdopodobieństwa przejść zapisać w macierzy

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \cdots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

W pierwszym wierszu mamy kolejno prawdopodobieństwo pozostania w stanie 0 w n-tym kroku i prawdopodobieństwa przejścia w n-tym kroku ze stanu o numerze 0 do stanów o numerach 1, 2, itd. Analogicznie określone są pozostałe wiersze.

Dla łańcuchów jednorodnych powyższą macierz oznaczamy *P* i ma ona postać

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Własności macierzy prawdopodobieństw przejść: a) $p_{ij}^{(n)} \geq 0$ b) suma każdego wiersza jest równa 1.

Zauważmy też, że w macierzy tej nie może istnieć kolumna złożona z samych zer.

Każdą macierz spełniającą warunki a), b) nazywamy **macierzą stochastyczną**.

Uwaga.

Macierz stochastyczna i rozkład zmiennej losowej X_0 określają pewien łańcuch Markowa.

Własności macierzy stochastycznych są zatem ściśle związane z własnościami łańcuchów Markowa.

Łańcuchy Markowa (jednorodne).

Będziemy dalej przyjmować najczęściej, że rozpatrywane łańcuchy Markowa mają skończona liczbę stanów.

$p_i(n)$ - prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie i po n krokach (rozkład zmiennej losowej X_n). Prawdopodobieństwa te stanowią składowe wektora p(n).

$p_i(0)$ - prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie i w chwili początkowej (rozkład zmiennej losowej X_0 - rozkład początkowy). Prawdopodobieństwa te stanowią składowe wektora p(0).

Przykład.

Błądzenie przypadkowe z odbiciem. Np. gdy stany 0 i 4 są odbijające

$$[0] \underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} [1] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [2] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [3] \underset{1}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [4]$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład.

Narysuj graf łańcucha Markowa odpowiadający macierzy prawdopodobieństw przejść

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład.

Zapisz macierz P dla łańcuch a Markowa przedstawionego grafem

$$\begin{tikzcd} {[0]} \arrow[r, shift left, "1"] & {[1]} \arrow[l, shift left, "1/4"] \arrow[r, "3/4"] & {[2]} \arrow[r, shift left, "1"] & {[3]} \arrow[l, shift left, "1/2"] \arrow[r, shift left, "1/2"] & {[4]} \arrow[l, shift left, "4/5"] \arrow[loop right, "1/5"] \end{tikzcd}$$

Oznaczenia.

p_{ij} - prawdopodobieństwo przejścia od stanu i do stanu j w jednym (dowolnym) kroku,

$p_{ij}(n)$ - prawdopodobieństwo przejścia od stanu i do stanu j w n krokach,

P = [p_{ij}]- **macierz prawdopodobieństw przejść** (w jednym kroku), jest **to macierz stochastyczna**.

$P(n) = P^n = [p_{ij}(n)]$ - macierz prawdopodobieństw przejść od stanu i do stanu j w n krokach,

Równanie Chapmana, - Kołmogorowa:

$$p_{ij}(k+l) = \sum_m p_{im}(k) p_{mj}(l)$$

Własność:

Znając rozkład początkowy i macierz P możemy wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X_n czyli prawdopodobieństwo znalezienia się w poszczególnych stanach po n krokach: **$(p_0(n), p_1(n), ...) = (p_0(0), p_1(0), ...)P^n$.**

czyli **$p(n) = p(o)P^n$**

Mamy też własność: **$p(m + n) = p(m)P^n$**

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa o macierzy $P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$ i rozkładzie początkowym p(0) = (1, 0, 0).

Po pierwszym kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(1) = p(0)P = [1,0,0]\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} = [0{,}5;0;0{,}5]$$

Po drugim kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

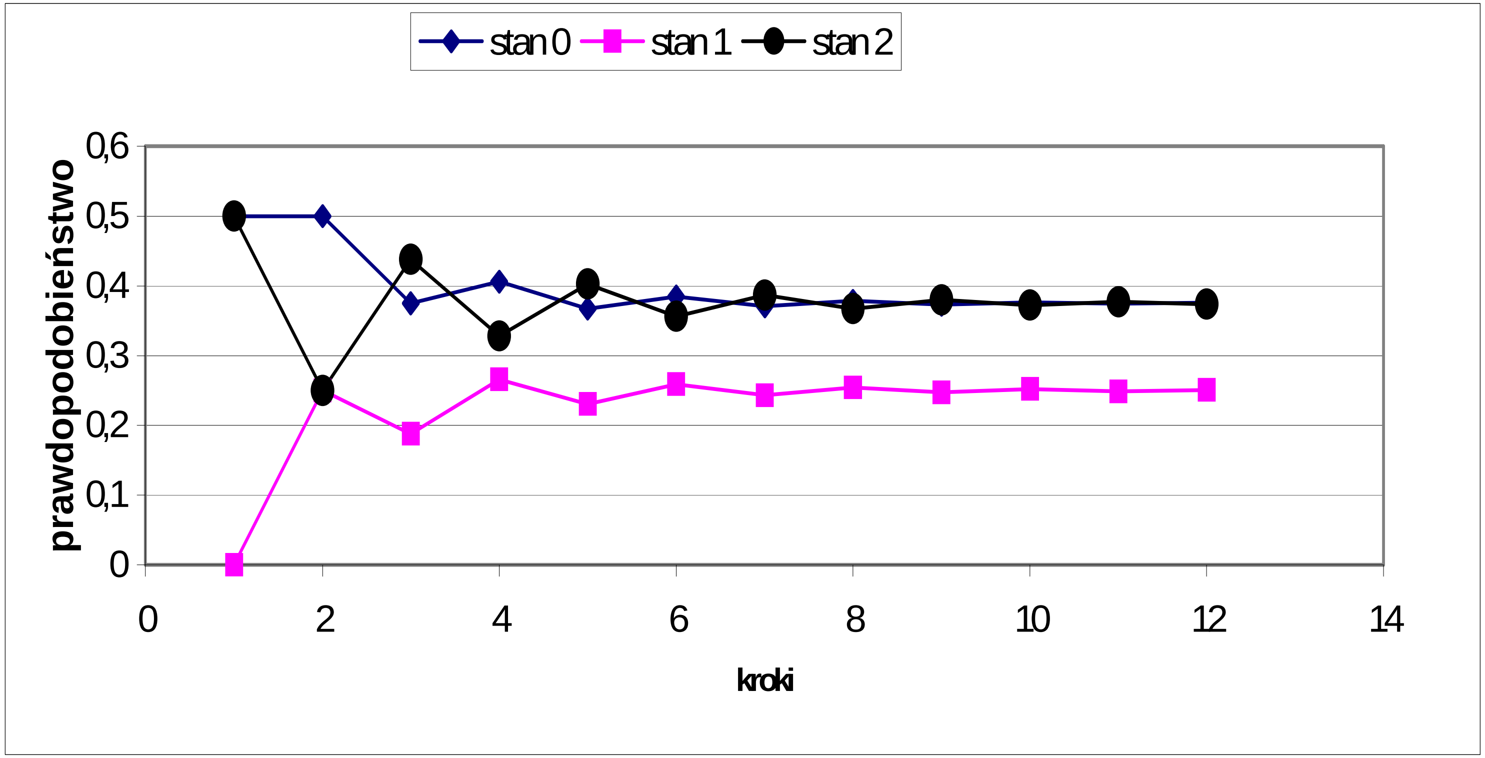
$$p(2) = p(0)P^2 = [1,0,0]\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}375 & 0{,}438 & 0{,}188 \\ 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}625 \end{bmatrix} = [0{,}5;0{,}25;0{,}25]$$

Po trzecim kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(3) = p(0)P^3 = [1,0,0]\begin{bmatrix} 0{,}375 & 0{,}188 & 0{,}438 \\ 0{,}281 & 0{,}203 & 0{,}516 \\ 0{,}438 & 0{,}344 & 0{,}219 \end{bmatrix} = [0{,}375;\ 0{,}188;\ 0{,}438]$$

Obliczając kolejne potęgi macierzy P możemy wyliczone wartości p(n) zestawić dla n = 1, ..., 12 w następującej tabeli i przedstawić na wykresie.

krok	Stan 0	Stan 1	Stan 2
1	0,5	0	0,5
2	0,5	0,25	0,25
3	0,375	0,188	0,438
4	0,406	0,266	0,328
5	0,367	0,23	0,402
6	0,385	0,259	0,356
7	0,371	0,243	0,386
8	0,379	0,254	0,367
9	0,373	0,247	0,38
10	0,376	0,252	0,372
11	0,374	0,249	0,377
12	0,376	0,251	0,374

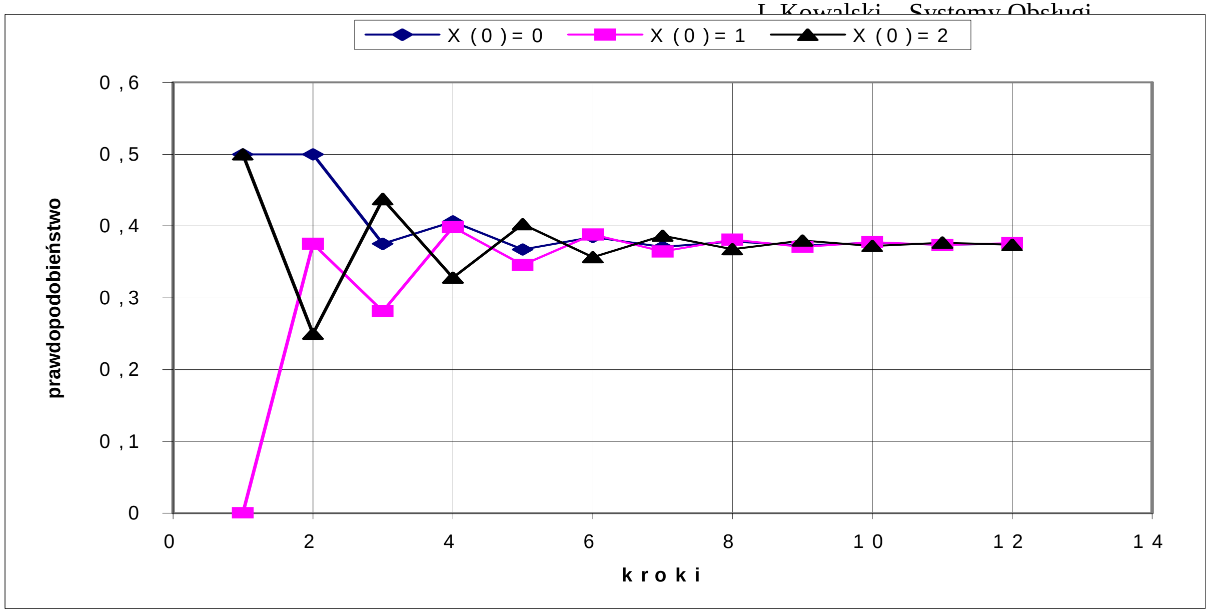


Zauważmy, że rozpatrywane prawdopodobieństwa stabilizują się na określonym poziomie i dążą do pewnych granic, co związane jest z regularności rozpatrywanej macierzy stochastycznej.

Jak pokażemy wkrótce, istnieją sposoby wyznaczania tych granicznych prawdopodobieństw bez obliczania potęg macierzy P.

Zobaczmy teraz jak zmienia się prawdopodobieństwo znalezienia się w ustalonym stanie w poszczególnych krokach, gdy zmienia się rozkład początkowy.

Rozpatrzmy stan 0 i rozkłady początkowe p(0) = (1, 0, 0), p(0) = (0, 1, 0), p(0) = (0, 0, 1).



Obliczone prawdopodobieństwa (w podobny sposób jak wyżej) zestawiono w tabeli i przedstawiono na wykresie dla n = 1, ..., 12.

p(0) \ krok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p(0) = (1, 0, 0)	0,5	0,5	0,375	0,406	0,367	0,385	0,371	0,379	0,373	0,376	0,374	0,376
p(0) = (0, 1, 0)	0	0,375	0,281	0,398	0,346	0,388	0,364	0,381	0,371	0,378	0,373	0,376
p(0) = (0, 0, 1)	0,5	0,25	0,438	0,328	0,402	0,356	0,386	0,367	0,38	0,372	0,377	0,374

Zauważmy, że rozpatrywane prawdopodobieństwo dla dużych n nie zależy od rozkładu początkowego.

Granicę $\Pi = p(\infty) = \lim_{n\to\infty} p(n)$ (o ile istnieje) nazywamy **rozkładem granicznym** łańcuch Markowa.

$$\Pi = \left(\Pi_0, \Pi_1, \ \Pi_2, ...\right).$$

Łańcuch Markowa dla którego istnieje rozkład graniczny niezależny od rozkładu początkowego p(0) nazywamy **łańcuchem ergodycznym**.

Uwaga.

Jeśli pewna potęga macierzy przejścia P ma co najmniej jedną kolumnę złożoną wyłącznie z wyrazów dodatnich to rozpatrywany łańcuch jest ergodyczny o dodatnich prawdopodobieństwach granicznych.

Sposoby wyznaczania rozkładu granicznego:

Sposób I.

Rozkład graniczny Π jest jedynym niezerowym rozwiązaniem układu

$$(P^T - I)\,\Pi^T = 0, \quad \text{spełniającym warunek} \quad \sum_{i=1} \Pi_i = 1,$$

Uwaga.

Z powyższej równości wynika, że $\Pi P = \Pi$.

Przykład.

Wyznaczyć rozkład ergodyczny łańcucha Markowa o macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że w ostatniej kolumnie macierz P ma tylko wartości dodatnie.

Należy rozwiązać równanie jednorodne

$$\begin{bmatrix} -0,7 & 0,6 & 0 \\ 0,5 & -1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & -0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_0 \\ \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jest to układ nieoznaczony z jednym parametrem. Przyjmijmy np. $\Pi_0 = 1$, wtedy $\Pi_1 = 28/24$, $\Pi_2 = 40/24$. Dzieląc te rozwiązania przez ich sumę otrzymamy rozwiązanie unormowane

Π = [6/23, 7/23, 10/23].

Sposób II.

$$\Pi_j = \frac{A_{jj}}{\sum_k A_{kk}}$$

gdzie A_{kk} to dopełnienia algebraiczne macierzy I - P (wyznacznik macierzy otrzymanej przez skreślenie k-tego wiersza i k-tej kolumny).

Przykład.

Wyznaczyć drugim sposobem rozkład ergodyczny łańcucha z poprzedniego przykładu.

Zadania.

Zadanie 1. Wyznaczyć parametry procesu symetrycznego błądzenia przypadkowego.

Zadanie 2. Narysuj graf łańcucha Markowa - błądzenie przypadkowe z odbiciem. Przyjmij liczbę stanów równą 6. Zapisz macierz prawdopodobieństw przejść tego łańcucha.

Zadanie 3. Narysować graf łańcucha:

$$P = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Czy odpowiedni łańcuch Markowa jest ergodyczny.

Zadanie 4. Narysować graf łańcucha: a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Czy odpowiedni łańcuch Markowa jest ergodyczny.

Sprawdzić, czy dla tego łańcucha istnieje rozkład graniczny.

Zadanie 5. Wyznaczyć kolejne potęgi macierzy $P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Czy odpowiedni łańcuch Markowa jest ergodyczny. Narysować graf tego łańcucha.

Porównać wiersze macierzy P^n i składowe wektora rozkładu granicznego.

Odp. np. $P^6 = \begin{bmatrix} 0{,}671875 & 0{,}328125 \\ 0{,}65625 & 0{,}34375 \end{bmatrix}$ Π = [2/3, 1/3]

Zadanie 6. Łańcuch Markowa ma dwa stany i rozkład graniczny [p, q]. Wyznaczyć macierz P tego łańcucha.

Odp. $P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ \dfrac{pa}{1-p} & 1-\dfrac{pa}{1-p} \end{bmatrix}$, a - nieujemny parametr.

Zadanie 7. Rozkład początkowy łańcucha Markowa określonego macierzą prawdopodobieństw przejść

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

wyraża się wektorem

a) (1, 0, 0),

b) (0,5; 0; 0,5),

Wyznaczyć prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach tego łańcucha po

1) dwóch etapach,

2) trzech etapach.

Zadanie 8. Rozkład początkowy łańcucha Markowa określonego macierzą prawdopodobieństw przejść

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wyraża się wektorem (1, 0, 0).

Wyznaczyć prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach tego łańcucha po kolejnych etapach. Czy łańcuch ten ma określone prawdopodobieństwa graniczne?

Zadanie 9. Wyznaczyć rozkłady graniczne łańcuchów wyznaczonych przez macierze

a) $$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) $$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Narysuj odpowiednie grafy. Wyznacz graniczne wartości oczekiwane i graniczne wariancje.

Odp. a) [6/17, 7/17, 2/17, 2/17] b) [1/12, 3/12, 5/12, 1/12, 2/12]

Zadanie 10. Podaj przykład łańcucha, którego rozkłady graniczne zależą od rozkładu początkowego.

Zadanie 11. Wyznaczyć rozkład graniczny łańcucha wyznaczonego przez macierz

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

Narysuj odpowiedni graf.

Łańcuch stacjonarny .

Jednorodny łańcuch Markowa jest **stacjonarny** gdy istnieje rozkład Π jego stanów, **zwany rozkładem stacjonarnym**, że

$$\Pi P = \Pi$$

(tzn. Π jest wektorem własnym macierzy P dla wartości własnej 1).

Zatem dla dowolnego n, $\Pi P^n = \Pi$, oznacza to, że jeśli rozkład początkowy jest równy Π, to **rozkład łańcucha po dowolnej liczbie kroków jest taki sam** i równy Π.

Jeśli macierz P łańcucha jest nierozkładalna to rozkład stacjonarny jest dokładnie jeden. Jeśli macierz P łańcucha jest rozkładalna to rozkładów stacjonarnych jest więcej niż jeden.

W łańcuchu ergodycznym rozkład stacjonarny (graniczny) nie zależy od rozkładu początkowego.

Uwaga.

ergodyczny $\Rightarrow$ **stacjonarny**

Odwrotna implikacja nie musi zachodzić.

Wniosek.
Istnienie rozkładu stacjonarnego nie implikuje, że łańcuch jest ergodyczny.
Każdy łańcuch o skończonej liczbie stanów jest stacjonarny.
Przykład.
Rozpatrzmy łańcuch o macierzy P równej

$$p = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Łańcuch ten nie jest ergodyczny. Zauważmy, że rozkłady (1/2, 1/2, 0, 0); (0, 0, 1/2, 1/2); (1/4, 1/4, 1/4, 1/4) są stacjonarne (rozkładów stacjonarnych może być więcej niż jeden bo rozpatrywana macierz jest rozkładalna).

Przykład.
Rozpatrzmy łańcuch o macierzy P równej

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Stany 1 i 2 są istotne. Stan 3 jest nieistotny.

Przykład.
Rozpatrzmy łańcuch o macierzy P równej

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że $$P^2 = \begin{bmatrix} 0{,}46 & 0{,}45 & 0{,}09 \\ 0{,}35 & 0{,}45 & 0{,}12 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

Wyznacz rozkład stacjonarny tego łańcucha.
Czy jest to łańcuch ergodyczny?
Czy otrzymany rozkład stacjonarny jest rozkładem granicznym?

Przykład.
Rozpatrzmy łańcuch o macierzy P równej

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie stany są okresowe (mają okres 2).
Wyznacz rozkład stacjonarny tego łańcucha.

Przykład.
Rozpatrzmy łańcuch o macierzy P równej

$$p = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznacz graf tego łańcucha.
Czy łańcuch ten ma stany okresowe? Czy wszystkie stany są okresowe ?.

Sprawdź, że $\lim_{n\to\infty} P^n$ nie istnieje i żadna kolumna P^n nie składa się wyłącznie z elementów dodatnich.

Przykład.

Rzucamy symetryczną czworościenną kostką (na ściankach liczby 1, 2, 3, 4). Rozpatrujemy łańcuch Markowa X_n określony jako ciąg maksymalnych wyników spośród rzutów 1,2,3,...,n.

Sprawdź, że łańcuch ten ma macierz P równą

$$p = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wyznacz graf tego łańcucha. Czy łańcuch ten ma stany okresowe?

Przykład.

Gracze A i B rozpoczynają grę z kapitałem 2zł każdy. W każdej partii gracz A wygrywa z prawdopodobieństwem 0,6, gracz B wygrywa z prawdopodobieństwem 0,4. Po każdej partii przegrywający płaci wygrywającemu 1 zł.

a) jakie jest prawdopodobieństwo, że gra zakończy się po 2 partiach ?
b) jakie jest prawdopodobieństwo, że po 4 partiach kapitał każdego gracza wyniesie 2 zł?
c) Ile wynosi wartość oczekiwana kapitału gracza A po 2 partiach?

Przyjmijmy, że stany procesu to kapitał w posiadaniu gracza A czyli {0, 1, 2, 3, 4}.

Macierz P ma postać

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stany 0 i 1 są pochłaniające (osiągnięcie któregoś z tych stanów oznacza bankructwo jednego z graczy). Do jakiej klasy należą pozostałe stany? Narysuj odpowiedni graf.

Rozkład początkowy p(0) = [0, 0, 1, 0, 0].

Ad. a) $p(2) = p(0)P^2$ = [0,16; 0, 0,48, 0, 0,36], zatem prawdopodobieństwo zakończenia gry po 2 partiach wynosi $p_0(2) + p_4(2)$ = 0,16 + 0,36 = 0,52.

Ad. b) $p(4) = p(0)P^4$ = [0,2368; 0, 0,2304, 0, 0,5328), zatem prawdopodobieństwo, że każdy z graczy ma po 2 zł po 4 partiach wynosi $p_2(4)$ = 0,2304.

Ad. c) na podstawie p(2) = [0,16; 0, 0,48, 0, 0,36], obliczamy wartość oczekiwaną kapitału gracza A po 2 partiach: 0,48·2zł + 0,36·4zł = 2,4zł. Zatem gdyby gracze wielokrotnie rozegrali po 2 partie mając początkowo po 2 zł, to przeciętna wygrana gracza A wynosiłaby 40 gr.

Przykład.
Jeśli ciąg zmiennych losowych

$$X_0, X_1, X_2, X_3, ...$$

jest łańcuchem Markowa o macierzy P, to ciąg zmiennych losowych

$$X_0, X_2, X_4, ...$$

jest łańcuchem Markowa o macierzy P^2.
Wskazówka. Należy skorzystać z równości Chapmana-Kołmogorowa.
Zadanie.
Uzasadnij własność: Jeśli łańcuch ma dwa **różne** rozkłady stacjonarne to nie może być łańcuchem ergodycznym.

Dyskretne procesy Markowa.

Rozpatrujemy proces stochastyczny X_t, w którym parametr t jest ciągły (zwykle $t \geq 0$).
Będziemy zakładać, że zbiór stanów jest co najwyżej przeliczalny.

Proces X_t, jest **procesem Markowa**, jeśli dla dowolnego n, dla dowolnych chwil czasu $t_0 < t_1 < ...< t_n$, oraz dowolnych stanów x, y, x_0, ..., x_n spełniona jest zależność:

$$P\left\{X_{t_n} = y \middle| X_{t_{n-1}} = x, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, ..., X_{t_0} = x_0\right\} = P\left\{X_{t_n} = y \middle| X_{t_{n-1}} = x\right\}$$

Proces Markowa jest jednorodny w czasie, jeżeli dla dowolnych stanów x, y oraz chwil czasu $t_1 < t_2$ mamy

$$P\left\{X_{t_2} = y \middle| X_{t_1} = x\right\} = p(x, y, t_2 - t_1)$$

co oznacza, że prawdopodobieństwo przejścia ze stanu x do stanu y w czasie od momentu t_1 do momentu t_2 zależy tylko od różnicy $t_2 - t_1$, a nie zależy od momentu wyjściowego t_1.

Przyjmijmy oznaczenie $P\left\{X_{t_n} = j \middle| X_{t_0} = i\right\} = p_{ij}(t)$, gdzie $t = t_n - t_0$, $t_n > t_0$.

Niech $P(t) = [p_{ij}(t)]$ **macierz prawdopodobieństw przejścia**
i, j = 0, 1, ..., N (dla skończonej liczby stanów).

$$P(t)=\begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & \cdots & p_{0N}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \cdots & p_{1N}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{N0}(t) & p_{N1}(t) & \cdots & p_{NN}(t) \end{bmatrix}$$

Jest to macierz stochastyczna.
Zależność

$$p_{ij}(s+t)=\sum_k p_{ik}(t)\,p_{kj}(s)$$

nazywamy **równaniem Chapmana - Kołmogorowa**.
Wynika z niej, że

$$P(s+t)=P(s)P(t)=P(t)P(s)$$

Zakładamy, że funkcje $p_{ij}(t)$ są ciągłe w punkcie t = 0.

$$\lim_{t\to 0} p_{ij}(t)=\begin{cases} 1 & dla\ \ j=i \\ 0 & dla\ \ j\neq i \end{cases}$$

Wtedy są ciągłe w dowolnym innym punkcie.

Istnieje też (chociaż może być nieskończona) granica $\lim_{t\to 0}\dfrac{1-p_{ii}(t)}{t}=-p_{ii}^{'}(0)$

oraz skończona granica $\lim_{t\to 0}\dfrac{p_{ij}(t)}{t}=p_{ij}^{'}(0)$

Dla wygody przyjmiemy oznaczenia

$$p_{ij}^{'}(0)=\begin{cases} -\lambda_{ii} & dla\ \ j=i \\ \lambda_{ij} & dla\ \ j\neq i \end{cases}$$

Wielkości te nazywamy **intensywnościami przejścia** ze stanu i do stanu j gdy $j\neq i$, oraz **intensywnościami wyjścia** ze stanu i (do pozostałych stanów) gdy i = j.

Ponieważ $\lim_{t\to 0}\dfrac{p_{ij}(t)}{t}=p_{ij}^{'}(0)=\lambda_{ij}$, to λ_{ij} dla $j\neq i$ są gęstościami prawdopodobieństwa przejścia ze stanu i do stanu j, oraz dla małych t mamy

$$p_{ij}(t)\approx\lambda_{ij}\cdot t\ ,$$

co oznacza, że dla małych t prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j jest proporcjonalne do t, współczynnikiem proporcjonalności jest intensywność λ_{ij} .

Jeśli określimy macierz Λ o elementach równym intensywnościom $\begin{cases} -\lambda_{ii} & dla\ \ j = i \\ \lambda_{ij} & dla\ \ j \neq i \end{cases}$

i, j = 0, 1, ..., N (dla skończonej liczby stanów)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} & \cdots & \lambda_{0N} \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{N0} & \lambda_{N1} & \cdots & \lambda_{NN} \end{bmatrix}$$

(**macierz intensywności**), to możemy powyższe układy równań zapisać w postaci macierzowej:

(*) $P'(t) = P(t)\cdot\Lambda$ czyli $\frac{d}{dt}P(t) = P(t)\Lambda$

oraz

(**) $P'(t) = \Lambda\cdot P(t)$ czyli $\frac{d}{dt}P(t) = \Lambda P(t)$

W zastosowaniach częściej stosuje się równanie prospektywne.

Oznaczając $p_i(t) = P\{X_t = i\}$ mamy $p_k(t) = \sum_i p_i(0)p_{ik}(t)$ i po zróżniczkowaniu względem czasu otrzymamy inny zapis równania prospektywnego

(***) $$\frac{dp_j(t)}{dt} = -\lambda_{jj}\,p_j(t) + \sum_{k\neq j}\lambda_{kj}\,p_k(t) \qquad j = 0, 1, \ldots$$

Przyjmując p(t) = [p_0(t), p_1(t), ...] (**wektor rozkładu procesu** w momencie t) i macierz Λ o elementach równym intensywnościom $\begin{cases} -\lambda_{ii} & dla\ \ j = i \\ \lambda_{ij} & dla\ \ j \neq i \end{cases}$ (macierz intensywności) możemy powyższy układ równań zapisać w postaci wektorowej:

$$p'(t) = p(t)\cdot\Lambda \qquad \text{czyli} \qquad \frac{d}{dt}p(t) = p(t)\Lambda$$

Rozwiązanie tego równania ma postać $p(t) = p(0)e^{\Lambda t}$

Przykład.
Narysować graf i wyznaczyć równania prospektywne Kołmogorowa procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[r, shift left, "2"] & {[1]} \arrow[l, shift left, "1"] \arrow[r, shift left, "1"] & {[2]} \arrow[l, shift left, "4"] \arrow[ll, bend left, "3"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -2p_0(t) + p_1(t) + 3p_2(t) \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = 2p_0(t) - 2p_1(t) + 4p_2(t) \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = p_1(t) - 7p_2(t) \end{cases}$$

Macierzą intensywności nazywamy każdą macierz Λ taką, że:
a) elementy pozadiagonalne są nieujemne,
b) elementy diagonalne są niedodatnie,
c) suma elementów w każdym wierszu wynosi 0.

Uwaga.
Niech $p_j(t)$ - prawdopodobieństwo, że w chwili t proces znajdzie się w stanie j.

Wtedy $$p_j(t) = \sum_{i=0}^{N} p_i(0)\, p_{ij}(t)$$

Niech $$p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots , p_N(t))$$
Wtedy $$\mathbf{p(t) = p(0)P(t)}$$

Rozkład graniczny, ergodyczność dla procesów Markowa.

$$\Pi = p(\infty) = \lim_{t\to\infty} p(t)$$

Twierdzenie.

Jeśli skończona macierz intensywności Λ ma poza przekątną tylko dodatnie elementy to proces ten jest ergodyczny i ma dodatnie prawdopodobieństwa graniczne.

Dwa **sposoby wyznaczania rozkładu granicznego** określają następujące twierdzenia:

Twierdzenie.

Rozkład graniczny Π jest niezerowym rozwiązaniem układu $\mathbf{\Pi\Lambda = 0}$ spełniającym warunek unormowania (suma składowych zero).

Równanie **$\Pi\Lambda = 0$** wynika z równania różniczkowego $\frac{d}{dt}p(t) = p(t)\Lambda$, bowiem jeśli istnieje rozkład graniczny to nie zależy on od t zatem jego pochodna po t jest równa zero.

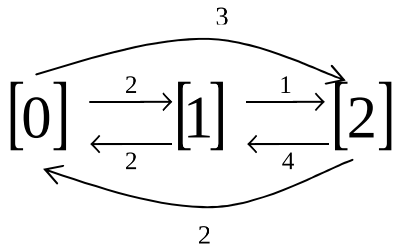
Twierdzenie.

Rozkład graniczny Π można wyznaczyć za pomocą dopełnień algebraicznych M_{kk} elementów z przekątnej macierzy $-\Lambda$:

$$\Pi_j = \frac{M_{jj}}{\sum_k M_{kk}}$$

Przykład.
Narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$



odp. [14/49; 24/49; 11/49]

Przykład.
Narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

Przyjmując, że proces ma stany 0, 1, 2; obliczyć graniczną wartość oczekiwaną.
Czy jest to proces ergodyczny?

Przykład.

Przyjmując, że proces ma stany 0, 1, 2, 3; narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Wypisać równania Kołmogorowa tego procesu. Obliczyć graniczną wartość oczekiwaną.
Odp. [5/37; 7/37; 8/37; 11/37], 2.

Przykład.

Proces Markowa jest określony grafem

$$[0]\ \xleftarrow[4]{}\ [1]\ \xrightarrow{2}\ [2]$$

Wyznaczyć jego macierz intensywności i równania Kołmogorowa.
Wyznaczyć rozkład graniczny.

Przykład.

Proces Markowa jest określony grafem

$$[0]\ \underset{2}{\overset{2}{\rightleftarrows}}\ [1]\ \underset{4}{\overset{1}{\rightleftarrows}}\ [2]\ \underset{3}{\overset{1}{\rightleftarrows}}\ [3]$$

Wyznaczyć jego macierz intensywności i równania Kołmogorowa.
Wyznaczyć rozkład graniczny tego procesu. Obliczyć graniczną wartość oczekiwaną.
Odp. [0,42; 0,42; 0,107; 0,03], ok. 0,75.

Przykład.
Sprawdź, że jeśli proces Markowa ma macierz intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -a & a \\ b & -b \end{bmatrix}$$

gdzie a, b, a + b > 0
to jego macierz prawdopodobieństw przejść jest równa

$$P(t) = \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b + ae^{(-a-b)t} & a - ae^{(-a-b)t} \\ b - be^{(-a-b)t} & a + be^{(-a-b)t} \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć wektor p(t) dla rozkładu początkowego (1, 0).
Wyznaczyć rozkład graniczny.

Proces Poissona.

Proces $\{N(t), t \geq 0\}$ nazywamy **procesem zliczającym** jeśli N(t) oznacza całkowitą liczbę badanych zdarzeń zaobserwowanych do chwili t.
Proces zliczający musi spełniać warunki:
1) $N(t) \geq 0$,
2) N(t) przyjmuje tylko całkowite własności,
3) Jeśli $s < t$ to $N(s) \leq N(t)$,
4) Dla $s < t$ N(t) - N(s) jest równe liczbie zdarzeń zaobserwowanych w przedziale (s, t],

Proces zliczający jest procesem o **przyrostach niezależnych** jeśli rozkłady liczby zdarzeń obserwowanych w rozłącznych przedziałach czasu są niezależne, np. N(t) nie zależy od N(t + s) - N(t).

Uwaga.
Każdy proces o przyrostach niezależnych jest procesem Markowa.

Proces zliczający jest **procesem jednorodnym** (w czasie) gdy rozkład liczby zaobserwowanych zdarzeń w przedziale czasu zależy tylko od długości tego przedziału, np. $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$ ma taki sam rozkład jak $N(t_2) - N(t_1)$.

Proces Poissona jest jednorodnym procesem Markowa o przyrostach niezależnych o rozkładzie.

$P(X_0 = 0) = 1$

$$P(X_t = k) = P(X_{\tau+t} - X_\tau = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

k = 0, 1, ... λ - intensywność procesu, $\lambda > 0$

parametry procesu Poissona:

$m(t) = \lambda t$ $t \geq 0$,

$$K(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2), \qquad \rho(t_1, t_2) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{t_1}{t_2}} & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \sqrt{\dfrac{t_2}{t_1}} & \text{dla } t_2 \leq t_1 \end{cases}$$

Uzasadnienie.

Ponieważ $P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ to $m(t) = E(X_t) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X_t = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t$

$$E(X_t^{\,2}) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X_t = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= (\lambda t)^2 e^{-\lambda t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = (\lambda t)^2 + \lambda t$$

Zatem

$$D^2(t) = E(X_t^{\,2}) - (E(X_t))^2 = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t$$

Z jednorodności procesu dla $t_1 < t_2$ mamy $X_{t_2} - X_{t_1} = X_{t_2 - t_1} - X_0 = X_{t_2 - t_1}$, zatem stąd i z niezależności otrzymamy

$$R(t_1,t_2) = E\left(X_{t_1} \cdot X_{t_2}\right) = E\left[X_{t_1}\left(X_{t_1} + X_{t_2-t_1}\right)\right] = E\left(X_{t_1}{}^2\right) + E\left(X_{t_1} \cdot X_{t_2-t_1}\right) =$$
$$= E\left(X_{t_1}{}^2\right) + E\left(X_{t_1}\right) \cdot E\left(X_{t_2-t_1}\right)$$

$$R(t_1,t_2) = (\lambda t_1)^2 + \lambda t_1 + \lambda t_1 \cdot \lambda(t_2 - t_1) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2$$

ogólnie

$$R(t_1,t_2) = \begin{cases} \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & \text{dla } t_2 \le t_1 \end{cases}$$

Stąd

$$K(t_1, t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2) = \begin{cases} \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 - \lambda t_1 \lambda t_2 & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 - \lambda t_1 \lambda t_2 & \text{dla } t_2 \le t_1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \lambda t_1 & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \lambda t_2 & \text{dla } t_2 \le t_1 \end{cases} = \lambda \min(t_1, t_2)$$

oraz

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{D(t_1)D(t_2)} = \begin{cases} \dfrac{\lambda t_1}{\sqrt{\lambda t_1}\sqrt{\lambda t_2}} & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \dfrac{\lambda t_2}{\sqrt{\lambda t_1}\sqrt{\lambda t_2}} & \text{dla } t_2 \le t_1 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{t_1}{t_2}} & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \sqrt{\dfrac{t_2}{t_1}} & \text{dla } t_2 \le t_1 \end{cases}$$

Zauważmy, że X_{t_2}, X_{t_1} są zawsze dodatnio skorelowane i siła zależności między nimi znacznie spada gdy jedna z chwil jest wielokrotnie większa od drugiej.

Przykłady zjawisk modelowanych procesem Poissona.

- liczba wyemitowanych cząstek przez ciało promieniotwórcze w pewnym przedziale czasu,
- liczba awarii systemu komunikacyjnego promieniotwórcze w pewnym przedziale czasu,
- liczba zgłoszeń do portalu internetowego w pewnym przedziale czasu,

Uwaga.

Funkcja f ma własność o(h) jeśli $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

Inna (**równoważna definicja procesu Poissona**.

Proces zliczający X(t) jest procesem Poissona o intensywności λ (λ > 0) gdy:

a) X(0) = 0,

b) X(t) jest stacjonarny i ma przyrosty niezależne,

c) $P\{X(t) = 1\} = \lambda t + o(t)$,

d) $P\{X(t) \geq 2\} = o(t)$

Graf procesu Poissona jest następujący

$$[0] \xrightarrow{\lambda} [1] \xrightarrow{\lambda} [2] \xrightarrow{\lambda} [3] \xrightarrow{\lambda} [4] \xrightarrow{\lambda} [5] \xrightarrow{\lambda} \ldots$$

Macierz intensywności procesu Poissona ma postać

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

Przyjmując p(t) = (p_0(t), p_1(t), ...) (**wektor rozkładu procesu** w momencie t), to równanie Kołmogorowa p'(t) = p(t)·Λ zapisujemy po współrzędnych w postaci

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda \ p_0(t) \\ p_1'(t) = -\lambda \ p_1(t) + \lambda \ p_0(t) \\ p_2'(t) = -\lambda \ p_2(t) + \lambda \ p_1(t) \\ p_3'(t) = -\lambda \ p_3(t) + \lambda \ p_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_k'(t) = -\lambda \ p_k(t) + \lambda \ p_{k-1}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Przyjmujemy rozkład początkowy p(0) = (1, 0, 0, ...).

Rozwiązaniem tego układu jest

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

czyli

$$p\ (t)=\left(e^{-\lambda t},\ \frac{\lambda t}{1!}e^{-\lambda t},\ \frac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t},\ ....,\ \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ ....\right)$$

(zauważmy, że suma elementów tego wektora wynosi jeden).
Zatem jednowymiarowy rozkład tego procesu (tzn. rozkład w dowolnej ustalonej chwili t) jest wyznaczony przez rozkład Poissona.

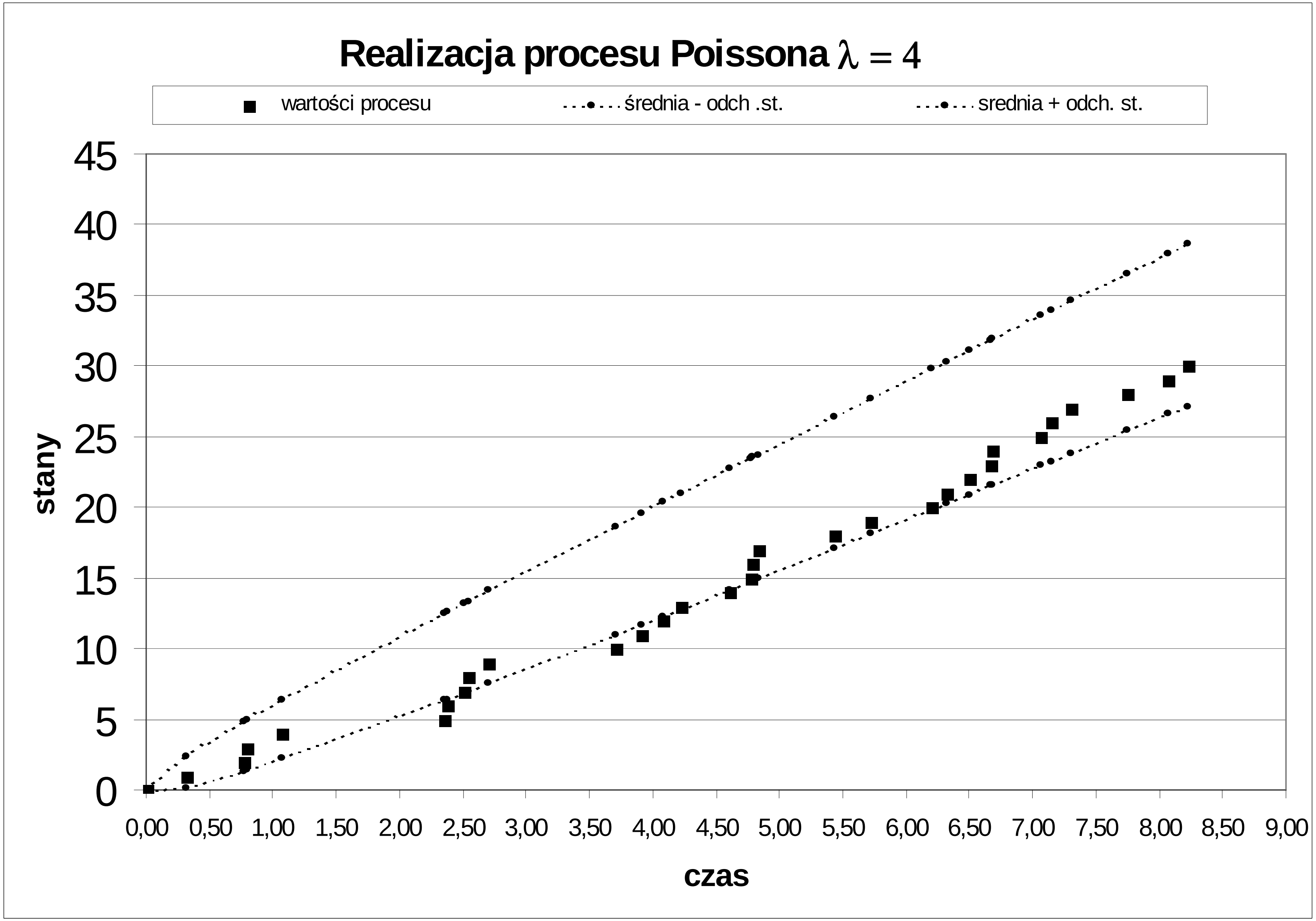
Problem.
T_1 - czas pierwszego zgłoszenia,
T_n - czas między n - 1 a n-tym zgłoszeniem,
Wyznaczyć rozkład tych zmiennych losowych.
Rozwiązanie.
$\{T_1 > t\}$ oznacza zdarzenie, że nie było zgłoszenia w [0, t], $P(T_1 > t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$
zatem $P(T_1 < t) = 1 - e^{-\lambda t} = F(t)$ (dystrybuanta rozkładu wykładniczego).
Następnie zauważmy, że z niezależności wynika
$P(T_2 > t | T_1 = s) = P\{brak\ zgłoszeń\ w(s, s+t] | T_1 = s\} = P\{brak\ zgłoszeń\ w(s, s+t]\} = e^{-\lambda t}$
Zatem T_2 też ma rozkład wykładniczy i jest niezależny od T_1. Itd.
Wniosek.
Odstępy czasu między kolejnymi zmianami stanów w jednorodnym procesie Poissona są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym **rozkładzie wykładniczym**:

$$P(T < t) = \begin{cases} 0 & dla\ \ t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & dla\ \ t > 0 \end{cases}$$

Parametry tego rozkładu to $ET = \frac{1}{\lambda}$, $D^2T = \frac{1}{\lambda^2}$.
Twierdzenie.
Suma skończonej liczby niezależnych procesów Poissona jest procesem Poissona, którego parametr jest sumą parametrów poszczególnych procesów.
Przykładowa realizacja procesu Poissona dla $\lambda = 4$.

czas	**stan**	$\lambda t - \sqrt{\lambda t}$	$\lambda t + \sqrt{\lambda t}$
0,00	0	0,00	0,00
0,08	1	-0,24	0,91
0,33	2	0,18	2,48
0,41	3	0,36	2,93

0,76	4	1,29	4,77
1,13	5	2,38	6,63
1,29	6	2,90	7,46
1,45	7	3,39	8,20
1,61	8	3,90	8,97
1,64	9	4,01	9,13
1,77	10	4,43	9,76
2,47	11	6,74	13,03
2,85	12	8,03	14,79
3,02	13	8,59	15,54
3,07	14	8,78	15,79
3,61	15	10,63	18,22
3,81	16	11,32	19,12
3,88	17	11,59	19,47
4,00	18	11,99	19,99
4,07	19	12,26	20,33
5,16	20	16,11	25,20
5,88	21	18,67	28,37
5,96	22	18,96	28,73
6,02	23	19,16	28,97
6,39	24	20,50	30,61
6,94	25	22,50	33,03
7,28	26	23,71	34,50
7,41	27	24,18	35,07
7,45	28	24,35	35,27
7,59	29	24,85	35,87
8,11	30	26,74	38,13


Realizacja procesu Poissona λ = 4
wartości procesu
średnia - odch .st.
srednia + odch. st.
stany
czas
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0,00
0,50
1,00
1,50
2,00
2,50
3,00
3,50
4,00
4,50
5,00
5,50
6,00
6,50
7,00
7,50
8,00
8,50
9,00

Uwaga.

$p_{ij}(t) = P(X_{\tau+t} = j \mid X_\tau = i) = P(X_{\tau+t} - X_\tau = j-i) =$

$= P(X_t = j-i) = p_{j-i}(t) = \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}$ dla j ≥ i,

$p_{ij}(t) = 0$ dla j < i,

tzn. $$P(t) = [p_{ij}(t)] = \begin{bmatrix} e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \frac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t} & \cdots \\ 0 & e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \cdots \\ 0 & 0 & e^{-\lambda t} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Przykład.

Sprawdzić, że dla procesu Poissona zachodzi:

$$p(t) = p(0)P(t)$$

Przykład.

Strumień zgłoszeń do systemu telekomunikacyjnego jest procesem Poissona. Wiadomo, że intensywność tego procesu wynosi λ = 3 zgł/min.

a) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najwyżej jednego zgłoszenia w ciągu 30 sekund,
b) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia trzech zgłoszeń w ciągu 30 sekund,
c) obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi zgłoszeniami będzie większy niż 12 sekund,
d) ile sekund wynosi średni czas oczekiwania na pierwsze zgłoszenie?

Rozwiązanie.

Ad. a) 30 sekund to 0,5 minuty, zatem odczytując z tablicy rozkłdu Poissona dla λt = 1,5 mamy.

$$P(X_{0,5} \le 1) = P(X_{0,5} = 0) + P(X_{0,5} = 1) = 0{,}223 + 0{,}335 = 0{,}558$$

Ad. b) analogicznie $P(X_{0,5} = 3) = 0{,}126$

Ad. c) T – czas między zgłoszeniami. Jest to zmienna losowa o rozkładzie wykładniczym. Ponieważ 12 sekund to 0,2 minuty dla λt = 0,6 mamy.

$P(T \ge 0{,}2) = e^{-0,6}$ = 0,5488 (odczyt z tablicy dla k = 0, λt = 0,6).

Ad. d) E(T) = 1/λ = 1/3 = 20 sek.

Przykład.

Strumień awarii pewnego systemu jest modelowany procesem Poissona. Wiadomo, że przeciętnie jedna awaria zdarza się raz na 50 godzin (zatem intensywność tego procesu wynosi λ = 0,02 awarii/godz.).

a) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najwyżej jednej awarii w ciągu 20 godzin,
b) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej dwóch awarii w ciągu 20 godzin,
c) obliczyć prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy w ciągu 20 godzin,
d) obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi awariami będzie większy niż 100 godzin,
e) obliczyć wartość oczekiwaną bezawaryjnego czasu pracy tego systemu.

Przykład.

Wyznaczyć parametry i narysować przykładowa realizacje procesu

$$Z(t) = X(t) - \lambda t$$

gdzie $X(t)$ jest jednorodnym procesem Poissona o intensywności λ.

Przykład.

Sprawdź, że macierz prawdopodobieństw przejścia procesu przełączania między stanami {-1, 1} generowanego procesem Poissona, tzn. procesu

$$Z(t) = Z(0)(-1)^{X(t)}, \quad t \geq 0$$

gdzie $X(t)$ jest jednorodnym procesem Poissona o intensywności λ ma postać

$$P(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda t}\right) & \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right) \\ \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right) & \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda t}\right) \end{bmatrix}$$

Wskazówka.

$$p_{-1,1}(t) = p_{1,-1}(t) = p(X(t) = \text{l.nieparzysta}) = \sum_{n=0}^{\infty} p(X(t) = 2n+1) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right)$$

$$p_{-1,-1}(t) = 1 - p_{-1,1}(t), \quad p_{1,1}(t) = 1 - p_{1,-1}(t).$$

Proces urodzeń i śmierci.

λ_i - intensywności urodzeń, i = 0, 1, ...

μ_j - intensywności śmierci, j = 1, 2, ...

$$[0] \underset{\mu_1}{\overset{\lambda_0}{\rightleftarrows}} [1] \underset{\mu_2}{\overset{\lambda_1}{\rightleftarrows}} [2] \underset{\mu_3}{\overset{\lambda_2}{\rightleftarrows}} \ldots.$$

$p_{ij}(t)$ - prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j po czasie t,
$p_{ij}(t)$ mają własności:

$$p_{i,i-1}(t) = \mu_i t + o(t),$$
$$p_{i,i+1}(t) = \lambda_i t + o(t),$$
$$p_{i,i}(t) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)t + o(t),$$
$$p_{i,i}(t) = o(t), \text{ dla } |i - j| > 1$$

i spełniają układ równań Kołmogorowa:

$$(*) \quad \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_{i,j}(t) + \mu_{j+1} p_{i,j+1}(t)$$

i warunki początkowe $p_{i,i}(0) = 1$, $p_{i,j}(0) = 0$ dla $i \neq j$.
Dalej rozpatrujemy proces urodzeń i śmierci ze skończoną liczbą stanów 0, 1, ..., N.

$$[0] \underset{\mu_1}{\overset{\lambda_0}{\rightleftarrows}} [1] \underset{\mu_2}{\overset{\lambda_1}{\rightleftarrows}} [2] \underset{\mu_3}{\overset{\lambda_2}{\rightleftarrows}} \ldots. \underset{\mu_N}{\overset{\lambda_{N-1}}{\rightleftarrows}} [N]$$

Niech $P(t) = [p_{ij}(t)]$ stochastyczna macierz przejścia i, j = 0, 1, ..., N.

Proces urodzeń i śmierci jest jednorodnym procesem Markowa.

Dla procesu urodzeń i śmierci macierz intensywności ma postać:

$$\Lambda = [\lambda_{ij}] = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{N-1} & -(\lambda_{N-1}+\mu_{N-1}) & \lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_N & -\mu_N \end{bmatrix}$$

układ równań Kołmogorowa można zapisać w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)\Lambda$$

Rozwiązanie tego równania ma postać $P(t) = P(0)e^{\Lambda t}$

gdzie $e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \frac{t^2}{2!}\Lambda^2 + \frac{t^3}{3!}\Lambda^3 + ...$

Przyjmując p(t) = (p_0(t), p_1(t), ..., p_N(t)) (wektor rozkładu procesu w momencie t), to równanie Kołmogorowa p'(t) = p(t)·Λ zapisujemy po współrzędnych w postaci

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p_1'(t) = \lambda_0 p_0(t) - (\lambda_1 + \mu_1) p_1(t) + \mu_2 p_2(t) \\ p_2'(t) = \lambda_1 p_1(t) - (\lambda_2 + \mu_2) p_2(t) + \mu_3 p_3(t) \\ \dots \\ p_N'(t) = \lambda_{N-1} p_{N-1}(t) - \mu_N p_N(t) \end{cases}$$

Przyjmujemy rozkład początkowy p(0) = (1, 0, 0, ...).

Układ równań Kołmogorowa:

$$\frac{d}{dt}p(t) = p(t)\Lambda$$

ma rozwiązanie postaci $p(t) = p(0)e^{\Lambda t}$

gdzie $e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \frac{t^2}{2!}\Lambda^2 + \frac{t^3}{3!}\Lambda^3 + ...$

Uwaga.

Proces urodzeń i śmierci ma dla intensywności dodatnich rozkład graniczny postaci:

$$\Pi_i = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_i}\Pi_0 \qquad i = 1, 2, ..., N$$

gdzie

$$\Pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_i}}$$

Zauważmy, że składowe wektora rozkładu granicznego mają sumę równą 1.

Dowód.

Zastosujemy sposób pierwszy. Rozpatrzmy równanie $\Pi\Lambda = 0$

$$[\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \cdots \quad \Pi_N]\begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{N-1} & -(\lambda_{N-1}+\mu_{N-1}) & \lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_N & -\mu_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

czyli układ równań

$$\begin{cases} -\lambda_0\Pi_0 + \mu_1\Pi_1 = 0 \\ \lambda_0\Pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\Pi_1 + \mu_2\Pi_2 = 0 \\ \lambda_1\Pi_1 - (\lambda_2 + \mu_2)\Pi_2 + \mu_3\Pi_3 = 0 \\ \cdots \\ \lambda_{N-1}\Pi_{N-1} - \mu_N\Pi_N = 0 \end{cases}$$

Jeśli przyjąć, że $-\lambda_0\Pi_0 + \mu_1\Pi_1 = z_1$; $-\lambda_1\Pi_1 + \mu_2\Pi_2 = z_2$; itd. to

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 - z_1 = 0 \\ z_3 - z_2 = 0 \\ \dots \\ z_N = 0 \end{cases}$$

stąd $z_i = 0$ i przyjmując Π_0 jako parametr mamy z warunków unormowania poszukiwane wzory.

Uwaga.
Jeśli proces urodzeń i śmierci ma przeliczalną liczbę stanów, to rozkład graniczny jest postaci

$$\Pi_i = \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2 \dots \mu_i}\Pi_0 \qquad i = 1, 2, ...$$

gdzie
$$\Pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2 \dots \mu_i}}$$

(zakładamy, że szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2 \dots \mu_i}$ jest zbieżny).

Przykład.

Niech $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = i\lambda$, i = 0, 1, ... , gdzie $\lambda > 0$, dana stała.
Zbadaj istnienie w tym przypadku prawdopodobieństw granicznych.

Przykład (proces urodzeń).

λ_i - intensywności urodzeń, i = 0, 1, ...

$$[0] \xrightarrow{\lambda_0} [1] \xrightarrow{\lambda_1} [2] \xrightarrow{\lambda_2} [3] \xrightarrow{\lambda_3} \dots.$$

Dla procesu urodzeń macierz intensywności ma postać:

$$\Lambda = [\lambda_{ij}] = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_k & \lambda_k & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Przyjmujemy, że $p(t) = (p_0(t), p_1(t), ...)$ (wektor rozkładu procesu w momencie t), oraz początkowy $p(0) = (1, 0, 0, ...)$.
Sprawdź, że równanie Kołmogorowa $p'(t) = p(t)\cdot\Lambda$ ma dla tego procesu postać

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) \\ p_1'(t) = \lambda_0 p_0(t) - \lambda_1 p_1(t) \\ p_2'(t) = \lambda_1 p_1(t) - \lambda_2 p_2(t) \\ \cdots \end{cases}$$

Przykład.
W zakładzie pracują maszyny, z których każda psuje się niezależnie od pozostałych z intensywnością $\lambda = 3$ maszyny/godz. Maszyny te są naprawiane przez robotników. Niech X(t) oznacza liczbę zepsutych maszyn w chwili t. Rozpatrzmy następujące przypadki:
1) są 3 maszyny i 1 robotnik pracujący z intensywnością 1maszyna/godz.
2) są 3 maszyny i 2 robotników pracujących bez współpracy z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
3) są 4 maszyny i 2 robotników pracujących bez współpracy z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
4) są 3 maszyny i 3 robotników pracujących z pełną współpracą z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
5) są 3 maszyny i 2 robotników pracujących z pełną współpracą z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
6) są 3 maszyny i 2 robotników pracujących z ograniczoną współpracą (z intensywnością 1maszyna/godz. każdy gdy pracują osobno i z intensywnością 1,5maszyny/godz. gdy pracują razem).

W każdym przypadku:
a) narysować graf,
b) wyznaczyć prawdopodobieństwa graniczne,
c) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że żaden robotnik nie pracuje,
d) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że przynajmniej jedna maszyna jest sprawna,
e) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że przynajmniej jedna maszyna czeka na naprawę,
f) obliczyć średnia liczbę zepsutych maszyn,
g) obliczyć średnia liczbę zajętych robotników.

Ad. 2, [0,0129; 0,1164; 0,348; 0,523]; Ezm = 2,38; Ezr = 1,86.
Ad. 4, [1/16; 3/16; 6/16; 6/16]; Ezm = 2,06; Ezr = 2,8.

SMO

Systemy masowej obsługi (zastosowanie procesu urodzeń i śmierci) - przykłady:
- centrala telefoniczna,
- stacja benzynowa,
- kasa biletowa,
- system informatyczny.

Założenia:
n - liczba stanowisk obsługi,
m - liczba miejsc w poczekalni.
- strumień zgłoszeń jest procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$,
- czas obsługi ma rozkład wykładniczy z parametrem $\mu > 0$ (intensywność obsługi),
- stanowiska działają niezależnie,
- zgłoszenia które nastąpią gdy wszystkie stanowiska obsługi są zajęte przechodzą do poczekalni (jeśli jest),
- jeśli wszystkie stanowiska obsługi są zajęte i wszystkie miejsca w poczekalni są zajęte to zgłoszenie opuszcza SMO.

X(t) - proces stochastyczny oznaczający liczbę klientów w SMO w chwili t,

$$p_j(t) = P(X(t) = j), \qquad j = 0, 1, 2, ...$$ jest rozkładem tego procesu w chwili t

Najczęściej interesują nas prawdopodobieństwa graniczne

$$C_0 = \Pi_0,\ C_1 = \Pi_1,\ ...\ ,\ C_n = \Pi_n,\ ...$$

SMO ze stratami (bez poczekalni), bez współpracy.

$0 < n < \infty, \qquad m = 0$

$\lambda_i = \lambda$ intensywność zgłoszeń,

$\mu_j = j\mu$ intensywność obsługi j - tego stanowiska,

$$[0] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [2] \underset{3\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} .... \underset{(n-1)\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n-1] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n]$$

Prawdopodobieństwa graniczne (wzory Erlanga):

$$C_0 = \Pi_0 = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{\mu^2 2!}+\frac{\lambda^3}{\mu^3 3!}+\ldots+\frac{\lambda^n}{\mu^n n!}} = \left(\sum_{j=0}^{n}\frac{\lambda^j}{\mu^j j!}\right)^{-1} = \left(\sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha^j}{j!}\right)^{-1}$$

gdzie $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$

$$C_j = \Pi_j = \frac{\lambda^j}{\mu^j j!}C_0 = \frac{\alpha^j}{j!}C_0 , \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Wzory te wynikają bezpośrednio ze wzorów na rozkład graniczny dla procesu urodzeń i śmierci bowiem:

$$C_0 = \Pi_0 = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda\cdot\lambda}{\mu\cdot 2\mu}+\frac{\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda}{\mu\cdot 2\mu\cdot 3\mu}+\ldots+\frac{\overbrace{\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\ldots\cdot\lambda}^{n\ czynnik\acute{o}w}}{\mu\cdot 2\mu\cdot 3\mu\cdot\ldots\cdot(n-1)\mu\cdot n\mu}} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{\mu^2 2!}+\frac{\lambda^3}{\mu^3 3!}+\ldots+\frac{\lambda^n}{\mu^n n!}}$$

Zauważmy, że

$$C_j = \frac{\frac{\lambda^j}{\mu^j j!}}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{\mu^2 2!}+\frac{\lambda^3}{\mu^3 3!}+\ldots+\frac{\lambda^n}{\mu^n n!}} = \frac{\frac{\alpha^j}{j!}}{\sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha^j}{j!}}$$

i mnożąc licznik oraz mianownik przez $e^{-\alpha}$ widzimy, że poszczególne składniki są równe funkcji prawdopodobieństwa rozkładu Poissona z parametrem α

$$C_j = \frac{\frac{\lambda^j}{\mu^j j!} e^{-\alpha}}{e^{-\alpha} + \frac{\lambda}{\mu} e^{-\alpha} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 2!} e^{-\alpha} + \frac{\lambda^3}{\mu^3 3!} e^{-\alpha} + \ldots + \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} e^{-\alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{\alpha^j}{j!} e^{-\alpha}}{\sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha^j}{j!} e^{-\alpha}} = \frac{P_\alpha(j)}{\sum_{j=0}^{n} P_\alpha(j)}$$

j = 0, 1, 2, ..., n.

zatem możemy wyznaczać wartości C_j za pomocą tablic rozkładu Poissona $P_\alpha(j)$ ($P_\alpha(j) = P(X = j)$ jest funkcją prawdopodobieństwa rozkładu Poissona z parametrem α).

Uwaga

Jeśli dysponujemy skumulowanym RPS i nieskumulowanym RPN rozkładem Poissona (np. funkcja EXCELA) to $C_j = \frac{RPN(j)}{RPS(n)}$.

Prawdopodobieństwo odmowy = P_{odm} = C_n.
Prawdopodobieństwo obsługi = $P_{obsł}$ = 1 - C_n.

Średnia (graniczna) liczba zajętych stanowisk obsługi.

0	1	...	n
C_0	C_1	...	C_n

$$m_{zs} = \lim_{t\to\infty} E(X(t)) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{\alpha^k}{k!} C_0 = \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} C_0 =$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha^i}{i!} C_0 = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} C_i = \alpha(C_0 + C_1 + \ldots + C_{n-1}) = \alpha(1 - C_n) = \alpha \cdot P_{obsł}$$

Uwaga

Jeśli n =1 to $C_0 = \dfrac{1}{1+\alpha}$ $\qquad C_1 = \alpha C_0 = \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$ ` .

W tym przypadku $m_{zs} = \alpha(1 - C_1) = \alpha \cdot C_0 = C_1 = P_{odm}$.

Przykład.

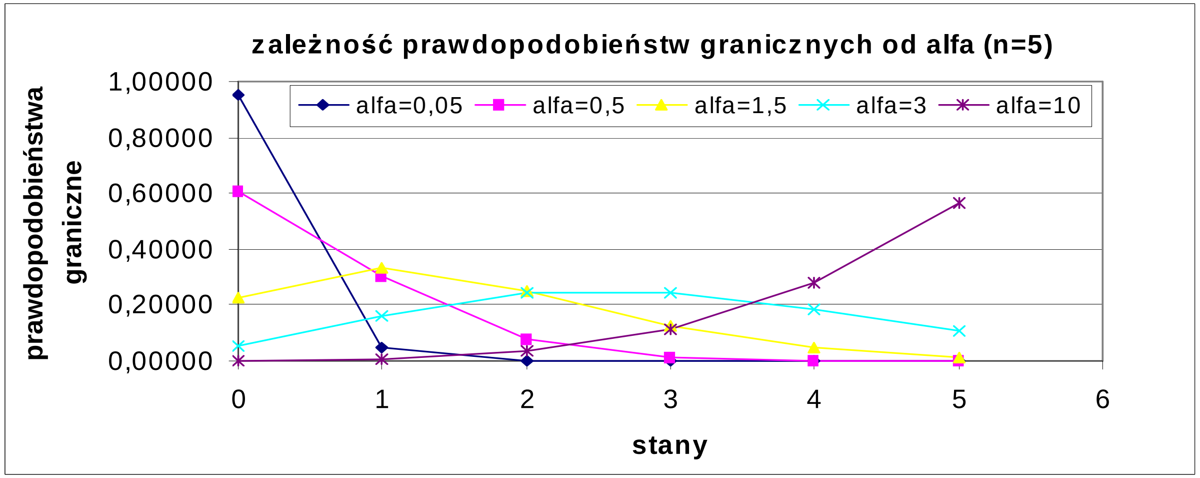
Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy, n = 5, wyznaczymy prawdopodobieństwa graniczne dla różnych wartości $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu}$ i zbadamy zależność prawdopodobieństwa odmowy obsługi i średniej liczby zajętych stanowisk od α .

W poszczególnych kolumnach wpisane są prawdopodobieństwa graniczne dla wartości α podanej w nagłówku kolumny. Pod tabelką podano średnie liczby zajętych stanowisk.

j alfa	0,05	0,1	0,5	1	1,5	2	3	5	7	10
0	0,95123	0,90484	0,60654	0,36810	0,22413	0,13761	0,05435	0,01094	0,00303	0,00068
1	0,04756	0,09048	0,30327	0,36810	0,33619	0,27523	0,16304	0,05469	0,02123	0,00677
2	0,00119	0,00452	0,07582	0,18405	0,25214	0,27523	0,24457	0,13674	0,07429	0,03384
3	0,00002	0,00015	0,01264	0,06135	0,12607	0,18349	0,24457	0,22789	0,17335	0,11279
4	0,00000	0,00000	0,00158	0,01534	0,04728	0,09174	0,18342	0,28487	0,30337	0,28198
5	0,00000	0,00000	0,00016	0,00307	0,01418	0,03670	0,11005	0,28487	0,42472	0,56395

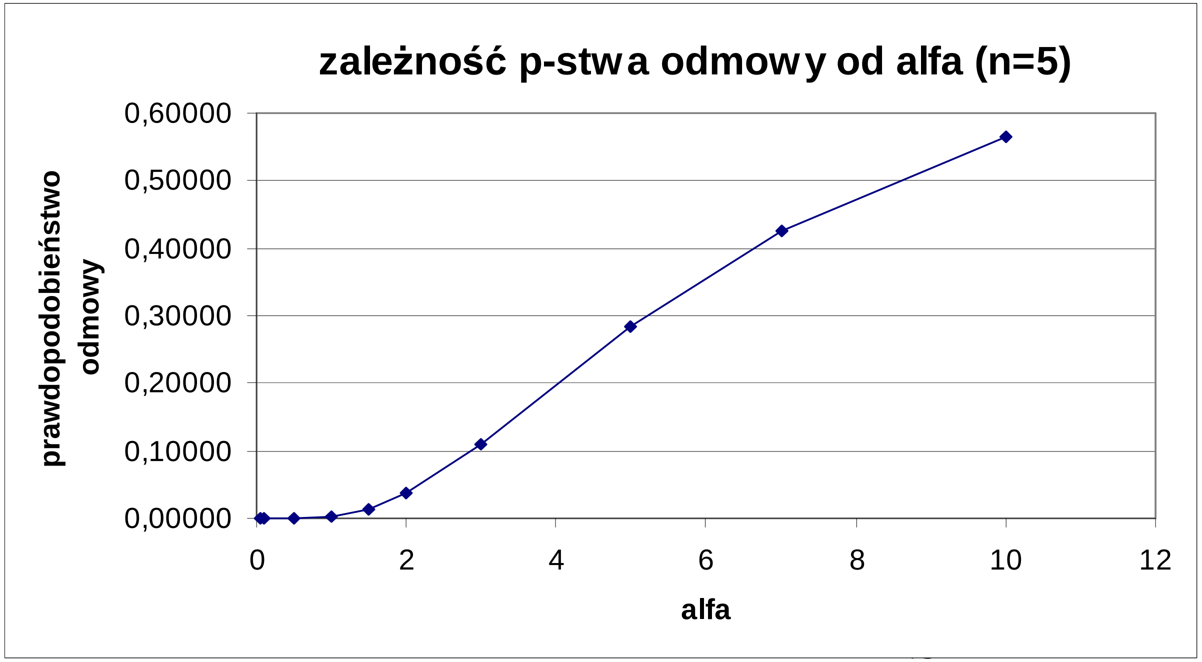
m_{zs}	0,05	0,1	0,4999	0,9969	1,4787	1,9266	2,6698	3,57566	4,02696	4,36

Dla pięciu wybranych wartości α rozkłady graniczne zilustrowano graficznie.

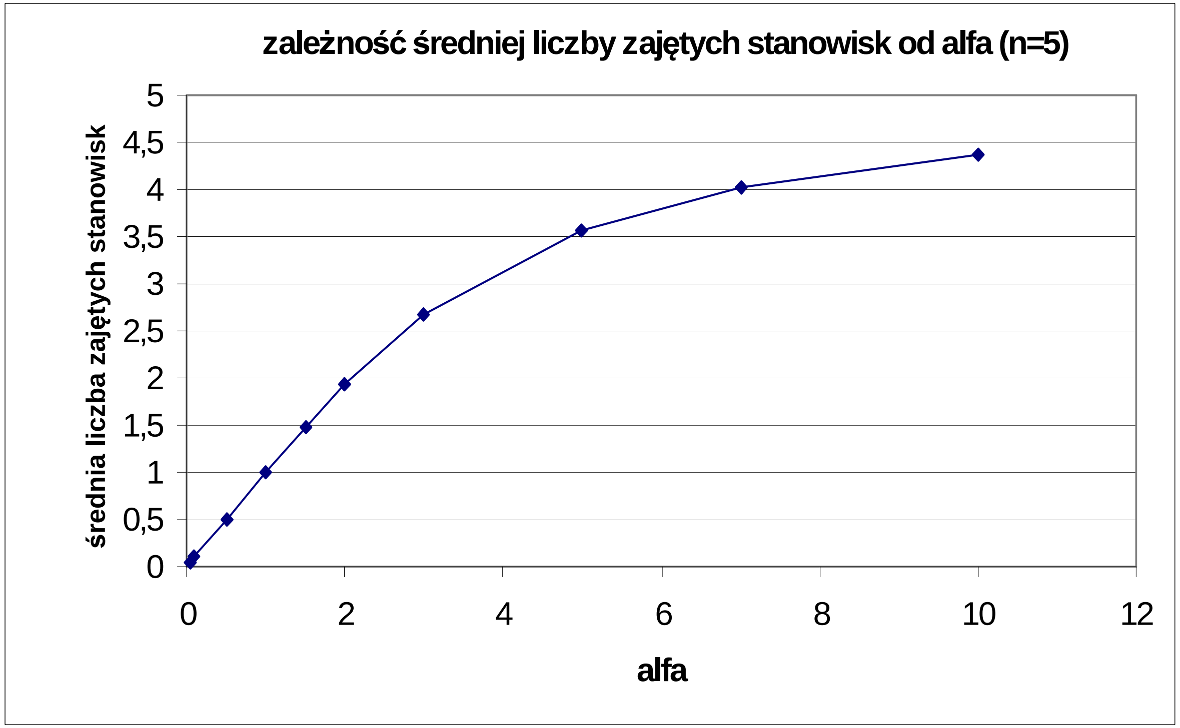


Zauważmy, że wraz ze wzrostem alfy rośnie prawdopodobieństwo, że zajęta będzie większa liczba stanowisk.

Na drugim wykresie przedstawiono zależność prawdopodobieństwa odmowy obsługi (C_5) od alfa. Wzrost intensywności zgłoszeń w stosunku do intensywności obsługi tzn. wzrost α powoduje wzrost prawdopodobieństwa odmowy obsługi.



Na trzecim wykresie przedstawiono zależność średniej liczby zajętych stanowisk (m_{zs}) od alfa. Wzrost α powoduje wzrost średniej liczby zajętych stanowisk.



SMO ze stratami (bez poczekalni), z pełną współpracą.

$0 < n < \infty$, $m = 0$ $\mu_j = n\mu$ intensywność obsługi j - tego stanowiska,

$$[0] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [2] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \ldots. \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n-1] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n]$$

Prawdopodobieństwa graniczne:

$$C_0 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & gdy \ \ \beta = 1 \\ \left(\dfrac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}\right)^{-1} & gdy \ \ \beta \neq 1 \end{cases}$$

gdzie $\beta = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\alpha}{n}$

$$C_j = \beta^j C_0 \qquad j = 1, 2, ..., n$$

Prawdopodobieństwo odmowy obsługi to $P_{odm} = C_n$.

SMO z ograniczonymi stratami, bez współpracy.

m > 0

stanowiska obsługi   poczekalnia

$$[0] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \ldots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+1] \ldots [n+m-1] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+m]$$

Prawdopodobieństwa graniczne:

$$C_0 = \left(1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^n}{n!}\left(\beta + \beta^2 + \ldots + \beta^m\right)\right)^{-1}$$

gdzie $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, $\beta = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\alpha}{n}$ zatem

$$C_0 = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\beta(1-\beta^m)}{1-\beta} \right)^{-1} & gdy \;\; \beta \neq 1 \\ \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} m \right)^{-1} & gdy \;\; \beta = 1 \end{cases}$$

$C_k = \frac{\alpha^k}{k!} C_0$ ` k = 1, 2, ..., n $\qquad C_{n+j} = \beta^j C_n$ ` j = 1, 2, ..., m

Uwaga. dla k = 0, 1, 2, ..., n

$$C_k = \begin{cases} \dfrac{\frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} + \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha} \frac{\beta(1-\beta^m)}{1-\beta}} = \dfrac{P_\alpha(k)}{\sum_{k=0}^{n} P_\alpha(k) + P_\alpha(n) \frac{\beta(1-\beta^m)}{1-\beta}} & gdy \, \beta \neq 1 \\ \dfrac{P_\alpha(k)}{\sum_{k=0}^{n} P_\alpha(k) + P_\alpha(n) m} & gdy \, \beta = 1 \end{cases}$$

zatem do obliczeń można wykorzystać tablice rozkładu Poissona.

SMO z ograniczonymi stratami, z pełną współpracą.

m > 0

stanowiska obsługi   poczekalnia

$$[0] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \ldots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+1] \ldots [n+m-1] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+m]$$

Prawdopodobieństwa graniczne:

$$C_0 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{n+m}} = \begin{cases} \dfrac{1}{m+n+1} & gdy \;\; \beta = 1 \\ \left(\dfrac{1-\beta^{n+m+1}}{1-\beta}\right)^{-1} & gdy \;\; \beta \neq 1 \end{cases}$$

gdzie $\beta = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\alpha}{n}$

$$C_j = \beta^j C_0 \text{`} \qquad j = 1, 2, ..., n + m$$

Prawdopodobieństwo odmowy obsługi $P_{odm} = C_{n+m}$.

SMO bez strat (nieskończenie wiele stanowisk), bez współpracy.

n = ∞, $\lambda_i = \lambda$ intensywność zgłoszeń, $\mu_j = j\mu$ intensywność obsługi j - tego stanowiska,

$$[0] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \ldots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n] \underset{(n+1)\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+1] \ldots$$

Prawdopodobieństwa graniczne:

$$C_0 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \right)^{-1} = e^{-\alpha} \qquad \text{gdzie} \quad \alpha = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$C_j = \frac{\lambda^j}{\mu^j j!} C_0 = \frac{\alpha^j}{j!} C_0 \qquad j = 1, 2, ..., n, ...$$

Uwaga.

$$C_j = \frac{\alpha^j}{j!} e^{-\alpha} = P_\alpha(j) \qquad j = 0, 1, 2, ..., n, ...$$

zatem do obliczeń można wykorzystać tablice rozkładu Poissona.

Uwaga. Ten typ SMO nie może być rozpatrywany z pełną współpracą obsługi.

SMO bez strat (nieskończenie długa kolejka), bez współpracy.

m = ∞

stanowiska obsługi — poczekalnia

$$[0] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \ldots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n] \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+1] \ldots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+m] \ldots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}$$

Prawdopodobieństwa graniczne:

$$C_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\beta}{1-\beta} \right)^{-1}$$

zakładamy, że $\beta = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\alpha}{n}$ < 1 (**warunek istnienia prawdopodobieństw granicznych**) zatem

$$C_k = \frac{\alpha^k}{k!} C_0, \qquad k = 1, 2, ..., n \qquad C_{n+j} = \beta^j C_n, \qquad j = 1, 2, ...$$

Uwaga. dla k = 0, 1, 2, ..., n

$$C_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} + \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha} \frac{\beta}{1-\beta}} = \frac{P_\alpha(k)}{\sum_{k=0}^{n} P_\alpha(k) + P_\alpha(n) \frac{\beta}{1-\beta}}$$

Uwaga. Podobnie dla $\beta < 1$ można rozpatrywać przypadek SMO z nieskończoną poczekalnią i **pełną współpracą stanowisk**. Wtedy

$$C_0 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2+\ldots} = \left(\frac{1}{1-\beta}\right)^{-1}; \qquad C_j = \beta^j C_0, \qquad j = 1, 2, ...$$

SMO bez strat (zgłoszenia niecierpliwe), bez współpracy.

$m = \infty$

T_1 – czas oczekiwania w kolejce,

$$P(T_1 < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\nu t} & gdy \;\; t > 0 \\ 0 & gdy \;\; t \le 0 \end{cases}$$

ν - intensywność niecierpliwości,

stanowiska obsługi poczekalnia

$$[0] \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [1] \ldots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n] \underset{n\mu+\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+1] \ldots \underset{n\mu+m\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} [n+m] \ldots$$

Prawdopodobieństwa graniczne:

$$C_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{\lambda}{n\mu + \nu} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\lambda^2}{(n\mu+\nu)(n\mu+2\nu)} + \ldots + \frac{\lambda^m}{(n\mu+\nu)\ldots(n\mu+m\nu)} + \ldots \right)\right)^{-1}$$

zakładamy, że powyższy szereg jest zbieżny.

Zatem

$$C_k = \frac{\alpha^k}{k!} C_0 \text{`} \quad k = 1, 2, ..., n \qquad C_n = \frac{\alpha^n}{n!} C_0$$

$$C_{n+j} = C_n \frac{\lambda^j}{(n\mu+\nu)\ldots(n\mu+j\nu)} \text{`} \qquad j = 1, 2, ...$$

Charakterystyki SMO.

m_{kl} - średnia liczba klientów w SMO (st. obsł. lub poczekalnia),
m_k - średnia długość kolejki,
m_{zs} - średnia liczba zajętych stanowisk,

SMO z ograniczonymi stratami, bez współpracy.

Y - liczba zajętych stanowisk obsługi,

Y	0	1	...	n - 1	n
p	C_0	C_1	...	C_{n-1}	$C_n + C_{n+1} + \ldots + C_{n+m}$

$$m_{zs} = \mathrm{EY} = \alpha(1 - C_{n+m}) = \alpha\ P_{\text{obsł}}$$

Z - liczba zajętych miejsc w poczekalni,

Z	0	1	...	m
p	$\sum_{i=0}^{n} C_i$	C_{n+1}	...	C_{n+m}

$$m_k = \mathrm{EZ} = \begin{cases} C_n\left(\dfrac{m(m+1)}{2}\right) & dla\ \ \beta = 1 \\ C_n\beta\left(\dfrac{1-(m+1)\beta^m + m\beta^{m+1}}{(1-\beta)^2}\right) & dla\ \ \beta \neq 1 \end{cases}$$

X - liczba zgłoszeń w SMO, $X = Y + Z$,

Zatem

$$\mathbf{m_{kl} = EX = EY + EZ = m_{zs} + m_k}$$

Wniosek.
Jeśli m = 0 (brak poczekalni) to

$$\mathbf{EZ = 0, \qquad EX = EY = \alpha(1 - C_n)}$$

Wniosek.
Jeśli $m = \infty$ to $C_{n+m} \to 0$ (gdy $m \to \infty$) oraz

$$\mathbf{EY = \alpha} \qquad \mathrm{EZ} = \mathrm{C_n}\beta\frac{1}{(1-\beta)^2}$$

t_{syst} - średni czas przebywania w SMO,

$$\mathbf{t_{syst} = m_{kl}/\lambda}$$

t_{kol} - średni czas przebywania w kolejce,

$$\mathbf{t_{kol} = m_k/\lambda}$$

Niech $m = \infty$ (wtedy $\beta < 1$)

Z - czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce.

$$\mathrm{P(Z > z)} = \begin{cases} 1 & dla \;\; z < 0 \\ \dfrac{\mathrm{C_n}}{1-\beta} e^{-n\mu z(1-\beta)} & dla \;\; z \geq 0 \end{cases}$$

Klasyfikacja kolejek.

Priorytety obsługi:
FIFO (first in first of),
SIRO (selection in random order),
LIFO (last in first out).

Rozpatrywany przez nas priorytet to FIFO.

Klasyfikacja Kendalla:

$$X_1/X_2/n : (N, m),$$

X_1 - rozkład czasu między kolejnymi zgłoszeniami,
X_2 - rozkład czasu obsługi jednego zgłoszenia,
n - liczba stanowisk obsługi,
N - liczebność obsługiwanej populacji,
m - liczba miejsc w poczekalni.
Dla rozkładów X_1, X_2 przyjęto m in. oznaczenia:
D - rozkład deterministyczny (równe odstępy czasu),
M - rozkład wykładniczy,
G - dowolny rozkład,

Rozpatrywany przez nas markowskie SMO ma oznaczenie

$$M/M/n : (\infty, m)$$

Przykład.
Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy, $\lambda = 2$ zgł./h; $\mu = 4$ zgł./h ($\alpha = \lambda/\mu = 0{,}5$).
Wyznacz minimalną liczbę stanowisk obsługi tak aby $P_{odm} < 0{,}05$.
Sposób I.
Rozpatrujemy na przykład n = 2.

$$C_0 = \left(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}\right)^{-1} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)^{-1} = \frac{8}{13} \qquad C_1 = \frac{\alpha}{1!}C_0 = \frac{4}{13} \qquad C_2 = \frac{\alpha^2}{2!}C_0 = \frac{1}{13} > 0{,}05$$

Należy zatem zwiększyć n.
Rozpatrujemy n = 3.

$$C_0 = \left(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}\right)^{-1} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}\right)^{-1} = \frac{48}{79}$$

wtedy $C_1 = \frac{\alpha}{1!}C_0 = \frac{24}{79}$ $C_2 = \frac{\alpha^2}{2!}C_0 = \frac{6}{79}$ $C_3 = \frac{\alpha^3}{3!}C_0 = \frac{1}{79} < 0,05$

Ponieważ $C_3 = P_{odm} = 1/79 < 0,05$ zatem powinny być przynajmniej 3 stanowiska.
Sposób II (z wykorzystaniem tablic rozkładu Poissona)
Rozpatrujemy na przykład n = 2.

$$C_2 = \frac{P_\alpha(j)}{\sum_{j=0}^{n} P_\alpha(j)} = \frac{P_{0,5}(2)}{P_{0,5}(0)+P_{0,5}(1)+P_{0,5}(2)} = \frac{0,0758}{0,6065+0,3033+0,0758} = 0,077$$

Należy zatem zwiększyć n.
Rozpatrujemy n = 3.

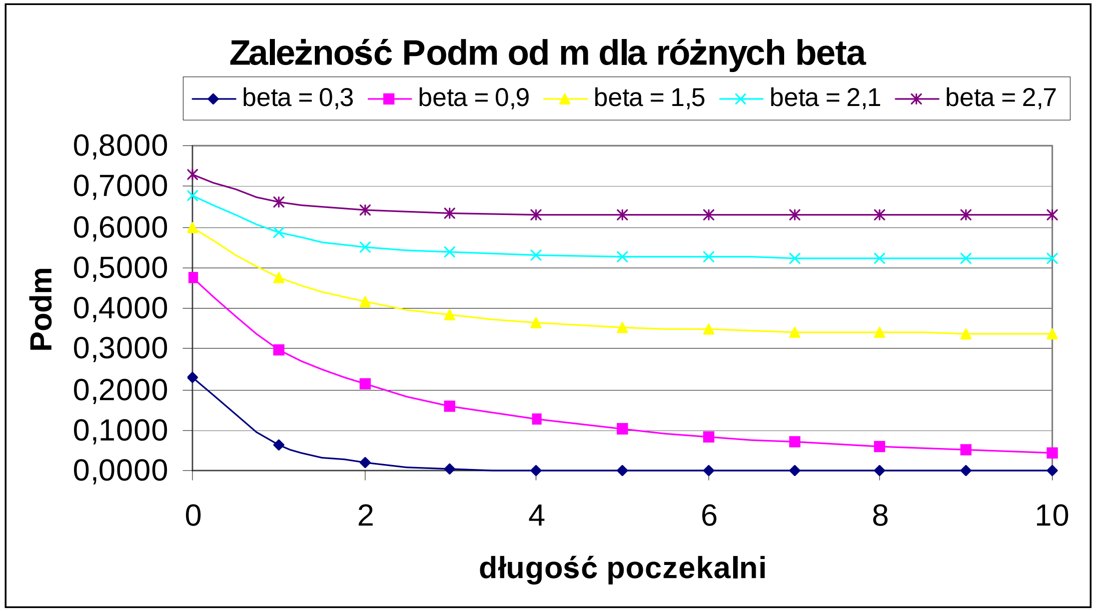
$$C_3 = \frac{P_{0,5}(3)}{P_{0,5}(0)+P_{0,5}(1)+P_{0,5}(2)+P_{0,5}(3)} = \frac{0,0126}{0,6065+0,3033+0,0758+0,0126} = 0,0126$$

Ponieważ $C_3 = P_{odm} = 0,0126 < 0,05$ zatem powinny być przynajmniej 3 stanowiska.

Przykład.
Rozpatrujemy SMO z jednym stanowiskiem obsługi. Zbadamy jak zmienia się P_{odm} dla różnych wartości α gdy długość poczekalni rośnie od m = 0 do m = 10.
W tym przypadku $\alpha = \beta$. Poszczególne kolumny zawierają P_{odm} dla ustalonego β i różnych m.

beta	0,3	0,9	1,5	2,1	2,7

m	Podm	Podm	Podm	Podm	Podm
0	0,2308	0,4737	0,6000	0,6774	0,7297
1	0,0647	0,2989	0,4737	0,5872	0,6633
2	0,0191	0,2120	0,4154	0,5522	0,6417
3	0,0057	0,1602	0,3839	0,5370	0,6340
4	0,0017	0,1260	0,3654	0,5300	0,6313
5	0,0005	0,1019	0,3541	0,5267	0,6302
6	0,0002	0,0840	0,3469	0,5252	0,6299
7	0,0000	0,0703	0,3422	0,5245	0,6297
8	0,0000	0,0595	0,3392	0,5241	0,6297
9	0,0000	0,0508	0,3372	0,5240	0,6296
10	0,0000	0,0437	0,3359	0,5239	0,6296



Jak widać P_{odm} maleje gdy rośnie liczba miejsc w poczekalni.

Zadanie 1.

Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy, średnio klienci zgłaszają się co 20 minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi 5 minut.

Wyznacz minimalną liczbę stanowisk obsługi tak aby $P_{odm} < 0,01$.

Dla tak wyznaczonej liczby stanowisk oblicz prawdopodobieństwo:

- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest przynajmniej jeden klient,
- tego, że w SMO jest najwyżej jeden klient,
- tego, że czas między kolejnymi zgłoszeniami przekracza 0,5 godziny,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO. Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.

Zadanie 2.

Rozpatrujemy SMO ze stratami z jednym stanowiskiem obsługi. Wiadomo, że prawdopodobieństwa odmowy obsługi wynosi 0,375 oraz, że średnio klienci zgłaszają się co 20 minut. Ile wynosi średni czas obsługi jednego klienta w tym SMO?

Odp. 12 minut

Zadanie 3.

Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy z dwoma stanowiskami obsługi. Wiadomo, że prawdopodobieństwa odmowy obsługi wynosi 0,2 oraz, że średni czas obsługi jednego klienta w tym SMO wynosi 10 minut. Ile wynosi intensywność zgłoszeń w tym SMO?

Odp. $\alpha = 1$ więc $\lambda = \mu = 6$zgł/godz

Zadanie 4.
Rozpatrujemy SMO ze stratami, bez współpracy. Wiadomo, że intensywność zgłoszeń jest równa intensywności obsługi. Średnia liczba zajętych stanowisk wynosi a) 0,5 b) 0,8
Ile jest stanowisk obsługi w tym SMO?

Odp. a) 1 b) 2

Zadanie 5.
Rozpatrujemy SMO z ograniczonymi stratami, bez współpracy z jednym stanowiskiem obsługi i jednym miejscem w poczekalni. . Wiadomo, że intensywność zgłoszeń jest równa intensywności obsługi. Wyznacz P_{odm} i m_{zs}.

Odp. $C_0 = C_1 = C_2 = 1/3$ więc $P_{odm} = 1/3$ i $m_{zs} = 1$

Zadanie 6.
Rozpatrujemy SMO z ograniczonymi stratami, bez współpracy, średnio klienci zgłaszają się co 30 minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi również 30 minut. W poczekalni są 2 miejsca. Wyznacz minimalną liczbę stanowisk obsługi tak aby $P_{odm} < 0{,}001$.
Dla tak wyznaczonej liczby stanowisk oblicz prawdopodobieństwo:
- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest przynajmniej dwóch klientów,
- tego, że w poczekalni jest najwyżej jeden klient,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO. Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.
Wyznacz średnią liczbę zajętych miejsc w poczekalni.

Zadanie 7.
Rozpatrujemy SMO bez strat (nieskończona poczekalnia), mamy dwa kanały obsługi bez współpracy, średnio klienci zgłaszają się co 15 minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi również 15 minut. Oblicz prawdopodobieństwo:
- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest przynajmniej dwóch klientów,
- tego, że w poczekalni jest najwyżej trzech klientów,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO. Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.
Wyznacz średnią liczbę zajętych miejsc w poczekalni.

Zadania powt.

Zadanie 1.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At^2 + B$, gdzie A , B to zmienne losowe nieskorelowane. A ma rozkład Poissona z parametrem 2, B jest zmienną losową skokową o funkcji prawdopodobieństwa: P(B = -1) = 0,25; P(B = 0) = 0,5; P(B = 1) = 0,25

Zadanie 2.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = Ae^t + Be^{-t}$, gdzie A, B to zmienne losowe o parametrach: EA = 1; EB = 0, i $D^2A = 2$, $D^2B = 2$; współczynnik korelacji między tymi zmiennymi wynosi -0,75.

Zadanie 3.

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At + B$, gdzie A, B to zmienne losowe o parametrach: EA = 0; EB = -1, i macierzy kowariancji $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4.

Narysować graf tego łańcucha:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

Jeśli istnieje rozkład ergodyczny tego łańcucha , to wyznaczyć go.

Zadanie 5.

Wyznaczyć rozkład ergodyczny łańcucha Markowa o macierzy (jeśli istnieje).

Narysować graf łańcucha.

a) $P = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$ b) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

Zadanie 6.

Proces (łańcuch Markowa) przyjmuje wartości -1, 0, 1. Rozkład początkowy p(0) = [0, 0, 1]. Macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

Narysować graf łańcucha. Wyznaczyć:

1. Rozkład prawdopodobieństwa po 2 krokach (tzn. wektor p(2))
2. Wartość oczekiwaną procesu po 2 krokach.
3. Graniczną wartość oczekiwaną.

Zadanie 7.

Narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć graniczną wartość oczekiwaną. Wyznaczyć graniczną wariancję.

Zadanie 8.

W zakładzie pracują maszyny, z których każda psuje się niezależnie od pozostałych z intensywnością λ = 2 maszyny/godz. Maszyny te są naprawiane przez robotników z intensywnością 4 maszyny/godz. każdy.
. Niech X(t) oznacza liczbę zepsutych maszyn w chwili t. Rozpatrzmy następujące przypadki:

7) są 4 maszyny i 2 robotników pracujących bez współpracy .
8) są 4 maszyny i 2 robotników pracujących z pełną współpracą.
9) są 4 maszyny i 2 robotników pracujących z ograniczoną współpracą (z intensywnością 4maszyny/godz. każdy gdy pracują osobno i z intensywnością 2 maszyny/godz. gdy pracują razem).

W każdym przypadku:

h) narysować graf,
i) wyznaczyć prawdopodobieństwa graniczne,
j) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że żaden robotnik nie pracuje,
k) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że dokładnie jedna maszyna jest sprawna,
l) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że przynajmniej jedna maszyna czeka na naprawę,
m) obliczyć średnia liczbę zepsutych maszyn,
n) obliczyć średnia liczbę zajętych robotników.

Zadanie 9.

Strumień awarii pewnego systemu jest modelowany procesem Poissona. Wiadomo, że przeciętnie jedna awaria zdarza się raz na 20 godzin.

e) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia dokładnie jednej awarii w ciągu 10 godzin,
f) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia najwyżej dwóch awarii w ciągu 10 godzin,
g) obliczyć prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy w ciągu 10 godzin,
h) obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi awariami będzie większy niż 50 godzin,
i) obliczyć wartość oczekiwaną bezawaryjnego czasu pracy tego systemu.

Zadanie 10.

Strumień zgłoszeń abonentów do centrali telefonicznej jest procesem Poissona. Średnio zgłasza się 15 abonentów w ciągu godziny.

a) oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu 20 minut do centrali zgłosi się
   I) czterech abonentów,
   II) co najwyżej jeden abonent,
b) oblicz prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania na kolejnego klienta będzie wynosił od 20 do 40 minut,

Zadanie 11.

Do SMO napłynęło zgłoszenie i rozpoczęła się jego obsługa. Wiadomo, że λ = 4zgł/h;
μ = 2zgł/h.
Obliczyć prawdopodobieństwo, że w czasie T = 15 minut

a) napłynie kolejne zgłoszenie,
b) zakończy się obsługa zgłoszenia.

Zadanie 12.

Rozpatrujemy SMO ze stratami, z pełną współpracą, średnio klienci zgłaszają się co 30 minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi 15 minut.
Wyznacz minimalną liczbę stanowisk obsługi tak aby $P_{odm} < 0,02$.
Dla tak wyznaczonej liczby stanowisk oblicz prawdopodobieństwo:

- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest dokładnie jeden klient,
- tego, że w SMO jest najwyżej jeden klient,
- tego, że czas między kolejnymi zgłoszeniami przekracza 0,25 godziny,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO.
Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.

Zadanie 13.

Rozpatrujemy SMO z ograniczonymi stratami, z pełną współpracą, średnio klienci zgłaszają się co 20 minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi 10 minut. W poczekalni jest 1 miejsce. Wyznacz minimalną liczbę stanowisk obsługi tak aby $P_{odm} < 0,01$.
Dla tak wyznaczonej liczby stanowisk oblicz prawdopodobieństwo:

- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest dokładnie dwóch klientów,
- tego, że w poczekalni nie ma klientów,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO.
Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.
Wyznacz średnią liczbę zajętych miejsc w poczekalni.

Zadanie 14.

Rozpatrujemy SMO bez strat (nieskończona poczekalnia), mamy jeden kanał obsługi, średnio klienci zgłaszają się co 30 minut, a średni czas obsługi jednego klienta wynosi również 20 minut. Oblicz prawdopodobieństwo:

- tego, że w SMO nie ma klientów,
- tego, że w SMO jest dokładnie jeden klient,
- tego, że w poczekalni jest najwyżej dwóch klientów,

Wyznacz średnią liczbę klientów w SMO.
Wyznacz średnią liczbę zajętych stanowisk.
Wyznacz średnią liczbę zajętych miejsc w poczekalni.

Zadanie 15.

W SMO z ograniczonymi stratami bez współpracy stanowisk jest jedno stanowisko obsługi, λ = 4zgł/h; μ = 4zgł/h.
Wyznaczyć minimalną liczbę miejsc w poczekalni tak, aby $p_{odm} < 0{,}005$.
Dla tak wyznaczonego m oblicz

a) średnią liczbę klientów w SMO,
b) średnią liczbę zajętych stanowisk,
c) średnią liczbę klientów w poczekalni,

Obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między zgłoszeniami przekroczy
30 minut.

Procesy stochastyczne. Uzupełnienie.

Niestacjonarny strumień Poissona to strumień zdarzeń w którym intensywność jest funkcją czasu $\lambda(t)$. Dla takiego strumienia liczba zdarzeń zachodzących w przedziale $(t_0;\ \tau + t_0)$ ma rozkład Poissona

$$P(X(t_0,\tau) = k) = p_k(t_0,\tau) = \frac{\tilde{\lambda}}{k!} e^{-\tilde{\lambda}} \qquad k = 0, 1, \ ...$$

gdzie $\tilde{\lambda} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt$

Rozkład czasu między kolejnymi zdarzeniami ma gęstość

$$f_{t_0}(t) = \lambda(t_0 + t)e^{-\int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt} \quad t > 0$$

Przykład.

a) Wyznacz powyższą gęstość gdy $\lambda(t) = 2 + 3t$.

b) Dla $\lambda(t)$ z punktu a) oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się co najmniej jednego zdarzenia w przedziale czasu (2, 5).

c) Dla $\lambda(t)$ z punktu a) oblicz $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P(X(0,\Delta t) \geq 1)}{P(X(0,\Delta t) = 1)}$

Strumień Palmy (strumień o ograniczonej pamięci) to strumień w którym czasy między kolejnymi zgłoszeniami są niezależne. Gdy ich rozkład jest ustalony to strumień Palmy jest **stacjonarny**.
(Jednorodny (stacjonarny) strumień Poissona jest stacjonarnym strumieniem Palmy, niestacjonarny strumień Poissona nie jest strumieniem Palmy bo początek kolejnego przedziału zależy od końca przedziału poprzedniego).

Twierdzenie. Jeśli strumień zgłoszeń systemu kolejkowego jest strumieniem Palmy o wykładniczym czasie obsługi to strumień zgłoszeń otrzymujących odmowę obsługi jest również strumieniem Palmy.

W szczególności jeśli strumień wejściowy jest prosty (Poissona) to strumień zgłoszeń nie obsłużonych nie jest prosty.

Strumień Erlanga rzędu k to strumień Poissona w którym k kolejnych zgłoszeń odrzucamy akceptując (k + 1) - sze zgłoszenie itd. Dla k = 0 strumień Erlanga jest strumieniem Poissona.
Rozkład czasu między zgłoszeniami w strumieniu Erlanga ma rozkład Erlanga k - tego rzędu (suma k niezależnych rozkładów wykładniczych) o gęstości

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad t > 0$$

i dystrybuancie

$$F_k(t) = P(T < t) = 1 - \sum_{s=0}^{k} \frac{(\lambda t)^s}{s!} e^{-\lambda t} \qquad t > 0$$

Strumień Erlanga jest strumieniem Palmy.

Przykład.

Strumień próbkowanych sygnałów pewnego systemu jest strumieniem Erlanga 5 - tego rzędu. Wiadomo, że intensywność wyjściowego strumienia wynosi λ = 0,1 sygn./min.).

j) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najwyżej jednego sygnału w ciągu 10 min,
k) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej trzech sygnału w ciągu 10 min,
l) obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi sygnałami będzie większy niż 20 min,
m) obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu Erlanga.

p - przekształcenie strumienia Palmy.

Każde zgłoszenie z prawdopodobieństwem p pozostaje w strumieniu a z prawdopodobieństwem q = 1 - p jest odrzucane.

p - przekształcenie strumienia Palmy jest strumieniem Palmy.

Dla strumienia Poissona p - przekształcenie jest strumieniem Poissona z parametrem λp.

Przykład.

Strumień zgłoszeń jest modelowany procesem Poissona. Wiadomo, że przeciętnie jedno zgłoszenie zdarza się raz na 20 godzin . Zgłoszenia z tego strumienia podlegają akceptacji z prawdopodobieństwem 0,25 (p = 0,25).

a) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najwyżej jednego zgłoszenia w ciągu 40 godzin,
b) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej czterech zgłoszeń w ciągu 40 godzin,

c) obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi zgłoszeniami będzie większy niż 200 godzin,
d) obliczyć wartość oczekiwaną czasu między zgłoszeniami.

Dodatek 3. Tablica rozkładu Poissona i tablica skumulowanego rozkładu Poissona.

Poisson-f.prawdopodobieństwa

alfa n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0,01	0,9900	0,0099	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,05	0,9512	0,0476	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,9048	0,0905	0,0045	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	0,8187	0,1637	0,0164	0,0011	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,3	0,7408	0,2222	0,0333	0,0033	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,4	0,6703	0,2681	0,0536	0,0072	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,5	0,6065	0,3033	0,0758	0,0126	0,0016	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,6	0,5488	0,3293	0,0988	0,0198	0,0030	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,7	0,4966	0,3476	0,1217	0,0284	0,0050	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,8	0,4493	0,3595	0,1438	0,0383	0,0077	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,9	0,4066	0,3659	0,1647	0,0494	0,0111	0,0020	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,1	0,3329	0,3662	0,2014	0,0738	0,0203	0,0045	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,2	0,3012	0,3614	0,2169	0,0867	0,0260	0,0062	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,3	0,2725	0,3543	0,2303	0,0998	0,0324	0,0084	0,0018	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,4	0,2466	0,3452	0,2417	0,1128	0,0395	0,0111	0,0026	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,5	0,2231	0,3347	0,2510	0,1255	0,0471	0,0141	0,0035	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,6	0,2019	0,3230	0,2584	0,1378	0,0551	0,0176	0,0047	0,0011	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,7	0,1827	0,3106	0,2640	0,1496	0,0636	0,0216	0,0061	0,0015	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,8	0,1653	0,2975	0,2678	0,1607	0,0723	0,0260	0,0078	0,0020	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,9	0,1496	0,2842	0,2700	0,1710	0,0812	0,0309	0,0098	0,0027	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034	0,0009	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,2	0,1108	0,2438	0,2681	0,1966	0,1082	0,0476	0,0174	0,0055	0,0015	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,4	0,0907	0,2177	0,2613	0,2090	0,1254	0,0602	0,0241	0,0083	0,0025	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,5	0,0821	0,2052	0,2565	0,2138	0,1336	0,0668	0,0278	0,0099	0,0031	0,0009	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,6	0,0743	0,1931	0,2510	0,2176	0,1414	0,0735	0,0319	0,0118	0,0038	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,8	0,0608	0,1703	0,2384	0,2225	0,1557	0,0872	0,0407	0,0163	0,0057	0,0018	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1680	0,1008	0,0504	0,0216	0,0081	0,0027	0,0008	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
3,5	0,0302	0,1057	0,1850	0,2158	0,1888	0,1322	0,0771	0,0385	0,0169	0,0066	0,0023	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000
4	0,0183	0,0733	0,1465	0,1954	0,1954	0,1563	0,1042	0,0595	0,0298	0,0132	0,0053	0,0019	0,0006	0,0002	0,0001	0,0000
5	0,0067	0,0337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1755	0,1462	0,1044	0,0653	0,0363	0,0181	0,0082	0,0034	0,0013	0,0005	0,0002
8	0,0003	0,0027	0,0107	0,0286	0,0573	0,0916	0,1221	0,1396	0,1396	0,1241	0,0993	0,0722	0,0481	0,0296	0,0169	0,0090
10	0,0000	0,0005	0,0023	0,0076	0,0189	0,0378	0,0631	0,0901	0,1126	0,1251	0,1251	0,1137	0,0948	0,0729	0,0521	0,0347

Poisson p-stwo skumulowane (dystrybuanta prawostronnie ciągła)

alfa n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0,01	0,9900	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,05	0,9512	0,9988	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,9048	0,9953	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	0,8187	0,9825	0,9989	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,3	0,7408	0,9631	0,9964	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,4	0,6703	0,9384	0,9921	0,9992	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,5	0,6065	0,9098	0,9856	0,9982	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,6	0,5488	0,8781	0,9769	0,9966	0,9996	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,7	0,4966	0,8442	0,9659	0,9942	0,9992	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,8	0,4493	0,8088	0,9526	0,9909	0,9986	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,9	0,4066	0,7725	0,9371	0,9865	0,9977	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,3679	0,7358	0,9197	0,9810	0,9963	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,1	0,3329	0,6990	0,9004	0,9743	0,9946	0,9990	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,2	0,3012	0,6626	0,8795	0,9662	0,9923	0,9985	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,3	0,2725	0,6268	0,8571	0,9569	0,9893	0,9978	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,4	0,2466	0,5918	0,8335	0,9463	0,9857	0,9968	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,5	0,2231	0,5578	0,8088	0,9344	0,9814	0,9955	0,9991	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,6	0,2019	0,5249	0,7834	0,9212	0,9763	0,9940	0,9987	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,7	0,1827	0,4932	0,7572	0,9068	0,9704	0,9920	0,9981	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,8	0,1653	0,4628	0,7306	0,8913	0,9636	0,9896	0,9974	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,9	0,1496	0,4337	0,7037	0,8747	0,9559	0,9868	0,9966	0,9992	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0,1353	0,4060	0,6767	0,8571	0,9473	0,9834	0,9955	0,9989	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,2	0,1108	0,3546	0,6227	0,8194	0,9275	0,9751	0,9925	0,9980	0,9995	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,4	0,0907	0,3084	0,5697	0,7787	0,9041	0,9643	0,9884	0,9967	0,9991	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,5	0,0821	0,2873	0,5438	0,7576	0,8912	0,9580	0,9858	0,9958	0,9989	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,6	0,0743	0,2674	0,5184	0,7360	0,8774	0,9510	0,9828	0,9947	0,9985	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,8	0,0608	0,2311	0,4695	0,6919	0,8477	0,9349	0,9756	0,9919	0,9976	0,9993	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0,0498	0,1991	0,4232	0,6472	0,8153	0,9161	0,9665	0,9881	0,9962	0,9989	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3,5	0,0302	0,1359	0,3208	0,5366	0,7254	0,8576	0,9347	0,9733	0,9901	0,9967	0,9990	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
4	0,0183	0,0916	0,2381	0,4335	0,6288	0,7851	0,8893	0,9489	0,9786	0,9919	0,9972	0,9991	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000
5	0,0067	0,0404	0,1247	0,2650	0,4405	0,6160	0,7622	0,8666	0,9319	0,9682	0,9863	0,9945	0,9980	0,9993	0,9998	0,9999
8	0,0003	0,0030	0,0138	0,0424	0,0996	0,1912	0,3134	0,4530	0,5925	0,7166	0,8159	0,8881	0,9362	0,9658	0,9827	0,9918
10	0,0000	0,0005	0,0028	0,0103	0,0293	0,0671	0,1301	0,2202	0,3328	0,4579	0,5830	0,6968	0,7916	0,8645	0,9165	0,9513