

PROBABILISTYKA I STATYSTYKA - Zadania do oddania

Parametr k = liczba trzycyfrowa, dwie ostatnie cyfry to dwie ostatnie cyfry numeru indeksu, pierwsza cyfra to pierwsza cyfra liczby liter pierwszego imienia.

Poszczególne zadania oddajemy na oddzielnych kartkach!

Należy wypełnić załączoną stronę tytułową i w części 2 dodatkową, wpisując wskazane wyniki.

Zadanie 1

W skrzyni jest k detali wyprodukowanych w zakładzie A, $2k$ detali wyprodukowanych w zakładzie B i $5k$ detali wyprodukowanych w zakładzie C. Wadliwość produkcji poszczególnych zakładów wynosi odpowiednio: $0,01k\%$, $0,05k\%$ i $0,02k\%$.

- Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany detal okaże się dobry,
- Wylosowany detal okazał się wadliwy jakie jest prawdopodobieństwo, że wyprodukował go zakład B?

Zadanie 2

Zmienna losowa X ma rozkład określony funkcją prawdopodobieństwa:

x_k	-1	0	$0,01k$
p_k	$\frac{1}{0,1k}$	$\frac{0,1k-3}{0,1k}$	$\frac{2}{0,1k}$

- wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej losowej i naszkicować jej wykres,
- obliczyć $P(X > 0)$, $P(X \geq 0)$, $P(X < 1)$, $P(|X| \geq 1)$,
- obliczyć EX , D^2X .

Zadanie 3.

X jest zmienną losową o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{dla } x \in [-0,01k-2; -0,01k-1] \cup [0,01k+2; 0,01k+4] \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases}$$

- wyznaczyć c ,
- wyznaczyć dystrybuantę,
- obliczyć $P(-0,01k-1,5 \leq X \leq 0,01k+3)$ i zinterpretować na wykresie gęstości,
- obliczyć EX , D^2X .

Zadanie 4

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony tabelą:

Y	-1	0
X		
1	$\frac{1}{0,1k}$	$\frac{2}{0,1k}$
0	$\frac{1}{0,1k}$	$\frac{0,1k-4}{0,1k}$

- Wyznaczyć macierz kowariancji,
- Obliczyć współczynnik korelacji między tymi zmiennymi.
- Czy X , Y są skorelowane? Czy X , Y są niezależne?

Zadanie 5

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony tabelą:

Y X	0	1	2
-1	0	0	$\frac{1}{0,1k}$
0	$\frac{2}{0,1k}$	$\frac{2}{0,1k}$	$\frac{0,1k - 8}{0,1k}$
1	$\frac{2}{0,1k}$	0	$\frac{1}{0,1k}$

- wyznaczyć $F(1; 2)$,
- obliczyć $P(|X| \geq 1; |Y| \leq 1)$,
- Wyznacz rozkład zmiennej losowej X.
- Wyznacz rozkład zmiennej losowej Y.
- wyznacz rozkładów warunkowych $X|Y=1; Y|X=0$,
- Obliczyć współczynnik korelacji między tymi zmiennymi.
- Czy X, Y są skorelowane? Czy X, Y są niezależne?

Zadanie 6

Zmienna losowa (X, Y) ma macierz kowariancji:

$$K = \begin{bmatrix} 4 & -0,005k \\ -0,005k & 16 \end{bmatrix}$$

Ile wynosi współczynnik korelacji między X i Y?

Zadanie 7.

Zmienna losowa X ma rozkład $N(-k; 0,1 \cdot k)$.

Obliczyć:

- $P(X > -0,9 \cdot k)$,
- $P(X < -0,95 \cdot k)$,
- $P(|X + k| < 0,15k)$

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

Zadanie 8.

Zmienna losowa X ma rozkład $N(-k; 0,01 \cdot k)$.

Wyznaczyć x aby:

- $P(X > x) = 0,98$,
- $P(X < x) = 0,01$,
- $P(|X + k| > x) = 0,05$.

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

Zadanie 9.

- a) Zmienna losowa X ma rozkład $N(k; 0,1 \cdot k)$. Obliczyć $P(0,9k < \bar{X}_9 < 0,95k)$,
 - b) Zmienna losowa X ma rozkład $N(m; 0,01 \cdot k)$. Obliczyć $P(S_{10}^2 < 0,02k)$,
 - c) Zmienna losowa X ma rozkład $N(k; 0,01 \cdot k)$. Obliczyć $P(S_{10}^{0,2} > 0,03k)$,
 - d) Zmienna losowa X ma rozkład $N(-0,1k; \sigma)$. $S_{10}^2 = 25$. Obliczyć $P(\bar{X}_{10} < 0,85k)$.
- Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresach odpowiednich gęstości.

Zadanie 10A.

Cecha X ma rozkład $N(m; \sigma)$. Dokonano 10 pomiarów tej cechy i obliczono, że $\bar{x} = k$, $s = 0,1 \cdot k$. Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0,98$

- a) Oszacować przedziałem ufności parametr m ,
- b) Wyznaczyć błąd względny tego oszacowania,
- c) Jak liczna powinna być próba aby błąd względny wynosił $0,01 \cdot k\%$?

Zadanie 10B.

Cecha X ma rozkład $N(m; 0,1 \cdot k)$. Dokonano 9 pomiarów tej cechy i obliczono, że $\bar{x} = k$. Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0,9 + 0,0001 \cdot k$

- a) Oszacować przedziałem ufności parametr m ,
- b) Wyznaczyć błąd względny tego oszacowania,
- c) Jak liczna powinna być próba aby błąd względny wynosił $0,01 \cdot k\%$?

Zadanie 10C.

Dokonano 120 pomiarów badanej cechy X i obliczono, że $\bar{x} = k$, $s = 0,5 \cdot k$. Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 1 - 0,0001 \cdot k$

- a) Oszacować przedziałem ufności parametr m ,
- b) Wyznaczyć błąd względny tego oszacowania,
- c) Jak liczna powinna być próba aby błąd względny wynosił $0,01 \cdot k\%$?

Zadanie 10D.

W losowo wybranej próbie $100 + |k - 500|$ wyborców, $10 + |k - 500|$ osób zadeklarowało udział w zbliżających się wyborach. Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0,94$

- a) Oszacować przedziałem ufności procent wszystkich uprawnionych osób, które wezmą udział w zbliżających się wyborach,
- b) Wyznaczyć błąd względny tego oszacowania,
- c) Jak liczna powinna być próba aby błąd względny wynosił 3% ?

Zadanie 11.

Cecha X ma rozkład $N(m; \sigma)$. Dokonano 10 pomiarów tej cechy i obliczono, że $s = 0,01 \cdot k$. Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0,95$
Oszacować przedziałem ufności parametr σ ,

Zadanie 12A.

W losowo wybranej próbie $100 + |k - 500|$ wyborców, $10 + |k - 500|$ osób zadeklarowało udział w zbliżających się wyborach.

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,04$ sprawdzić hipotezę, że 50,1% ogółu wyborców weźmie udział w zbliżających się wyborach.
- Błąd którego rodzaju możemy popełnić podejmując decyzję dotyczącą rozpatrywanych hipotez,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności,

Zadanie 12B.

Cecha X ma rozkład $N(m; 0,1k)$. Dokonano 9 pomiarów tej cechy i obliczono, że $\bar{x} = k$.

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,0001 \cdot k$ sprawdzić hipotezy $H_0(m = 0,94 \cdot k)$, $H_1(m > 0,94 \cdot k)$
- Błąd którego rodzaju możemy popełnić podejmując decyzję dotyczącą powyższych hipotez,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności,

Zadanie 12C.

Cecha X ma rozkład $N(m; \sigma)$. Dokonano 10 pomiarów tej cechy i obliczono, że $\bar{x} = k$, $s = 0,1 \cdot k$.

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,02$ sprawdzić hipotezy $H_0(m = 0,94 \cdot k)$, $H_1(m \neq 0,94 \cdot k)$
- Błąd którego rodzaju możemy popełnić podejmując decyzję dotyczącą powyższych hipotez,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności,

Zadanie 12D.

Dokonano 120 pomiarów badanej cechy X i obliczono, że $\bar{x} = k$, $s = 0,5 \cdot k$.

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,0001 \cdot k$ sprawdzić hipotezy $H_0(m = 1,05 \cdot k)$, $H_1(m < 1,05 \cdot k)$
- Błąd którego rodzaju możemy popełnić podejmując decyzję dotyczącą powyższych hipotez,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności,

Zadanie 12E.

Cecha X ma rozkład $N(m; \sigma)$. Dokonano 10 pomiarów tej cechy i obliczono, że $s^2 = 0,01 \cdot k + 1$.

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ sprawdzić hipotezy $H_0(\sigma^2 = 0,01 \cdot k)$, $H_1(\sigma^2 > 0,01 \cdot k)$,
- Błąd którego rodzaju możemy popełnić podejmując decyzję dotyczącą powyższych hipotez,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności,

Zadanie 13A.

Badano wydatki na oświatę (w zł) dorosłych mieszkańców Warszawy i Krakowa.

Dokonano 120 pomiarów badanej cechy w Krakowie i obliczono, że $\bar{x} = 0,95k$, $s = 0,5 \cdot k$.

Dokonano 180 pomiarów badanej cechy w Warszawie i obliczono, że $\bar{x} = 1,05k$, $s = 0,5 \cdot k$.

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,0001 \cdot k$ sprawdzić czy wydatki na oświatę dorosłych ogółu mieszkańców Warszawy i Krakowa są takie same,
- Błąd którego rodzaju możemy popełnić podejmując decyzję dotyczącą powyższych hipotez,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności,

Zadanie 13B.

Badano poparcie osób dorosłych dla wprowadzenia kary śmierci w Polsce i w Czechach. W losowo wybranych próbach liczących po $100 + |k - 500|$ osób dorosłych w tych krajach, $10 + |k - 500|$ osób w Polsce i $15 + |k - 500|$ w Czechach zadeklarowało takie poparcie.

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,0001 \cdot k$ sprawdzić czy poparcie ogółu osób dorosłych dla wprowadzenia kary śmierci w Polsce i w Czechach jest takie samo.
- Błąd którego rodzaju możemy popełnić podejmując decyzję dotyczącą powyższych hipotez,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności,

Zadanie 14.

Przez k dni rejestrowano w pewnym mieście liczbę zabójstw:

Liczba zabójstw	0	1	2	3	4
Liczba dni	$k - 80$	55	15	8	2

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ sprawdzić hipotezę, że dobową liczbę zabójstw w tym mieście ma rozkład Poissona,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności,

Zadanie 15.

Pewien produkt można wytworzyć dwiema metodami produkcji. Wysłano hipotezę, że wydajność produkcji nie zależy od metody produkcji. Wylosowano niezależnie próbę k sztuk wyrobu i otrzymano następujące wyniki badania jakości dla poszczególnych metod:

JAKOŚĆ	METODA PRODUKCJI	
	I	II
DOBRA	40	20
ZŁA	10	$k - 70$

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,1$ sprawdzić hipotezę o niezależności jakości produkcji od metody produkcji,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności.

Uwaga.

Z zadań 10 A, B, C, D wybieramy tylko jedno.

Z zadań 12 A, B, C, D, E wybieramy tylko jedno.

Z zadań 13 A, B wybieramy tylko jedno.

Z serii zadań 1 – 8 należy oddać przynajmniej 5 zadań.

Z serii zadań 9 – 15 należy oddać przynajmniej 5 zadań.

.....
data

Zadania Cz. I **PROBABILISTYKA i STATYSTYKA**

.....
Imię

.....
Nazwisko

.....
grupa

.....
nr indeksu

.....
k

ZADANIE	ODPOWIEDZI DO WSKAZANYCH PODPUNKTÓW
1a	
1b	
2b	
2c	
3 c	
3 d	
4 b	
5 b	
5 f	
6	
7 a	
7 c	
8 a	
8 b	

.....
data

Zadania Cz. II PROBABILISTYKA i STATYSTYKA

.....
Imię

.....
Nazwisko

.....
grupa

.....
nr indeksu

.....
k

ZADANIE	ODPOWIEDZI DO WSKAZANYCH PODPUNKTÓW
9a 9b	
10A a 10A c	
10B a 10B c	
10C a 10C c	
10D a 10D c	
11	
12A Decyzja 12A c	

12B Decyzja 12B c	
12C Decyzja 12C c	
12D Decyzja 12D c	
12E Decyzja 12E c	
13A Decyzja 13A c	
13B Decyzja 13B c	
14 Decyzja 14 b	
15 Decyzja 15 b	