ZADANIA - ZESTAW 1

Zadanie 1.1

Rzucamy trzy razy monetą. A_i - zdarzenie polegające na tym, że otrzymamy orła w i - tym rzucie. Określić zbiór zdarzeń elementarnych. Wypisać zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom A_i.
Zapisać za pomocą działań na zdarzeniach A_i następujące zdarzenia:
a) wyrzucono dokładnie jednego orła,
b) wyrzucono co najmniej jednego orła,
c) wyrzucono orła tylko w pierwszym rzucie,
d) wyrzucono orła dwukrotnie,
e) wyrzucono liczbę orłów większą od liczby reszek
f) nie wyrzucono orła ani razu.

Zadanie 1.1b

A, B,C – dane zdarzenia losowe.
Zapisać w prostszej postaci zdarzenia:
a) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$,
b) $(A \cup B) \cap (A \cup B')$
c) $(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B)$
d) $\left[(A \cup B) \cap (A \cup B')\right] \cup \left[(A' \cup B) \cap (A \cup B)'\right]$.

(odp. a) $B \cup A \cap C$, b) A, c) $A \cap B$, d) Ω)

Zadanie 1.2

W urnie znajduje się 5 białych i 3 czarne kule. Z urny wyciągamy losowo jednocześnie dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
a) wylosowano kule białe
b) wylosowano kule jednakowego koloru,
c) wylosowano kule różnokolorowe.

(odp. a) 20/56, b) 26/56, c) 30/56)

Zadanie 1.2a

W urnie znajduje się 6 białych, 8 czarnych i 6 zielonych kul. Z urny wyciągamy losowo jednocześnie cztery kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że dokładnie dwie z nich będą białe a pozostałe różnokolorowe.

Zadanie 1.3
Sześciu mężczyzn i dwie kobiety losowo ustawiło się w kolejce do kasy w banku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

a) panie będą stały obok siebie
b) pomiędzy paniami będzie stało dwóch mężczyzn

(odp. a) 0,25, b) 5/28).

Zadanie 1.3a
Rzucamy dwiema kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia sumy co najmniej 8 oczek na obu kostkach.

(odp. 5/12).

Zadanie 1.3b
Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że 12 przypadkowych osób może mieć urodziny w różnych miesiącach roku.

(odp. około 0,00005).

Zadanie 1.3c
Do trzech wagonów metra wsiada losowo 9 pasażerów. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że do pierwszego wagonu wsiądzie czterech pasażerów.

Zadanie 1.3d
Pomalowany sześcian rozcięto na 1000 jednakowych małych sześcianów i wymieszano. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany mały sześcian ma dwie ściany pomalowane.

(odp. około 0,096).

Zadanie 1.3e
W urnie jest 10 losów z których połowa jest wygrywająca. Gracz wylosował 3 losy. Jakie ma prawdopodobieństwo wygranej?

(11/12).

Zadanie 1.3f
Ile razy należy rzucić kostką do gry, aby prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej raz 6 oczek było większe od 0,5.

(odp. co najmniej 4 razy).

Zadanie 1.4

W pewnym mieście 80% rodzin ma pralkę automatyczną, 50% zmywarkę, a 40% pralkę automatyczną, i zmywarkę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana rodzina w tym mieście będzie miała przynajmniej jedno z tych urządzeń?

(odp. 0,9).

Zadanie 1.5

Na płaszczyźnie znajdują się dwa współśrodkowe koła o promieniu 2 i 4 cm. Losowo wybieramy punkt z koła o promieniu 4 cm. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrany punkt nie będzie należał do koła o promieniu 2 cm?

(odp. 0,75).

Zadanie 1.6

Z przedziału [-300, 300] wybrano losowo liczby *b, c*. Obliczyć prawdopodobieństwo, że równanie $75x^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki rzeczywiste.

(odp. 2/3)

Zadanie 1.6b

Z przedziału [-2, 2] wybrano losowo liczby *x, y*. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $x^2 \le y + 2$.

Zadanie 1.6c

Z przedziału [0, 1] wybrano losowo liczby *x*, *y*. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma tych liczb nie przekroczy 1 a iloczyn nie przekroczy 2/9.

(odp. około 0,487)

Zadanie 1.6d

Na nieskończoną szachownicę o boku pola długości *a* rzucono monetę o promieniu $r < a/2$. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) moneta nie przecina żadnego boku pola,
b) moneta przecina najwyżej jeden bok pola,

(odp. a) $\frac{(a-2r)^2}{a^2}$, b) $\frac{a^2 - 4r^2}{a^2}$)

Zadanie 1.6e

Odcinek długości 1 dzielimy losowo na trzy odcinki o długościach x, y, z. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że z tych odcinków można zbudować trójkąt.

(odp. 0,25)

Zadanie 1.7

Niech $P(A \cup B) = 0{,}75$, $P(A \cap B) = 0{,}5$. Ponadto $P(A-B) = P(B-A)$. Obliczyć $P(A)$ i $P(B-A)$.

(odp. 5/8, 1/8).

Zadanie 1.7a

Niech $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}5$; $P(C) = 0{,}6$; $P(A \cap B) = 0{,}1$; $P(C \cap B) = 0{,}3$; $P(A \cap C) = 0{,}2$; $P(A \cap B \cap C) = 0{,}05$.

Obliczyć $P(A \cup B \cup C)$.

(odp. 0,85).

Zadanie 1.8

Niech $P(A) = 0{,}35$, $P(B) = 0{,}4$, $P(A \cup B) = 0{,}45$.

Oblicz: a) $P(A \cap B)$, b) $P(A' \cap B)$, c) $P(A' \cap B')$, d) $P(A' \cup B)$, e) $P(A' \cup B')$.

(odp. 0,3; 0,1; 0,55; 0,95; 0,7)

Zadanie 1.9

Rzucamy dwiema kostkami do gry.
A – wypadła co najmniej jedna szóstka,
B – co najmniej jeden wynik jest parzysty.
Zbadać czy A, B są niezależne.

(odp. zależne).

Zadanie 1.9a

Rzucamy dwiema kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia więcej niż 3 oczek na pierwszej kostce, jeśli wiadomo, że suma oczek na obu kostkach jest mniejsza od 5.

(odp. 0).

Zadanie 1.9b
Rzucamy dwiema kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia więcej niż 3 oczek na pierwszej kostce, jeśli wiadomo, że suma oczek na obu kostkach jest mniejsza od 6.

(odp. 0,1).

Zadanie 1.10
53% studiujących w pewnej uczelni to panie. Wiadomo, że 9% pań i 12% panów nie zaliczyło sesji w tej uczelni. Obliczyć prawdopodobieństwo, ze losowo wybrany student z tej uczelni nie zaliczył sesji.

(odp. 0,1041).

Zadanie 1.11
Każda z trzech urn zawiera 6 czerwonych i 4 białe kule. Z pierwszej urny losowo wybieramy jedną kulę i przekładamy do drugiej urny. Następnie z drugiej urny losujemy jedną kulę i przekładamy do trzeciej urny. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania z trzeciej urny kuli białej.

(odp. 0,4).

Zadanie 1.11a
Każda z dwóch urn zawiera 6 białych i 4 czerwone kule. Z pierwszej urny losowo wybieramy trzy kule i przekładamy do drugiej urny. Następnie z drugiej urny losujemy jedną kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania z drugiej urny kuli białej.

(odp. 39/65).

Zadanie 1.12
W skrzyni jest 12 detali wyprodukowanych w zakładzie A, 20 detali wyprodukowanych w zakładzie B i 18 detali wyprodukowanych w zakładzie C. Wadliwość produkcji poszczególnych zakładów wynosi odpowiednio: 10%, 40% i 10%.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany detal okaże się dobry,
b) Wylosowany detal okazał się wadliwy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyprodukował go zakład B?

(odp. a) 0,78; b) 0,73).

Zadanie 1.13a
Udowodnij, że jeśli zdarzenia A, B, C, D są niezależne to zdarzenia:

a) A', B b) A, B' c) A', B' d) $A \cup B$, C e) $A \cup B$, $C \cup D$
też są niezależne.

Zadanie 1.13
Dwie osoby rzucają kolejno monetą. Wygrywa ta osoba, która pierwsza wyrzuci orła. Obliczyć prawdopodobieństwo wygrania dla każdego z graczy.

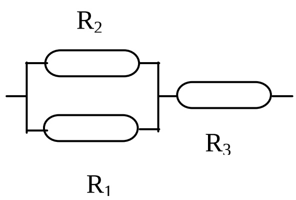
(odp. 2/3, 1/3).

Zadanie 1.14
Obwód kontrolujący temperaturę kadłuba wahadłowca Columbia ma niezawodność 0,9. Ile takich obwodów działających niezależnie należy zainstalować, aby niezawodność kontroli temperatury przez taki system (tzn. aby działał przynajmniej jeden obwód) była równa przynajmniej 0,9999?

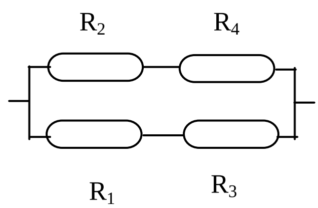
(odp. 4).

Zadanie 1.15
Oblicz niezawodność poniższych układów, jeśli elementy R_i pracują niezależnie i mają niezawodności równe 0,3.

a)



b)



Zadanie 1.16
A i *B* - zdarzenia niezależne. Wiedząc, że P(*A*) = 0,5, P(*B*) = 0,4
obliczyć $P(A \cup B)$.

(odp. 0,7).

Zadanie 1.16b
A, B,C - zdarzenia niezależne.
Wiedząc, że P(*A*) = 0,5; P(*B*) = 1/3; P(*C*) = 0,25,
obliczyć $P(A \cup B \cup C)$, $P((A \cup C) - B)$.

(odp. 0,75; 5/12).

Zadanie 1.17

W pudełku jest 15 sztuk pewnego towaru, wśród nich jest 5 braków. Z pudełka wybieramy losowo 3 sztuki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano 2 braki?

(odp. 20/91).

Zadanie 1.18

Rzucono dwa razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek jest większa od 8, gdy

a) w dowolnym rzucie wypadnie 5 oczek,
b) w pierwszym rzucie wypadnie 5 oczek

(odp. a) 5/11, b) 1/2).

Zadanie 1.19

Trzy maszyny rozpoczęły pracę (pracują niezależnie) i psują się w ciągu zmiany z prawdopodobieństwem odpowiednio: 0,4; 0,3; 0,2. Obliczyć prawdopodobieństwo, że na koniec zmiany będzie pracować:

a) dokładnie jedna maszyna,
b) dwie maszyny,
c) wszystkie maszyny
d) trzecia maszyna,
e) pierwsza i trzecia maszyna.

(odp. a) 0,188; b) 0,452; c) 0,336).

Zadanie 1.20

Czy jest możliwe, aby dwa zdarzenia były niezależne i rozłączne?

(odp. tak)

Zadanie 1.21

Czy jest możliwe, aby zdarzenie A było niezależne od samego siebie?

(odp. tak)

Zadanie 1.22

Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wybrany losowo punkt koła $x^2 + y^2 \le 4$ leży na zewnątrz kwadratu $|x| \le 1$, $|y| \le 1$.

(odp. 1-1/π)

Zadanie 1.23 (komputer)

Z przedziału [0, 1] wybrano losowo liczby x, y.

Niech A – zdarzenie polegające na tym, że $x^2 + y^2 \le 1$,

Niech B – zdarzenie polegające na tym, że $x < y$.
Czy A i B są niezależne? (Wygeneruj 1000 par liczb z przedziału (0, 1). Wyznaczając przybliżenia odpowiednich prawdopodobieństw, sprawdź empirycznie powyższą niezależność)

(odp. tak)

Zadanie 1.23b (komputer)
Z przedziału [-1, 1] wybrano losowo liczby *x*, *y*.
Niech A – zdarzenie polegające na tym, że $x^2 \le y$,
Niech B – zdarzenie polegające na tym, że $x \le y$.
Czy A i B są niezależne? (Wygeneruj 1000 par liczb z przedziału (0, 1). Wyznaczając przybliżenia odpowiednich prawdopodobieństw, sprawdź empirycznie powyższą niezależność)

Zadanie 1.24 komputer
Z przedziału [0, 1] wybrano losowo liczby *x*, *y*.
Niech A – zdarzenie polegające na tym, że $x^2 + y^2 \le 1$. Oblicz P(A).
Wygeneruj 10000 par liczb z przedziału (0, 1), niech k liczba par sprzyjających zdarzeniu A. Iloraz k/10000 jest przybliżeniem P(A).
Ile wynosi błąd względny tego przybliżenia? Na podstawie powyższego przybliżenia wyznacz przybliżoną wartość liczby π.

(odp. P(A) = π/4)

Zadanie 1.25a
Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród k (1 < k < 366) studentów, którzy uczestniczą w wykładzie z rachunku prawdopodobieństwa są co najmniej dwie osoby, które obchodzą urodziny tego samego dnia? Przyjąć, że rok ma 365 dni.

(odp. $1-\dfrac{k!\binom{365}{k}}{365^k}$)

Zadanie 1.25b komputer

Wyznacz w tablicy wartości funkcji $P(k) = 1-\dfrac{k!\binom{365}{k}}{365^k}$ z poprzedniego zadania $(2 \le k \le 60)$.

Ilu studentów powinno być na wykładzie aby szansa spotkania się co najmniej dwóch osób, które obchodzą urodziny tego samego dnia wynosiła

a) co najmniej 50%,
b) co najmniej 95%,

(odp. a) $k > 22$; b) $k > 47$)

Zadanie 1.26

Wiadomość przekazywana kanałem łączności składa się z 10 znaków. Każdy znak może być zniekształcony z prawdopodobieństwem 0,25. Dla pewności przekazu wiadomość powtórzono 4 razy. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wiadomość chociaż raz będzie przekazana wiernie.

(odp. $1-(1-0{,}75^{10})^4$)

Zadanie 1.27

Dane sa zdarzenia A,B,C.
Zapisać za pomocą działań na zdarzeniach A, B, C następujące zdarzenia:

a) zachodzi tylko zdarzenie A,
b) zachodzi dokładnie jedno ze zdarzeń A, B, C
c) zachodzą dokładnie dwa spośród zdarzeń A, B, C,
d) zachodzą co najmniej dwa spośród zdarzeń A, B, C,
e) nie zachodzi żadne spośród zdarzeń A, B, C,

10.03.14