

NIEZAWODNOŚĆ

Zakładamy, że obiekt jest prosty (nie wnikamy w strukturę) i nieodnawialny.

T-zmienna losowa oznaczająca zdatność (trwałość) obiektu czyli czas do jego uszkodzenia.

Można przyjmować, że jest to proces ciągły w czasie wartościach 0 i 1.

Funkcje niezawodności.

Dystrybuanta $F(t)$ zmiennej losowej T

$$F(t) = P\{T < t\}$$

Funkcja niezawodności $R(t)$ - prawdopodobieństwo, że czas do uszkodzenia obiektu jest większy od t

$$R(t) = P\{T \geq t\}$$

Gęstość zmiennej losowej T

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t)$$

Funkcja $\lambda(t)$ intensywności uszkodzeń

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Funkcja wiodąca $\Lambda(t)$ (wyczerpywanie się „zapasu niezawodności”)

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$$

Warunkowa funkcja niezawodności $R_t(\tau)$ –prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia, że obiekt zachowa stan zdatności jeszcze przez czas co najmniej τ pod warunkiem, że do chwili t nie doszło do uszkodzenia.

$$R_t(\tau) = \frac{P\{T \geq t + \tau\}}{P\{T \geq t\}} = \frac{R(t + \tau)}{R(t)}$$

Wartość oczekiwana $E(T)$ zmiennej losowej T .

Wariancja $D^2(T)$ zmiennej losowej T

Kwantyl rzędu p zmiennej losowej T oznaczamy t_p (chwila, dla której $F(t)$ osiąga wartość p):

$$F(t_p) = p$$

Typowe rozkłady czasów zdatności:

Rozkład wykładniczy

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

$$R(t) = e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

$$\lambda(t) = \lambda, t \geq 0$$

$$\Lambda(t) = \lambda t, t \geq 0$$

,

$$R_t(\tau) = e^{-\lambda \tau}, t \geq 0$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \quad D^2(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

transformata Laplace'a gęstości $f^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$

Inne rozkłady:

Rozkład Erlanga,

Rozkład gamma,

Rozkład Weibullaa,

Rozkład Rayleigh'a,

Rozkład normalny,

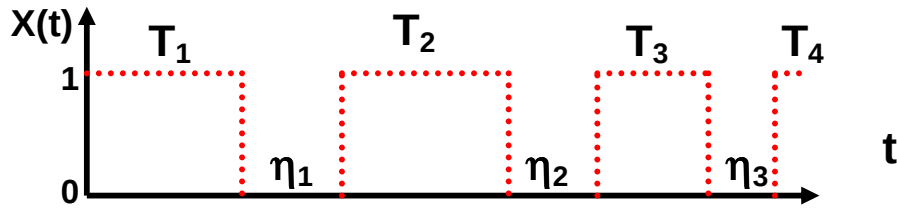
Rozkład normalny ucięty,

Rozkład logarytmiczno-normalny,

Rozkład potęgowy,

Rozkład mieszaniny,

Obiekty proste odnawialne z niezerowym czasem odnowy.



$N_1(t)$ **strumień uszkodzeń**

$N_2(t)$ **strumień odnowień**

Zmienne T_i są zmiennymi losowymi oznaczającymi kolejne czasy poprawnej pracy obiektu określone dystrybuantą $F(t)$, gęstością $f(t)$, transformatą Laplace'a $f^*(s)$, wartością oczekiwaną θ_1 oraz odchyleniem standardowym σ_1 .

Zmienne η_i są zmiennymi losowymi oznaczającymi kolejne czasy odnow obiektu określone dystrybuantą $G(t)$, gęstością $g(t)$, transformatą Laplace'a $g^*(s)$, wartością oczekiwaną θ_2 oraz odchyleniem standardowym σ_2 .

Zmienna losowa τ_r jest sumą zmiennych losowych oznaczających czas poprawnej r-tej pracy obiektu i czas r-tej odnowy obiektu.

$$\tau_r = T_r + \eta_r$$

Zmienne losowe $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ mają identyczny rozkład o dystrybuancie $\Phi(t)$ i gęstości

$$\varphi(t) = \frac{d}{dt} \Phi(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx$$

Zatem
$$\varphi^*(s) = f^*(s) \cdot g^*(s) \quad (\text{tw. Borela})$$

Charakterystyki procesu odnowień $N_2(t)$

Czas t_r'' do r-tej odnowy
$$t_r'' = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_r$$

Ma dystrybuantę
$$\Phi_r(t) = L^{-1}\{\Phi_r^*(s)\}$$

i gęstość
$$\varphi_r(t) = L^{-1}\{\varphi_r^*(s)\}$$

* oznacza transformatę Laplace'a, L^{-1} oznacza retransformatę.

gdzie

$$\varphi_r^*(s) = \left(\varphi^*(s)\right)^r = \left(f^*(s) \cdot g^*(s)\right)^r$$

$$\Phi_r^*(s) = \frac{1}{s} \varphi_r^*(s) = \frac{1}{s} \left(f^*(s) \cdot g^*(s)\right)^r$$

dla czasów odpowiednio dużych ($t \rightarrow \infty$) zmienna losowa t_r dąży do rozkładu normalnego

$$N\left(r \cdot (\theta_1 + \theta_2), \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \cdot r}\right)$$

Dla dużych t (duża liczba odnowień) proces $N_2(t)$ dąży do

$$N\left(\frac{t}{\theta_1 + \theta_2}, \frac{\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \cdot t}}{(\theta_1 + \theta_2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Funkcja odnowy $H_2(t)$ – oczekiwana liczba odnowień do chwili t

$$H_2(t) = E(N_2(t))$$

gdzie

$$H_2(t) = L^{-1}\{H_2^*(s)\} \quad H_2^*(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{f^*(s) \cdot g^*(s)}{1 - f^*(s) \cdot g^*(s)}$$

Gęstość odnowy $h_2(t)$

$$h_2(t) = L^{-1}\{h_2^*(s)\}$$

gdzie

$$h_2^*(s) = \frac{f^*(s) \cdot g^*(s)}{1 - f^*(s) \cdot g^*(s)}$$

Charakterystyki procesu uszkodzeń $N_1(t)$ wyznaczamy analogicznie.

Dla dużych t (odpowiednio duża liczba uszkodzeń) proces $N_1(t)$ dąży do

$$N\left(\frac{t}{\theta_1 + \theta_2}, \frac{\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \cdot t}}{(\theta_1 + \theta_2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Funkcja uszkodzeń $H_1(t)$ – oczekiwana liczba uszkodzeń do chwili t

$$H_1(t) = E\{N_1(t)\}$$

gdzie

$$H_1(t) = L^{-1}\{H_1^*(s)\} \quad H_1^*(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{f^*(s)}{1 - f^*(s) \cdot g^*(s)}$$

Gęstość uszkodzeń $h_1(t)$

$$h_1(t) = L^{-1}\{h_1^*(s)\}$$

gdzie

$$h_1^*(s) = \frac{f^*(s)}{1 - f^*(s) \cdot g^*(s)}$$

Charakterystyki łączne

Współczynnik gotowości $k_g(t)$ - prawdopodobieństwo poprawnej pracy obiektu w chwili t

$$k_g(t) = P\{X(t) = 1\}$$

$$k_g(t) = 1 - F(t) + \int_0^t h_2(u)[1 - F(t-u)]du$$

oraz

$$k_g(t) = L^{-1}\{k_g^*(s)\}$$

gdzie

$$k_g^*(s) = \frac{1}{s} [1 - f^*(s)] [1 - h_2^*(s)] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1 - f^*(s)}{1 - f^*(s) \cdot g^*(s)}$$

Dla dużych t otrzymujemy:

$$K_g = \lim_{t \rightarrow \infty} k_g(t) = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \cdot \int_0^{\infty} [1 - F(u)]du$$

Lecz

$$\int_0^{\infty} [1 - F(u)]du = \theta_1$$

czyli

$$K_g = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}$$

$P(t, t+\tau)$ – prawdopodobieństwo tego, że w przedziale $(t, t+\tau)$ nie będzie uszkodzenia

$$P(t, t+\tau) = 1 - F(t+\tau) + \int_0^t h_2(x)[1 - F(t+\tau-x)]dx$$

a dla dużych t (korzystając z tw. Smitha) otrzymujemy charakterystykę graniczną

$$P(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t, t+\tau) = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \int_{\tau}^{\infty} [R(y)]dy$$

WYBRANE ROZKŁADY PRAWDOPODOBIENSTWA ZWIĄZANE Z NIEZAWODNOŚCIĄ

Rozkład dwumianowy

Dla danych $p \in (0, 1)$, $n \in N$ określamy funkcję prawdopodobieństwa

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{gdzie } q = 1 - p$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Zauważmy, że gdy $n = 1$ to rozkład dwumianowy jest rozkładem zerojedynkowym.

Jeśli przyjmiemy, że n oznacza liczbę niezależnych doświadczeń z których każde kończy się jednym z dwóch wyników: „sukcesem” (z prawdopodobieństwem p w każdym doświadczeniu) lub „porażką” i zmienna losowa X oznacza liczbę „sukcesów” to powyższy wzór wyznacza **prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie k sukcesów w n doświadczeniach** (próbach).

Przykład

Prawdopodobieństwo uszkodzenia kserokopiarki przed upływem gwarancji wynosi 0,2. Firma zakupiła 6 kserokopiearek. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przed upływem gwarancji 2 kserokopiarki ulegną uszkodzeniu. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba uszkodzonych kserokopiearek przed upływem gwarancji.

X – liczba uszkodzonych kserokopiearek przed upływem gwarancji,

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} 0,2^2 0,8^4 = 15 \cdot 0,04 \cdot 0,4096 = 0,24576$$

Uwaga

Funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X można przedstawić w tabelce:

x_k	0	1	2	3	4	5	6
p_k	0,2621	0,3932	0,2458	0,0819	0,0154	0,0015	0,0001

Zauważmy, że najbardziej prawdopodobną liczbą uszkodzonych kserokopiearek jest 1.

Przykład

Obliczmy wartość oczekiwaną rozkładu dwumianowego.

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np \end{aligned}$$

Wariancja rozkładu dwumianowego wynosi

$$D^2 X = npq$$

Rozkład Poissona

Dla $\lambda > 0$ określamy funkcję prawdopodobieństwa

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(wartości tych prawdopodobieństw zawiera tablica rozkładu Poissona)

Rozkład Poissona (możliwość odczytu w tablicy) może dla dużych n (praktycznie $n \geq 30$) i małych p (praktycznie $p \leq 0,2$) przybliżać rozkład dwumianowy (przybliżenie Poissona)

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{gdzie } \lambda = n \cdot p$$

Oszacowanie błędu przybliżenia:

$$\sup_k \left| \binom{n}{k} p^k q^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leq \frac{2\lambda^2}{n}$$

Przykład

W pudełku jest 400 żarówek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród nich jest 5 żarówek wadliwych, jeśli wadliwość produkcji takich żarówek wynosi 0,5%?

Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba uszkodzonych żarówek w tym pudełku?

Zastosujemy przybliżenie Poissona, $\lambda = n \cdot p = 400 \cdot 0,005 = 2$.

W tablicy rozkładu Poissona odczytamy, że:

$$P(X = 5) = 0,0361$$

Również w tablicy rozkładu Poissona odczytamy, że najbardziej prawdopodobna liczba uszkodzonych żarówek w tym pudełku to 1 lub 2 (dla obu tych liczb prawdopodobieństwo jest równe 0,2707).

Parametry:

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^s}{s!} e^{-\lambda} = \lambda$$

$$D^2 X = \lambda$$

Uwaga

Jeśli X_t jest zmienną losową oznaczającą liczbę wystąpień ustalonego zdarzenia w przedziale czasu $[0, t]$ to przy typowych założeniach

$$P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad k = 0, 1, \dots$$

$$EX_t = \lambda t \quad D^2 X_t = \lambda t$$

Przykład

Badamy awaryjność pewnego urządzenia. Na podstawie wielokrotnych obserwacji ustalono, że średnia liczba awarii na godzinę wynosi 0,01. Wtedy prawdopodobieństwo, że w ciągu 100 godzin wystąpi jedna awaria będzie równe

$$P(X_{100} = 1) = \frac{(0,01 \cdot 100)^1}{1!} e^{-0,01 \cdot 100} = 0,367879 \quad (\text{odczyt z tablicy})$$

Rozkład wykładniczy

Rozkład ten występuje często w zagadnieniach rozkładu czasu między zgłoszeniami (awariami) lub czasu oczekiwania na obsługę w systemach kolejkowych.

Gęstość rozkładu wykładniczego o parametrze $a > 0$ ma postać

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

dystrybuantą tego rozkładu jest funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(uzasadnienie: $F'(x) = f(x)$)

Przykład

Obliczmy EX

$$EX = \int_0^{\infty} xae^{-ax} dx = \left(-xe^{-ax} - \frac{1}{a}e^{-ax} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a}$$

podobnie

$$D^2 X = \frac{1}{a^2}$$

Własność.

- 1) Jeśli liczba zgłoszeń w systemie kolejkowym w przedziale czasu $(t, t + T)$ ma rozkład Poissona o parametrze λT , oraz liczby zgłoszeń przychodzące w rozłącznych przedziałach czasu są niezależne to czas X między kolejnymi zgłoszeniami ma rozkład wykładniczy o parametrze $a = 1/\lambda$.
- 2) Dla dowolnych $t, T > 0$ mamy
 $P(X \geq t + T \mid X \geq t) = P(X \geq T)$ (własność braku pamięci)

Uzasadnienie.

$$\begin{aligned}P(X \geq t + T \mid X \geq t) &= \frac{P(X \geq t + T \wedge X \geq t)}{P(X \geq t)} = \frac{P(X \geq t + T)}{P(X \geq t)} = \\&= \frac{e^{-(t+T)a}}{e^{-ta}} = e^{-Ta} = P(X \geq T)\end{aligned}$$

Jest to jedyny rozkład ciągły o tej własności.

Wykładniczy rozkład czasu do uszkodzenia występuje najczęściej gdy uszkodzenie następuje wskutek działania czynników zewnętrznych.

Dyskretnym odpowiednikiem rozkładu wykładniczego jest rozkład geometryczny.

Przykład

Badamy awaryjność pewnego urządzenia. Na podstawie wielokrotnych obserwacji ustalono, że średni czas między awariami wynosi 10 godzin.

Prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi awariami będzie większy od 10 godzin będzie równe

$$P(X > 10) = 1 - F(10) = e^{-0,1 \cdot 10} = e^{-1} = 0,367879 \quad (\text{odczyt z tablicy})$$

Prawdopodobieństwo, że czas między kolejnymi awariami będzie większy od 20 godzin będzie równe

$$P(X > 20) = 1 - F(20) = e^{-0,1 \cdot 20} = e^{-2} = 0,135335 \quad (\text{odczyt z tablicy})$$

Rozkład Weibulla.

Rozkład wykładniczy modeluje niezawodność o stałej intensywności uszkodzeń. Ogólniejszy model w 1951 roku zaproponował W. Weibull analizując trwałość wyrobów.

Wprowadzenie.

Dyskretnym odpowiednikiem rozkładu wykładniczego jest **rozkład geometryczny**.

X – czas (dyskretny) do **pierwszego** uszkodzenia,

p – prawdopodobieństwo uszkodzenia w jednym okresie (**stała niezależna od czasu**),

Funkcja prawdopodobieństwa tego rozkładu ma postać

$$P(X = t) = p(1 - p)^{t-1} \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

Uzasadnienie

Niech A_i – zdarzenie polegające na uszkodzeniu urządzenia w i -tym okresie

$$P(X = t) = P(A_1')P(A_2') \cdots P(A_{t-1}')P(A_t) = p(1 - p)^{t-1}$$

Jest to dobrze określony rozkład bo

$$\sum_{t=1}^{\infty} P(X = t) = \sum_{t=1}^{\infty} p(1 - p)^{t-1} = p \sum_{t=1}^{\infty} (1 - p)^{t-1} = p \frac{1}{1 - (1 - p)} = 1$$

Parametry

$$\text{Wartość oczekiwana} \quad EX = m = \frac{1}{p}$$

$$\text{Wariancja} \quad D^2 X = \sigma^2 = \frac{q}{p^2}$$

Własność (**brak pamięci**).

$$P(X > t + \tau | X > t) = \frac{P(X > t + \tau)}{P(X > t)} = (1 - p)^\tau \quad (\text{nie zależy od } t)$$

Uzasadnienie

$$\begin{aligned} P(X > k) &= \sum_{i=k+1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = p(1-p)^k \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = \\ &= p(1-p)^k \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{\infty} p(1-p)^i = (1-p)^k \end{aligned}$$

Zatem

$$P(X > t + \tau | X > t) = \frac{P(X > t + \tau)}{P(X > t)} = \frac{(1-p)^{t+\tau}}{(1-p)^t} = (1-p)^\tau$$

Podstawową zasadą prowadzącą do rozkładu wykładniczego jest własność: prawdopodobieństwo zdarzenia w krótkim czasie Δt jest w przybliżeniu równe $\lambda \Delta t = \frac{\lambda t}{n}$ gdzie λ jest średnią liczbą zdarzeń na jednostkę czasu i nie zależy od numeru tego przedziału. Zatem prawdopodobieństwo braku sukcesu w n takich przedziałach jest równe

$$\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n$$

i dąży przy n rosnącym do nieskończoności do $e^{-\lambda t}$ co daje znaną dystrybuantę rozkładu wykładniczego

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Niekiedy zamiast parametru λ stosuje się wielkość $\eta = \frac{1}{\lambda}$.

Konstruując rozkład Weibulla przyjmujemy własność: prawdopodobieństwo zdarzenia w krótkim czasie Δt jest w przybliżeniu równe $\lambda_i \Delta t$ czyli średnią liczbą zdarzeń na jednostkę czasu zmienia się wraz z upływem czasu i zależy od numeru tego

przedziału. Zatem prawdopodobieństwo braku sukcesu w n takich przedziałach jest równe

$$Q_n = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i \Delta t)$$

Po zlogarytmowaniu

$$\ln Q_n = \sum_{i=1}^n \ln(1 - \lambda_i \Delta t) \cong - \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta t$$

Gdy Δt dąży do zera i n rosnącym do nieskończoności otrzymamy granicę

$$\ln Q(t) = - \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \equiv -\Lambda(t)$$

Po usunięciu logarytmu otrzymamy $Q(t) = e^{-\Lambda(t)}$ co daje dystrybuantę

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\Lambda(t)} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Gdy przyjmimy $\Lambda(t) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta$ to otrzymamy dystrybuantę rozkładu Weibulla

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$$

gęstość rozkładu Weibulla

$$f(t) = \begin{cases} \beta \frac{t^{\beta-1}}{\eta^\beta} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$$

Rozkład jest zdefiniowany dla $\beta, \eta > 0$,

η - charakterystyczny czas życia, β - parametr kształtu

Własność.

Dla każdego $\beta > 0$

$$P(X < \eta) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,6321$$

Trzyparametrowy rozkład Weibulla.

$$f(t) = \begin{cases} \beta \frac{(t-t_0)^{\beta-1}}{\eta^\beta} e^{-\left(\frac{t-t_0}{\eta}\right)^\beta} & \text{dla } t > t_0 \\ 0 & \text{dla } t \leq t_0 \end{cases}$$

Rozkład jest zdefiniowany dla $\beta, \eta > 0, t_0 \geq 0$.

t_0 – przesunięcie (minimalny czas życia).

Wybrane parametry rozpatrywanego rozkładu:

Wartość oczekiwana

$$EX = m = \eta \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$$

gdzie Γ jest funkcją gamma Eulera,

Wariancja

$$D^2 X = \sigma^2 = \eta^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]$$

Współczynnik zmienności

$$v = \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)} - 1}$$

Moment rzędu k

$$EX^k = m_k = \eta^k \Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right)$$

Moment centralny rzędu 3

$$E(X - m)^3 = \mu_3 = \eta^3 \left[\Gamma\left(\frac{3}{\beta} + 1\right) - 3\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) + 2\Gamma^3\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]$$

Moment centralny rzędu 4

$$\begin{aligned} E(X - m)^4 = \mu_4 = \eta^4 & \left[\Gamma\left(\frac{4}{\beta} + 1\right) - 4\Gamma\left(\frac{3}{\beta} + 1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) + \right. \\ & \left. + 6\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) - 3\Gamma^4\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right] \end{aligned}$$

Mediana

$$M_e = \eta (\ln 2)^{1/\beta}$$

p-kwantyl

$$t_p = \eta (-\ln(1-p))^{1/\beta}$$

Dominanta

$$M_o = \eta \left(\frac{\beta-1}{\beta} \right)^{1/\beta}, \quad \beta \geq 1$$

Współczynnik asymetrii

$$a = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right) - 3\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right) + 2\Gamma^3\left(\frac{1}{\beta}+1\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^{3/2}}$$

Kurtoza

$$k = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{\beta}+1\right) - 4\Gamma\left(\frac{3}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right) + 6\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right) - 3\Gamma^4\left(\frac{1}{\beta}+1\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^2} - 3$$

Funkcja ryzyka (intensywność uszkodzeń)

$$\lambda(t) = h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \beta \frac{t^{\beta-1}}{\eta^\beta} \quad t > 0$$

Dla $\beta < 1$ funkcja malejąca,

Dla $\beta = 1$ funkcja stała,

Dla $\beta > 1$ funkcja rosnąca,

Zagadnienie estymacji parametrów rozkładu Weibulla.

Metoda momentów, która chociaż daje estymatory o słabszych własnościach to charakteryzuje się dużą prostotą. Mianowicie najpierw wyznaczamy estymator parametru β z równości

$$1 + v^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)}$$

gdzie v jest współczynnikiem zmienności wyliczonym z próby, $v = \frac{S}{\bar{X}}$.

Następnie estymator parametru η wyznaczamy z równości

$$\eta = \frac{\bar{X}}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)}$$

Metoda największej wiarygodności.

Należy rozwiązać układ równań

$$\beta = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^\beta}{n \sum_{i=1}^n x_i^\beta \ln x_i - \sum_{i=1}^n x_i^\beta \sum_{i=1}^n \ln x_i}$$

$$\eta = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Metoda kwantyli empirycznych.

$$\beta = \frac{\ln\left(\frac{\ln(1-p_1)}{\ln(1-p_2)}\right)}{\ln\left(\frac{t_{p_1}}{t_{p_2}}\right)}$$

$$\eta = \frac{t_{p_1} + t_{p_2}}{\left(-\ln(1-p_1)\right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(-\ln(1-p_2)\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

Najwyższa efektywność estymatorów parametrów rozkładu Weibulla (równą 0,64) otrzymujemy dla kwantyli rzędu $p_1 = 0,24$ i $p_2 = 0,93$, wtedy

$$\beta = \frac{2,2711}{\ln\left(\frac{t_{0,93}}{t_{0,24}}\right)}$$

$$\eta = \frac{t_{0,93} + t_{0,24}}{\left(0,2744\right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(2,6593\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

Uwaga.

- a) dla $\beta = 1$ rozkład Weibulla staje się rozkładem wykładniczym,
- b) dla $\beta = 2$ rozkład Weibulla staje się rozkładem Releya z parametrem $\frac{\eta}{\sqrt{2}}$,

- c) zmienna losowa $Y = \beta \ln\left(\frac{X}{\eta}\right)$, gdzie X - rozkład Weibulla ma rozkład wykładniczy z parametrem 1,
- d) jeśli X jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w $(0, 1)$, to zmienna losowa $Y = \eta(-\ln X)^{\frac{1}{\beta}}$ ma rozkład Weibulla, (własność ta pozwala w prosty sposób generować liczby losowe o rozkładzie Weibulla),
- e) dystrybuantę rozkładu Weibulla można dobrze przybliżać dystrybuantą rozkładu log-normalnego.

$$F(t, \eta, \beta) \approx \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{t}{m}\right)}{\alpha}\right) \quad (\text{maksymalny błąd } 0,038)$$

gdzie $m = \frac{\bar{x}}{\sqrt{1+v^2}} \quad \alpha = \sqrt{\ln(1+v^2)}$

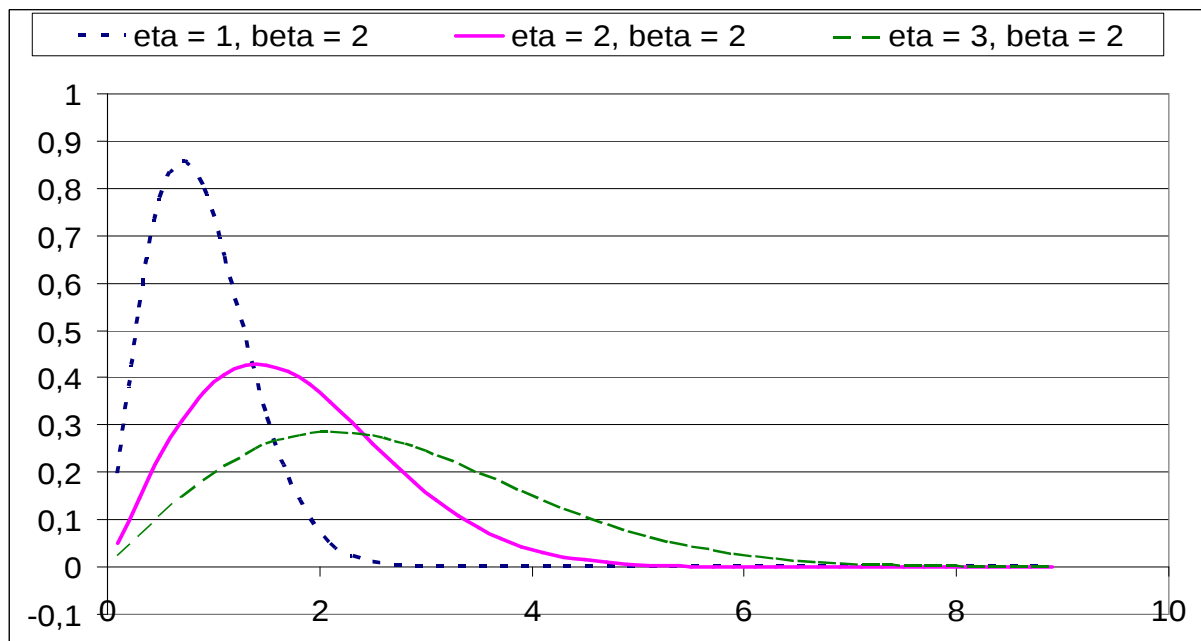
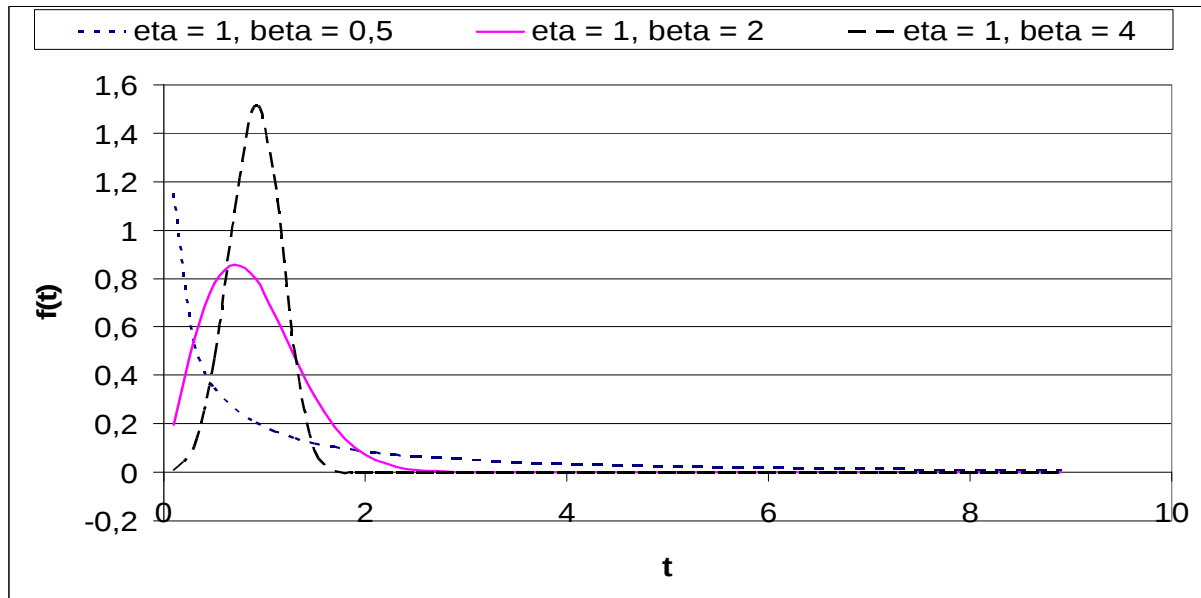
Φ - dystrybuenta rozkładu $N(0,1)$

Strona internetowa

www.weibull.com

poświęcona zagadnieniom związanym z rozkładem Weibulla, ich zastosowaniami i aktualnymi programami wspomagającymi obliczenia. Strona ta jest ciągle rozszerzana i aktualizowana, dając użytkownikowi możliwość korzystania z najnowszych rozwiązań dotyczących rozkładu Weibulla.

Wykres gęstości dla wybranych parametrów:



Uogólnieniem rozkładu wykładniczego i rozkładu Weibulla jest **rozkład gamma**

Odgrywa on szczególną rolę przy modelowaniu niezawodności obiektów odnawialnych (suma niektórych zmiennych losowych o rozkładzie gamma ma rozkład gamma, np. jeśli czas pracy między uszkodzeniami ma rozkład gamma to sumaryczny czas pracy też ma rozkład gamma (z innymi parametrami))

Gęstość rozkładu gamma

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t} & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$$

Rozkład jest zdefiniowany dla $\alpha, \lambda > 0$,

Gęstość uogólnionego rozkładu gamma

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\beta \lambda^{\alpha/\beta} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha/\beta)} e^{-\lambda t^\beta} & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$$

Rozkład jest zdefiniowany dla $\alpha\beta > 0, \lambda > 0$,

Uwaga.

- a) dla $\alpha = \beta = 1$ rozkład gamma staje się rozkładem wykładniczym,
- b) dla $\alpha = \beta$ rozkład gamma staje się rozkładem Weibulla,
- c) dla $\alpha = \beta = 2$ rozkład gamma staje się rozkładem Releja,
- d) dla $\alpha = 3, \beta = 2$ rozkład gamma staje się rozkładem Maxwella,
- e) dla $\alpha = n/2, \beta = 1, \lambda = 1/2$ rozkład gamma staje się rozkładem chi kwadrat,
- f) dla $\alpha = n, \beta = 1$, rozkład gamma staje się rozkładem Erlanga,

Literatura:

B.Korzan, „Teoria niezawodności”,

D.Bobrowski, „Modele i metody matematyczne teorii niezawodności”,

L.Kowalski, „Statystyka”,

L.Kowalski, 30.03.2010