

Dyskretne procesy Markowa.

Rozpatrujemy proces stochastyczny X_t , w którym parametr t jest ciągły (zwykle $t \geq 0$).
Będziemy zakładać, że zbiór stanów jest co najwyżej przeliczalny.

Proces X_t , jest **procesem Markowa**, jeśli dla dowolnego n , dla dowolnych chwil czasu $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, oraz dowolnych stanów x, y, x_0, \dots, x_n spełniona jest zależność:

$$P\{X_{t_n} = y | X_{t_{n-1}} = x, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \dots, X_{t_0} = x_0\} = P\{X_{t_n} = y | X_{t_{n-1}} = x\}$$

Proces Markowa jest jednorodny w czasie, jeżeli dla dowolnych stanów x, y oraz chwil czasu $t_1 < t_2$ mamy

$$P\{X_{t_2} = y | X_{t_1} = x\} = p(x, y, t_2 - t_1)$$

co oznacza, że prawdopodobieństwo przejścia ze stanu x do stanu y w czasie od momentu t_1 do momentu t_2 zależy tylko od różnicy $t_2 - t_1$, a nie zależy od momentu wyjściowego t_1 (w szczególności może to być zawsze chwila 0).

Przyjmijmy oznaczenie $P\{X_{t_n} = j | X_{t_0} = i\} = p_{ij}(t)$, gdzie $t = t_n - t_0, t_n > t_0$.

Niech $P(t) = [p_{ij}(t)]$ **macierz prawdopodobieństw przejścia**

$i, j = 0, 1, \dots, N$ (dla skończonej liczby stanów).

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & \dots & p_{0N}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \dots & p_{1N}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N0}(t) & p_{N1}(t) & \dots & p_{NN}(t) \end{bmatrix}$$

Jest to macierz stochastyczna.

Zależność

$$p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(s)$$

nazywamy **równaniem Chapmana - Kołmogorowa**.

Wynika z niej, że

$$P(s+t) = P(s)P(t) = P(t)P(s)$$

Uwaga.

Niech $p_i(t) = P(X_t = i)$ - prawdopodobieństwo, że w chwili t proces znajdzie się w stanie i .

Takie prawdopodobieństwa nazywamy niekiedy **prawdopodobieństwami całkowitymi** (p. poniższa własność).

Wtedy
$$p_i(t) = \sum_{j=0}^N p_j(0) p_{ji}(t)$$

Niech $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_N(t))$ (rozkład procesu w chwili t)

Wtedy
$$p(t) = p(0)P(t)$$

Zakładamy, że funkcje $p_{ij}(t)$ są ciągłe w punkcie $t = 0$, oraz

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = i \\ 0 & \text{dla } j \neq i \end{cases}$$

Wtedy są ciągłe w dowolnym innym punkcie.

Istnieje też wtedy (choć może być nieskończona) granica prawostronna

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = -p'_{ii}(0)$$

oraz skończona granica prawostronna $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = p'_{ij}(0)$

Dla wygody przyjmujemy oznaczenia

$$p'_{ij}(0) = \begin{cases} -\lambda_{ii} & \text{dla } j = i \\ \lambda_{ij} & \text{dla } j \neq i \end{cases}$$

Wielkości te nazywamy **intensywnościami przejścia** ze stanu i do stanu j gdy $j \neq i$, oraz **intensywnościami wyjścia** ze stanu i (do pozostałych stanów) gdy $i = j$.

Ponieważ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = p'_{ij}(0) = \lambda_{ij}$, to λ_{ij} dla $j \neq i$ są gęstościami prawdopodobieństwa przejścia ze stanu i do stanu j , oraz dla małych t mamy $p_{ij}(t) \approx \lambda_{ij} \cdot t$, co oznacza, że dla małych t prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j jest proporcjonalne do t , współczynnikiem proporcjonalności jest intensywność λ_{ij} (gdy intensywność przejścia jest zerowa to takie prawdopodobieństwo jest zerowe).

Podobnie dla małych t mamy $1 - p_{ii}(t) \approx -\lambda_{ii} \cdot t$.

Określamy **macierz intensywności** Λ o elementach równym intensywnościom λ_{ij} (dla skończonej liczby stanów)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} & \cdots & \lambda_{0N} \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{N0} & \lambda_{N1} & \cdots & \lambda_{NN} \end{bmatrix}$$

Własności macierzy intensywności

- a) $\lambda_{ii} \leq 0$, wyrazy na głównej przekątnej są niedodatnie,
- b) $\lambda_{ij} \geq 0$ dla $i \neq j$ wyrazy poza przekątną są nieujemne.
- c) $\sum_j \lambda_{ij} = 0$ suma wyrazów każdego wiersza jest równa 0

dowód c)

$$\sum_j p_{ij}(t) = 1 \quad \text{stąd} \quad \sum_{j \neq i} p_{ij}(t) + p_{ii}(t) - 1 = 0 \quad | : t$$

$$\sum_{j \neq i} \frac{p_{ij}(t)}{t} + \frac{p_{ii}(t) - 1}{t} = 0 \quad \text{zatem} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left[\sum_{j \neq i} \frac{p_{ij}(t)}{t} + \frac{p_{ii}(t) - 1}{t} \right] = 0$$

czyli $\sum_{j \neq i} \lambda_{ij} + \lambda_{ii} = 0$

Macierzą intensywności nazywamy każdą macierz Λ taką, że:

- a) elementy pozadiagonalne są nieujemne,
- b) elementy diagonalne są niedodatnie,
- c) suma elementów w każdym wierszu wynosi 0.

Uwaga.

Jeśli Λ jest macierzą intensywności to macierz

$$P = \frac{1}{m} \Lambda + I$$

(gdzie $-m < 0$ jest najmniejszym elementem macierzy Λ (leży na głównej przekątnej Λ)) jest macierzą stochastyczną.

Wartości własne macierzy intensywności mają zawsze moduł nie większy niż $2m$, ich część rzeczywista mieści się w przedziale $[-2m, 0]$.

Dalej będziemy rozpatrywali jednorodne procesy Markowa, dla których wszystkie intensywności są skończone.

Taki proces spełnia równania Kołmogorowa:

$$(*) \quad \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = -\lambda_{ij} p_{i,j}(t) + \sum_{k \neq j} p_{i,k}(t) \lambda_{kj} \quad \text{dla ustalonego } i$$

(**równanie prospektywne** - odnosi się do przyszłości)

$$(**) \quad \frac{dp_{ij}(s)}{dt} = -\lambda_{ii} p_{i,j}(s) + \sum_{k \neq i} \lambda_{ik} p_{k,j}(s) \quad \text{dla ustalonego } j$$

(**równanie retrospektywne** - odnosi się do przeszłości)

przy warunkach początkowych $p_{i,i}(0) = 1, p_{i,j}(0) = 0$ dla $i \neq j$.

Możemy powyższe układy równań zapisać w postaci macierzowej:

$$(*) \quad P'(t) = P(t) \cdot \Lambda \quad \text{czyli} \quad \frac{d}{dt} P(t) = P(t) \Lambda$$

oraz

$$(**) \quad P'(t) = \Lambda \cdot P(t) \quad \text{czyli} \quad \frac{d}{dt} P(t) = \Lambda P(t)$$

W zastosowaniach częściej stosuje się równanie prospektywne.

dowód

Dla równania prospektywnego.

W równaniu $p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(s)$ (Chapmana - Kołmogorowa) podstawiamy $s = \Delta t$

$$p_{ij}(\Delta t + t) = \sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(\Delta t)$$

następnie od obu stron odejmujemy $p_{ij}(t)$ i dzielimy obie strony otrzymanej równości przez Δt

$$\frac{p_{ij}(\Delta t + t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = \frac{\sum_{k \neq j} p_{ik}(t) p_{kj}(\Delta t) - p_{ij}(t)[1 - p_{jj}(\Delta t)]}{\Delta t}$$

Zakładając, że rozpatrywane intensywności istnieją, gdy przejdziemy do granicy $\Delta t \rightarrow 0$ wtedy po uwzględnieniu

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = -p'_{ii}(0) = \lambda_{ii} \qquad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = p'_{ij}(0) = \lambda_{ij}$$

otrzymamy prospektywne równanie Kołmogorowa.

Ponieważ układ równań Kołmogorowa (*) można zapisać też w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt} P(t) = P(t) \Lambda$$

z warunkiem początkowym $P(0) = I$, to rozwiązanie można zapisać w postaci wykładniczej

$P(t) = e^{\Lambda t}$ gdzie

$$e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \frac{t^2}{2!} \Lambda^2 + \frac{t^3}{3!} \Lambda^3 + \dots$$

Oznaczając $p_i(t) = P(X_t = i)$ mamy $p_k(t) = \sum_i p_i(0) p_{ik}(t)$ i po zrózniczkowaniu względem czasu otrzymamy inny zapis równania prospektywnego

$$(***) \quad \frac{dp_j(t)}{dt} = -\lambda_{jj} p_j(t) + \sum_{k \neq j} \lambda_{kj} p_k(t) \quad j = 0, 1, \dots$$

Przyjmując $p(t) = [p_0(t), p_1(t), \dots]$ (**wektor rozkładu procesu** w momencie t) i macierz Λ możemy powyższy układ równań zapisać w postaci wektorowej:

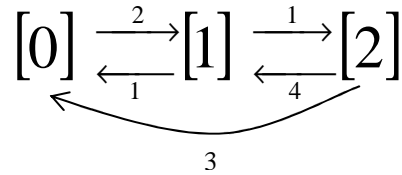
$$p'(t) = p(t) \cdot \Lambda \qquad \text{czyli} \qquad \frac{d}{dt} p(t) = p(t) \Lambda$$

Rozwiązanie tego równania ma postać $p(t) = p(0) e^{\Lambda t}$

Przykład.

Narysować graf i wyznaczyć równania prospektywne Kołmogorowa procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -2p_0(t) + p_1(t) + 3p_2(t) \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = 2p_0(t) - 2p_1(t) + 4p_2(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = p_1(t) - 7p_2(t) \end{cases}$$

Praktyczny sposób tworzenia takich równań na podstawie grafu jest następujący:

- Liczba równań jest równa liczbie stanów,
- Lewa strona każdego równania to pochodna prawdopodobieństwa danego stanu,
- Prawa strona ma tyle składników ile krawędzi grafu związanych jest z danym wierzchołkiem,
- Strzałkom wchodzącym odpowiada składnik równy intensywności przy tej strzałce pomnożonej przez prawdopodobieństwo stanu z którego ona wychodzi,
- Strzałkom wychodzącym odpowiada składnik równy intensywności przy tej strzałce pomnożonej przez prawdopodobieństwo stanu z którego ona wychodzi **poprzedzony znakiem minus** (ponieważ strzałki wychodzą z jednego stanu, to intensywności można zsumować).

W prostych przypadkach rozwiązanie układu równań $p'(t) = p(t) \cdot \Lambda$ można wyznaczyć metodą przekształcenia Laplace'a.

Przykład.

System składa się z jednego elementu podstawowego i dwóch elementów zapasowych. Element podstawowy jest obciążony i psuje się z intensywnością λ . Elementy zapasowe są nieobciążone i nie psują się. Gdy popsuje się element podstawowy jego funkcje przejmuje element zapasowy i wtedy psuje się z intensywnością λ . System przestaje pracować z chwilą popsucia się wszystkich elementów. Niech $X(t)$ będzie procesem oznaczającym liczbę zepsutych elementów w czasie t . Przyjmijmy, że rozkład początkowy ma postać $[1, 0, 0, 0]$. Narysujemy graf procesu i jego macierz intensywności. Rozwiązując równanie Kołmogorowa wyznaczymy wektor $p(t)$ i rozkład graniczny.

$$[0] \xrightarrow{\lambda} [1] \xrightarrow{\lambda} [2] \xrightarrow{\lambda} [3]$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Układ $p'(t) = p(t) \cdot \Lambda$ zapisujemy po współrzędnych w postaci

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) \\ p'_1(t) = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t) \\ p'_2(t) = \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t) \\ p'_3(t) = \lambda p_2(t) \end{cases}$$

Pochodne transformujemy wg wzoru: $f'(t) \rightarrow s\hat{f}(s) - f(0)$ i otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} s\hat{p}_0(s) - 1 = -\lambda \hat{p}_0(s) \\ s\hat{p}_1(s) = \lambda \hat{p}_0(s) - \lambda \hat{p}_1(s) \\ s\hat{p}_2(s) = \lambda \hat{p}_1(s) - \lambda \hat{p}_2(s) \\ s\hat{p}_3(s) = \lambda \hat{p}_2(s) \end{cases}$$

Rozwiązując otrzymany układ równań wyznaczamy oryginały (retransformaty) na podstawie

zależności $\frac{t^n e^{\alpha t}}{n!} \leftrightarrow \frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}$ (w szczególności $e^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{s + \alpha}$)

$$p_0(t) = e^{-\lambda t} ; p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} ; p_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t} ; p_3(t) = 1 - p_0(t) - p_1(t) - p_2(t)$$

Zauważmy, że prawdopodobieństwo, że w chwili t układ pracuje wynosi $1 - e^{-\lambda t}$.

Prawdopodobieństwa graniczne są równe $\Pi = [0, 0, 0, 1]$.

Rozkład graniczny, ergodyczność dla procesów Markowa.

$$\Pi = p(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t), \quad \Pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$$

Twierdzenie.

Macierz intensywności Λ ma zawsze wartość własną równą 0.

Twierdzenie.

Rozkład graniczny nie zależy od rozkładu początkowego \Leftrightarrow macierz intensywności Λ ma jednokrotną wartość własną równą 0.

(Wtedy odpowiadająca jej macierz stochastyczna jest nierozkładalna).

Twierdzenie.

Jeśli $X(t)$ jest procesem Markowa o skończenie wielu stanach oraz istnieje chwila t taka, że wszystkie wyrazy macierzy przejścia są dodatnie, to istnieją granice prawdopodobieństw przejścia

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j$$

niezależne od stanu wyjściowego i , są dodatnie i mają sumę równą 1. Prawdopodobieństwa te nazywamy prawdopodobieństwami ergodycznymi. Proces Markowa, dla którego istnieją prawdopodobieństwa ergodyczne nazywamy *procesem ergodycznym*.

Twierdzenie.

Jeśli skończona macierz intensywności Λ ma poza przekątną tylko dodatnie elementy to proces ten jest ergodyczny i ma dodatnie prawdopodobieństwa graniczne.

Dwa sposoby wyznaczania rozkładu granicznego określają następujące twierdzenia:

Twierdzenie.

Rozkład graniczny Π jest niezerowym rozwiązaniem układu $\Pi\Lambda = \mathbf{0}$ spełniającym warunek unormowania (suma składowych zero).

Równanie $\Pi\Lambda = \mathbf{0}$ wynika z równania różniczkowego $\frac{d}{dt} p(t) = p(t)\Lambda$, bowiem jeśli istnieje rozkład graniczny to nie zależy on od t zatem jego pochodna po t jest równa zero.

Twierdzenie.

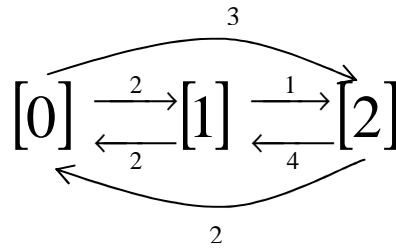
Rozkład graniczny Π można wyznaczyć za pomocą dopełnień algebraicznych M_{kk} elementów z przekątnej macierzy $-\Lambda$:

$$\Pi_j = \frac{M_{jj}}{\sum_k M_{kk}}$$

Przykład.

Narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$



odp. [14/49; 24/49; 11/49]

Proces Poissona.

Proces $\{N(t), t \geq 0\}$ nazywamy **procesem zliczającym** jeśli $N(t)$ oznacza całkowitą liczbę badanych zdarzeń zaobserwowanych do chwili t .

Proces zliczający musi spełniać warunki:

- 1) $N(t) \geq 0$,
- 2) $N(t)$ przyjmuje tylko całkowite wartości,
- 3) Jeśli $s < t$ to $N(s) \leq N(t)$,
- 4) Dla $s < t$ $N(t) - N(s)$ jest równe liczbie zdarzeń zaobserwowanych w przedziale $(s, t]$,

Proces zliczający jest procesem o **przyrostach niezależnych** jeśli rozkłady liczby zdarzeń obserwowanych w rozłącznych przedziałach czasu są niezależne, np. $N(t)$ nie zależy od $N(t+s) - N(t)$.

Uwaga.

Każdy proces o przyrostach niezależnych jest procesem Markowa.

Proces zliczający jest **procesem jednorodnym** (w czasie) gdy rozkład liczby zaobserwowanych zdarzeń w przedziale czasu zależy tylko od długości tego przedziału, np. $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$ ma taki sam rozkład jak $N(t_2) - N(t_1)$.

Proces Poissona jest jednorodnym procesem Markowa o przyrostach niezależnych o rozkładzie.

$$P(X_0 = 0) = 1$$

$$p_k(t) = P(X_t = k) = P(X_{\tau+t} - X_\tau = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$k = 0, 1, \dots$ λ - intensywność procesu, $\lambda > 0$

parametry procesu Poissona:

$$m(t) = \lambda t \quad t \geq 0,$$

$$K(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2),$$

$$\rho(t_1, t_2) = \begin{cases} \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} & \text{dla } t_2 \leq t_1 \end{cases}$$

Uzasadnienie.

Ponieważ $P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ to

$$m(t) = E(X_t) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X_t = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t$$

$$\begin{aligned} E(X_t^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X_t = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= (\lambda t)^2 e^{-\lambda t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = (\lambda t)^2 + \lambda t \end{aligned}$$

Zatem

$$D^2(t) = E(X_t^2) - (E(X_t))^2 = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t$$

Z jednorodności procesu dla $t_1 < t_2$ mamy $X_{t_2} - X_{t_1} = X_{t_2-t_1} - X_0 = X_{t_2-t_1}$, zatem stąd i z niezależności otrzymamy

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E(X_{t_1} \cdot X_{t_2}) = E[X_{t_1} (X_{t_1} + X_{t_2-t_1})] = E(X_{t_1}^2) + E(X_{t_1} \cdot X_{t_2-t_1}) = \\ &= E(X_{t_1}^2) + E(X_{t_1}) \cdot E(X_{t_2-t_1}) \end{aligned}$$

$$R(t_1, t_2) = (\lambda t_1)^2 + \lambda t_1 + \lambda t_1 \cdot \lambda(t_2 - t_1) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2$$

ogólnie

$$R(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & \text{dla } t_2 \leq t_1 \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) = \begin{cases} \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 - \lambda t_1 \lambda t_2 & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 - \lambda t_1 \lambda t_2 & \text{dla } t_2 \leq t_1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \lambda t_1 & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \lambda t_2 & \text{dla } t_2 \leq t_1 \end{cases} = \lambda \min(t_1, t_2) \end{aligned}$$

oraz

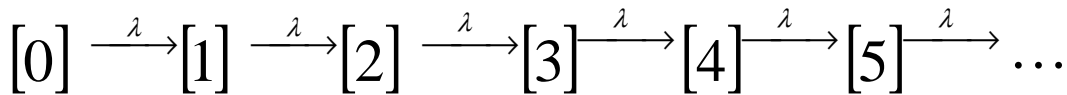
$$\rho(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{D(t_1)D(t_2)} = \begin{cases} \frac{\lambda t_1}{\sqrt{\lambda t_1} \sqrt{\lambda t_2}} & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \frac{\lambda t_2}{\sqrt{\lambda t_1} \sqrt{\lambda t_2}} & \text{dla } t_2 \leq t_1 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} & \text{dla } t_1 < t_2 \\ \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} & \text{dla } t_2 \leq t_1 \end{cases}$$

Zauważmy, że X_{t_2}, X_{t_1} są zawsze dodatnio skorelowane i siła zależności między nimi znacznie spada gdy jedna z chwil jest wielokrotnie większa od drugiej.

Przykłady zjawisk modelowanych procesem Poissona.

- liczba wyemitowanych cząstek przez ciało promieniotwórcze w pewnym przedziale czasu,
- liczba awarii systemu komunikacyjnego promieniotwórcze w pewnym przedziale czasu,
- liczba zgłoszeń do portalu internetowego w pewnym przedziale czasu,

Graf procesu Poissona jest następujący



Macierz intensywności procesu Poissona ma postać

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Przyjmując $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)$ (**wektor rozkładu procesu** w momencie t), to równanie Kołmogorowa $p'(t) = p(t) \cdot \Lambda$ zapisujemy po współrzędnych w postaci

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) \\ p'_1(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda p_0(t) \\ p'_2(t) = -\lambda p_2(t) + \lambda p_1(t) \\ p'_3(t) = -\lambda p_3(t) + \lambda p_2(t) \\ \dots \\ p'_k(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) \\ \dots \end{cases}$$

Przyjmujemy rozkład początkowy $p(0) = (1, 0, 0, \dots)$.
Rozwiązaniem tego układu jest

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

czyli

$$p(t) = \left(e^{-\lambda t}, \frac{\lambda t}{1!} e^{-\lambda t}, \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}, \dots, \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \dots \right)$$

(zauważmy, że suma elementów tego wektora wynosi jeden).

Zatem jednowymiarowy rozkład tego procesu (tzn. rozkład w dowolnej ustalonej chwili t) jest wyznaczony przez rozkład Poissona.

Uzasadnienie.

Sposób I.

Pochodne i funkcje transformujemy wg wzoru: $f'(t) \rightarrow sf(s) - f(0)$, $f(t) \rightarrow \hat{f}(s)$ i otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} s\hat{p}_0(s) - 1 = -\lambda \hat{p}_0(s) \\ s\hat{p}_1(s) = \lambda \hat{p}_0(s) - \lambda \hat{p}_1(s) \\ s\hat{p}_2(s) = \lambda \hat{p}_1(s) - \lambda \hat{p}_2(s) \\ s\hat{p}_3(s) = \lambda \hat{p}_2(s) - \lambda \hat{p}_3(s) \\ \dots\dots \\ s\hat{p}_k(s) = \lambda \hat{p}_{k-1}(s) - \lambda \hat{p}_k(s) \\ \dots\dots \end{cases}$$

Rozwiązujemy otrzymany układ równań. Z pierwszego równania wyznaczamy $\hat{p}_0(s) = \frac{1}{s + \lambda}$ i przez podstawianie wyznaczamy kolejno

$$\hat{p}_1(s) = \frac{\lambda}{(s + \lambda)^2}, \quad \hat{p}_2(s) = \frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^3}, \quad \dots\dots, \quad \hat{p}_k(s) = \frac{\lambda^k}{(s + \lambda)^{k+1}}, \quad \dots\dots$$

Następnie wyznaczamy oryginały (retransformaty) na podstawie zależności

$$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}$$

$$p_0(t) = e^{-\lambda t} ; p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} ; p_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t} ; \dots; p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} ; \dots$$

Sposób II.

Rozpatrujemy funkcję tworzącą wektora rozkładu $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)$

$$\Psi(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) s^k$$

Jeśli pomnożymy poszczególne równania różniczkowe rozpatrywanego układu odpowiednio przez 1, s, s², ..., s^k, ..., i dodamy stronami to otrzymamy zależność

$$\sum_{k=0}^{\infty} p'_k(t) s^k = -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) s^k + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) s^{k+1} = \lambda(s-1) \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) s^k = \lambda(s-1) \Psi(s, t)$$

Ponieważ

$$\frac{\partial \Psi(s,t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} p'_k(t) s^k$$

to porównując powyższe równości otrzymamy równanie różniczkowe

$$\frac{\partial \Psi(s,t)}{\partial t} = \lambda(s-1)\Psi(s,t)$$

z warunkiem początkowym

$$\Psi(s,0) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(0) s^k = 1$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$\Psi(s,t) = e^{\lambda(s-1)t} = e^{\lambda st - \lambda t} = e^{-\lambda t} e^{\lambda st}$$

Rozwijając drugi czynnik w szereg potęgowy otrzymamy

$$\Psi(s,t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t s)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} s^k$$

Lecz $\Psi(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) s^k$, więc porównując współczynniki przy poszczególnych potęgach zmiennej s , otrzymamy jak poprzednio

$$p_0(t) = e^{-\lambda t} ; p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} ; p_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t} ; \dots ; p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} ; \dots$$

Problem.

T_1 - czas pierwszego zgłoszenia,

T_n - czas między $n - 1$ a n -tym zgłoszeniem,

Wyznaczyć rozkład tych zmiennych losowych.

Rozwiązanie.

$\{T_1 > t\}$ oznacza zdarzenie, że nie było zgłoszenia w $[0, t]$,

$$P(T_1 > t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

zatem $P(T_1 < t) = 1 - e^{-\lambda t} = F(t)$ (dystrybuanta rozkładu wykładniczego).

Następnie zauważmy, że z niezależności wynika

$$P(T_2 > t | T_1 = s) = P\{\text{brak zgłoszeń w}(s, s+t] | T_1 = s\} = P\{\text{brak zgłoszeń w}(s, s+t]\} = e^{-\lambda t}$$

Zatem T_2 też ma rozkład wykładniczy i jest niezależny od T_1 .

Itd.

Wniosek.

Odstępy czasu między kolejnymi zmianami stanów w jednorodnym procesie Poissona są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym **rozkładzie wykładniczym**:

$$P(T < t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{dla } t > 0 \end{cases}$$

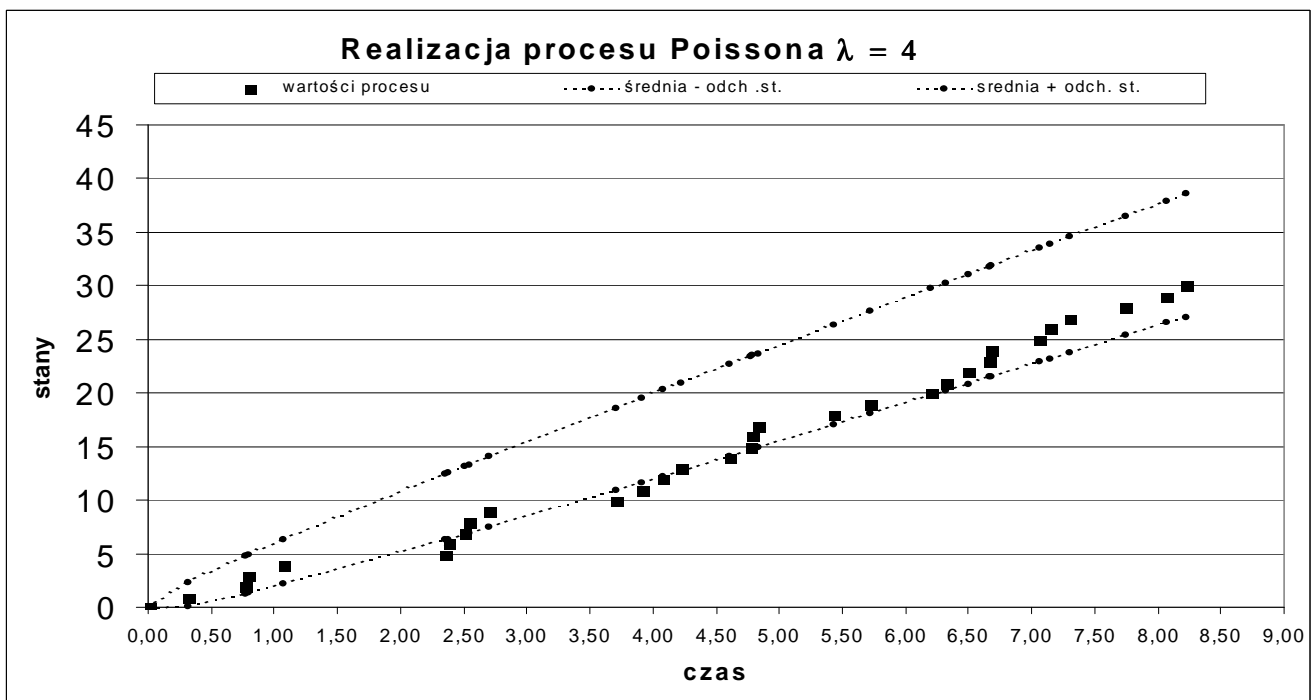
Parametry tego rozkładu to $ET = \frac{1}{\lambda}$, $D^2T = \frac{1}{\lambda^2}$.

Twierdzenie.

Suma skończonej liczby niezależnych procesów Poissona jest procesem Poissona, którego parametr jest sumą parametrów poszczególnych procesów.

Przykładowa realizacja procesu Poissona dla $\lambda = 4$.

czas	stan	$\lambda t - \sqrt{\lambda t}$	$\lambda t + \sqrt{\lambda t}$
0,00	0	0,00	0,00
0,08	1	-0,24	0,91
0,33	2	0,18	2,48
0,41	3	0,36	2,93
0,76	4	1,29	4,77
1,13	5	2,38	6,63
1,29	6	2,90	7,46
1,45	7	3,39	8,20
1,61	8	3,90	8,97
1,64	9	4,01	9,13
1,77	10	4,43	9,76
2,47	11	6,74	13,03
2,85	12	8,03	14,79
3,02	13	8,59	15,54
3,07	14	8,78	15,79
3,61	15	10,63	18,22
3,81	16	11,32	19,12
3,88	17	11,59	19,47
4,00	18	11,99	19,99
4,07	19	12,26	20,33
5,16	20	16,11	25,20
5,88	21	18,67	28,37
5,96	22	18,96	28,73
6,02	23	19,16	28,97
6,39	24	20,50	30,61
6,94	25	22,50	33,03
7,28	26	23,71	34,50
7,41	27	24,18	35,07
7,45	28	24,35	35,27
7,59	29	24,85	35,87
8,11	30	26,74	38,13



Uwaga.

$$p_{ij}(t) = P(X_{\tau+t} = j \mid X_{\tau} = i) = P(X_{\tau+t} - X_{\tau} = j - i) =$$

$$= P(X_t = j - i) = p_{j-i}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} \quad \text{dla } j \geq i,$$

$$p_{ij}(t) = 0 \quad \text{dla } j < i,$$

tzn.

$$P(t) = [p_{ij}(t)] = \begin{bmatrix} e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t} & \dots \\ 0 & e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \dots \\ 0 & 0 & e^{-\lambda t} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Przykład.

Sprawdzić, że dla procesu Poissona zachodzi:

$$p(t) = p(0)P(t)$$

Przykład.

Sprawdzić, że dla procesu Poissona równania Kołmogorowa mają postać:

$$(*) \quad \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = -\lambda p_{i,j}(t) + \lambda p_{i+1,j}(t) \quad \text{dla ustalonego } i$$

(równanie prospektywne)

$$(**) \quad \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \lambda p_{i,j}(t) - \lambda p_{i,j-1}(t) \quad \text{dla ustalonego } j$$

(równanie retrospektywne)

a ich rozwiązaniem jest

$$p_{ij}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}$$

Przykład.

Strumień zgłoszeń do systemu telekomunikacyjnego jest procesem Poissona. Wiadomo, że intensywność tego procesu wynosi $\lambda = 3$ zgł/min.

- a) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najwyżej jednego zgłoszenia w ciągu 30 sekund,
- b) obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia trzech zgłoszeń w ciągu 30 sekund,
- c) obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi zgłoszeniami będzie większy niż 12 sekund.

Rozwiązanie.

Ad. a) 30 sekund to 0,5 minuty, zatem odczytując z tablicy rozkładu Poissona dla $\lambda t = 1,5$ mamy.

$$P(X_{0,5} \leq 1) = P(X_{0,5} = 0) + P(X_{0,5} = 1) = 0,223 + 0,335 = 0,558$$

Ad. b) analogicznie

$$P(X_{0,5} = 3) = 0,126$$

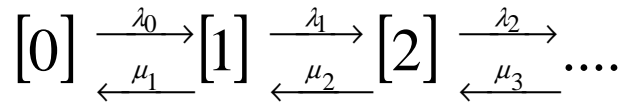
Ad. c) T – czas między zgłoszeniami. Jest to zmienna losowa o rozkładzie wykładniczym. Ponieważ 12 sekund to 0,2 minuty dla $\lambda t = 0,6$ mamy.

$$P(T \geq 0,2) = e^{-0,6} .$$

Proces urodzeń i śmierci.

λ_i - intensywności urodzeń, $i = 0, 1, \dots$

μ_j - intensywności śmierci, $j = 1, 2, \dots$



$p_{ij}(t)$ - prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j po czasie t ,
 $p_{ij}(t)$ mają własności:

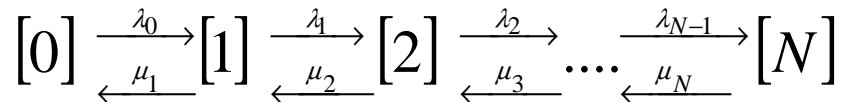
$$\begin{aligned} p_{i,i-1}(t) &= \mu_i t + o(t), \\ p_{i,i+1}(t) &= \lambda_i t + o(t), \\ p_{i,i}(t) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)t + o(t), \\ p_{i,i}(t) &= o(t), \text{ dla } |i - j| > 1 \end{aligned}$$

i spełniają układ równań Kołmogorowa:

$$(*) \quad \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_{i,j}(t) + \mu_{j+1} p_{i,j+1}(t)$$

i warunki początkowe $p_{i,i}(0) = 1$, $p_{i,j}(0) = 0$ dla $i \neq j$.

Dalej rozpatrujemy proces urodzeń i śmierci ze skończoną liczbą stanów $0, 1, \dots, N$.



Niech $P(t) = [p_{ij}(t)]$ stochastyczna macierz przejścia $i, j = 0, 1, \dots, N$.

Proces urodzeń i śmierci jest jednorodnym procesem Markowa.

Dla procesu urodzeń i śmierci macierz intensywności ma postać:

$$\Lambda = [\lambda_{ij}] = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{N-1} & -(\lambda_{N-1} + \mu_{N-1}) & \lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_N & -\mu_N \end{bmatrix}$$

układ równań Kołmogorowa można zapisać w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt} P(t) = P(t) \Lambda$$

Rozwiązanie tego równania ma postać $P(t) = P(0)e^{\Lambda t}$

Gdzie $e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \frac{t^2}{2!} \Lambda^2 + \frac{t^3}{3!} \Lambda^3 + \dots$

Przyjmując $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_N(t))$ (wektor rozkładu procesu w momencie t), to równanie Kołmogorowa $p'(t) = p(t) \cdot \Lambda$ zapisujemy po współrzędnych w postaci

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p'_1(t) = \lambda_0 p_0(t) - (\lambda_1 + \mu_1) p_1(t) + \mu_2 p_2(t) \\ p'_2(t) = \lambda_1 p_1(t) - (\lambda_2 + \mu_2) p_2(t) + \mu_3 p_3(t) \\ \dots \\ p'_N(t) = \lambda_{N-1} p_{N-1}(t) - \mu_N p_N(t) \end{cases}$$

Przyjmujemy rozkład początkowy $p(0) = (1, 0, 0, \dots)$.

Układ równań Kołmogorowa:

$$\frac{d}{dt} p(t) = p(t)\Lambda$$

ma rozwiązanie postaci $p(t) = p(0)e^{\Lambda t}$

gdzie $e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \frac{t^2}{2!} \Lambda^2 + \frac{t^3}{3!} \Lambda^3 + \dots$

Uwaga.

Proces urodzeń i śmierci ma dla intensywności dodatnich rozkład graniczny postaci:

$$\Pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \Pi_0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

gdzie

$$\Pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}}$$

Dowód.

Zastosujmy sposób pierwszy. Rozpatrzmy równanie $\Pi\Lambda = 0$

$$[\Pi_0 \quad \Pi_1 \quad \dots \quad \Pi_N] \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{N-1} & -(\lambda_{N-1} + \mu_{N-1}) & \lambda_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_N & -\mu_N & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

czyli układ równań

$$\begin{cases} -\lambda_0 \Pi_0 + \mu_1 \Pi_1 = 0 \\ \lambda_0 \Pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1) \Pi_1 + \mu_2 \Pi_2 = 0 \\ \lambda_1 \Pi_1 - (\lambda_2 + \mu_2) \Pi_2 + \mu_3 \Pi_3 = 0 \\ \dots \\ \lambda_{N-1} \Pi_{N-1} - \mu_N \Pi_N = 0 \end{cases}$$

Jeśli przyjąć, że $-\lambda_0 \Pi_0 + \mu_1 \Pi_1 = z_1$; $-\lambda_1 \Pi_1 + \mu_2 \Pi_2 = z_2$; itd. to

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 - z_1 = 0 \\ z_3 - z_2 = 0 \\ \dots \\ z_N = 0 \end{cases}$$

stąd $z_i = 0$ i przyjmując Π_0 jako parametr mamy z warunków unormowania poszukiwane wzory.

Uwaga.

Jeśli proces urodzeń i śmierci ma przeliczalną liczbę stanów, to rozkład graniczny jest postaci

$$\Pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \Pi_0, \quad i = 1, 2, \dots$$

gdzie

$$\Pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}}$$

(zakładamy, że szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}$ jest zbieżny).

Przykład.

Niech $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = i\lambda$, $i = 0, 1, \dots$, gdzie $\lambda > 0$, dana stała.

Zbadaj istnienie w tym przypadku prawdopodobieństw granicznych.

Przykład (proces Yule’a).

Jest to proces urodzeń dla którego intensywności urodzeń są równe $\lambda_i = i\lambda$, $i = 0, 1, \dots$.

Przyjmujemy, że $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)$ (wektor rozkładu procesu w momencie t), oraz początkowy $p(0) = (0, 1, 0, 0, \dots)$.

Sprawdź, że równanie Kołmogorowa $p'(t) = p(t) \cdot \Lambda$ ma dla tego procesu postać

$$\begin{cases} p'_0(t) = 0 \\ p'_1(t) = -\lambda p_1(t) \\ p'_2(t) = \lambda p_1(t) - 2\lambda p_2(t) \\ \dots \end{cases}$$

a prawdopodobieństwa

$$p_k(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1} & \text{dla } k > 0 \\ 0 & \text{dla } k = 0 \end{cases}$$

spełniają to równanie.

Przykład.

W zakładzie pracują maszyny, z których każda psuje się niezależnie od pozostałych z intensywnością $\lambda = 3$ maszyny/godz. Maszyny te są naprawiane przez robotników. Niech $X(t)$ oznacza liczbę zepsutych maszyn w chwili t . Rozpatrzmy następujące przypadki:

- 1) są 3 maszyny i 1 robotnik pracujący z intensywnością 1maszyna/godz.
- 2) są 3 maszyny i 2 robotników pracujących bez współpracy z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
- 3) są 4 maszyny i 2 robotników pracujących bez współpracy z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
- 4) są 3 maszyny i 3 robotników pracujących z pełną współpracą z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
- 5) są 3 maszyny i 2 robotników pracujących z pełną współpracą z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
- 6) są 3 maszyny i 2 robotników pracujących z ograniczoną współpracą (z intensywnością 1maszyna/godz. każdy gdy pracują osobno i z intensywnością 1,5maszyny/godz. gdy pracują razem).

W każdym przypadku:

- a) narysować graf,
- b) wyznaczyć prawdopodobieństwa graniczne,
- c) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że żaden robotnik nie pracuje,
- d) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że przynajmniej jedna maszyna jest sprawna,
- e) obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że przynajmniej jedna maszyna czeka na naprawę,
- f) obliczyć średnia liczbę zepsutych maszyn,
- g) obliczyć średnia liczbę zajętych robotników.

ZADANIA

Zadanie 1.

Narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

Obliczyć graniczną wartość oczekiwaną i graniczną wariancję.

Zadanie 2.

Proces Markowa jest określony grafem

$$[0] \xleftarrow{4} [1] \xrightarrow{2} [2]$$

Wyznaczyć jego macierz intensywności i równania Kołmogorowa.

Wyznaczyć wektor $p(t)$ dla rozkładu początkowego $(0, 1, 0)$.

Wyznaczyć rozkład graniczny.

Po jakim czasie $p_0(t)$ osiągnie wartość 0,25?

Czy kiedykolwiek $p_0(t) = p_2(t)$?

Zadanie 3.

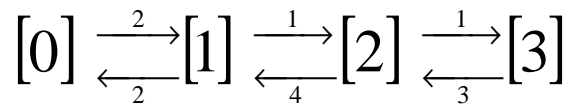
Przyjmując, że proces ma stany 0, 1, 2, 3; narysować graf i wyznaczyć rozkład graniczny procesu Markowa o macierzy intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Wypisać równania Kołmogorowa tego procesu. Obliczyć graniczną wartość oczekiwaną i graniczną wariancję.

Zadanie 4.

Proces Markowa jest określony grafem



Wyznaczyć jego macierz intensywności i równania Kołmogorowa.

Wyznaczyć rozkład graniczny tego procesu. Obliczyć graniczną wartość oczekiwaną i graniczną wariancję.

Zadanie 5.

Sprawdź, że jeśli proces Markowa ma macierz intensywności:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -a & a \\ b & -b \end{bmatrix}$$

gdzie $a, b, a + b > 0$

to jego macierz prawdopodobieństw przejść jest równa

$$P(t) = \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b + ae^{(-a-b)t} & a - ae^{(-a-b)t} \\ b - be^{(-a-b)t} & a + be^{(-a-b)t} \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć wektor $p(t)$ dla rozkładu początkowego $(1, 0)$.

Wyznaczyć rozkład graniczny.

Zadanie 6.

Strumień awarii pewnego systemu jest modelowany procesem Poissona. Wiadomo, że przeciętnie jedna awaria zdarza się raz na 20 godzin.

- obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia dokładnie jednej awarii w ciągu 10 godzin,
- obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia najwyżej dwóch awarii w ciągu 10 godzin,
- obliczyć prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy w ciągu 10 godzin,
- obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi awariami będzie większy niż 20 godzin,
- obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi awariami będzie większy niż 10 godzin i mniejszy od 20 godzin,
- obliczyć wartość oczekiwaną bezawaryjnego czasu pracy tego systemu.

Zadanie 7.

Strumień zgłoszeń do systemu telekomunikacyjnego jest procesem Poissona. Wiadomo, że intensywność tego procesu wynosi $\lambda = 3$ zgł/min.

- obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia co najwyżej jednego zgłoszenia w ciągu 30 sekund,
- obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia trzech zgłoszeń w ciągu 30 sekund,
- obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi zgłoszeniami będzie większy niż 12 sekund,
- ile sekund wynosi średni czas oczekiwania na pierwsze zgłoszenie?

Zadanie 8.

Wyznaczyć parametry i narysować przykładowa realizację procesu

$$Z(t) = X(t) - \lambda t$$

gdzie $X(t)$ jest jednorodnym procesem Poissona o intensywności λ .

Zadanie 9.

Sprawdź, że macierz prawdopodobieństw przejścia procesu przełączania między stanami $\{-1, 1\}$ generowanego procesem Poissona, tzn. procesu

$$Z(t) = Z(0)(-1)^{X(t)}, \quad t \geq 0$$

gdzie $X(t)$ jest jednorodnym procesem Poissona o intensywności λ ma postać

$$P(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda t}) & \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda t}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda t}) & \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda t}) \end{bmatrix}$$

Zadanie 10.

W zakładzie pracują maszyny, z których każda psuje się niezależnie od pozostałych z intensywnością $\lambda = 3$ maszyny/godz. Maszyny te są naprawiane przez robotników. Niech $X(t)$ oznacza liczbę zepsutych maszyn w chwili t . Rozpatrzmy następujące przypadki:

- są 3 maszyny i 1 robotnik pracujący z intensywnością 1maszyna/godz.
- są 3 maszyny i 2 robotników pracujących bez współpracy z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
- są 4 maszyny i 2 robotników pracujących bez współpracy z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
- są 3 maszyny i 3 robotników pracujących z pełną współpracą z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
- są 3 maszyny i 2 robotników pracujących z pełną współpracą z intensywnością 1maszyna/godz. każdy.
- są 3 maszyny i 2 robotników pracujących z ograniczoną współpracą (z intensywnością 1maszyna/godz. każdy gdy pracują osobno i z intensywnością 1,5maszyny/godz. gdy pracują razem).

W każdym przypadku:

- narysować graf,
- wyznaczyć prawdopodobieństwa graniczne,
- obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że żaden robotnik nie pracuje,
- obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że przynajmniej jedna maszyna jest sprawna,
- obliczyć prawdopodobieństwo graniczne, że przynajmniej jedna maszyna czeka na naprawę,
- obliczyć średnia liczbę zepsutych maszyn,
- obliczyć średnia liczbę zajętych robotników.