Łańcuchy Markowa

Łańcuchy Markowa to procesy dyskretne w czasie i o dyskretnym zbiorze stanów, "bez pamięci".

Zwykle będziemy zakładać, że zbiór stanów to podzbiór zbioru liczb całkowitych Z lub zbioru $\{0, 1, 2, ...\}$ jako uproszczenie zapisu $\{S_0, S_1, S_2, ...\}$.

Łańcuchem Markowa nazywamy proces będący ciągiem zmiennych losowych

$$X_0, X_1, ...$$

Określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej, przyjmujących wartości całkowite i spełniające warunek

$$P\left(X_n = j \middle| X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}\right) =$$
$$= P\left(X_n = j \middle| X_{n-1} = i_{n-1}\right) \qquad \bigwedge_{n} \quad \bigwedge_{i_0,...,i_{n-1}, j \subset \{0,1,2,....\}}$$

Zatem dla łańcucha Markowa rozkład prawdopodobieństwa warunkowego położenia w n-tym kroku zależy tylko od prawdopodobieństwa warunkowego położenia w kroku poprzednim a nie od wcześniejszych punktów trajektorii (historia).

Niech

$$p_{ij}^{(n)} = P\left(X_n = j \middle| X_{n-1} = i\right)$$

oznacza prawdopodobieństwo warunkowe przejścia w n-tym kroku ze stanu i do stanu j.

Jeśli $p_{ij}^{(n)}$ nie zależą od n to łańcuch nazywamy **jednorodnym (jednorodnym w czasie)** i stosujemy zapis p_{ij}.

Zakładając, że numery stanów są całkowite, nieujemne można prawdopodobieństwa przejść zapisać w macierzy

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \cdots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

W pierwszym wierszu mamy kolejno prawdopodobieństwo pozostania w stanie 0 w n-tym kroku i prawdopodobieństwa przejścia w n-tym kroku ze stanu o numerze 0 do stanów o numerach 1, 2, itd. Analogicznie określone są pozostałe wiersze.

Dla łańcuchów jednorodnych powyższą macierz oznaczamy P i ma ona postać

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Własności macierzy prawdopodobieństw przejść:

a) $p_{ij}^{(n)} \geq 0$ b) suma każdego wiersza jest równa 1.

Zauważmy też, że w macierzy tej nie może istnieć kolumna złożona z samych zer.
Każdą macierz spełniającą warunki a), b) nazywamy **macierzą stochastyczną**.

Będziemy dalej przyjmować najczęściej, że rozpatrywane łańcuchy Markowa mają skończona liczbę stanów.
$p_i(n)$ - prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie i po n krokach (rozkład zmiennej losowej X_n). Prawdopodobieństwa te stanowią składowe wektora p(n), jest to rozkład łańcucha Markowa po n krokach.
$p_i(0)$ - prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie i w chwili początkowej (rozkład zmiennej losowej X_0 - rozkład początkowy). Prawdopodobieństwa te stanowią składowe wektora p(0).

p_{ij} - prawdopodobieństwo przejścia od stanu i do stanu j w jednym (dowolnym) kroku,

P = $[p_{ij}]$- **macierz prawdopodobieństw przejść** (w jednym kroku), jest **to macierz stochastyczna**.

Przykład.
Błądzenie przypadkowe z odbiciem. Np. gdy stany 0 i 4 są odbijające

$$[0] \underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} [1] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [2] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [3] \underset{1}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [4]$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład.

Błądzenie przypadkowe z pochłanianiem. Np. gdy stany 0 i 4 są pochłaniające

$$1 \circlearrowright [0] \xleftarrow[q]{} [1] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [2] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [3] \xrightarrow{p} [4] \circlearrowleft 1$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problem ruiny gracza jest szczególnym przypadkiem błądzenia przypadkowego z pochłanianiem. Gracz dysponuje początkowo kwotą k zł. W kolejnych etapach z prawdopodobieństwem p wygrywa 1zł albo z prawdopodobieństwem q = 1- p przegrywa 1zł. Gra kończy się gdy gracz osiągnie kwotę w > k zł lub przegra wszystko.

Zatem mamy dwa stany pochłaniające 0 i w.

Graf i macierz rozpatrywanego łańcucha są następujące.

$$1 \circlearrowright [0] \xleftarrow[q]{} [1] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [k] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [w-1] \xrightarrow{p} [w] \circlearrowleft 1$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .... & 0 \\ q & 0 & p & 0 & .... & 0 \\ 0 & q & 0 & p & .... & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & .... & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... & 1 \end{bmatrix}$$

rozkład początkowy określa $X_0 = k$

Jeśli przez r(k) oznaczymy prawdopodobieństwo ruiny gracza, który rozpoczął grę z kwotą k zł to rozwiązując równanie rekurencyjne

$$r(k) = qr(k-1) + pr(k+1)$$

z warunkami r(0) = 1, r(w) = 0, otrzymujemy, że prawdopodobieństwo ruiny gracza wynosi

$$r(k) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^w - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^w - 1} \qquad \text{gdy} \quad p \neq q$$

oraz $r(k) = 1 - \frac{k}{w}$ gdy $p = q = \frac{1}{2}$

Jeśli przez z(k) oznaczymy prawdopodobieństwo zdobycia przez gracza kwoty w, który rozpoczął grę z kwotą k zł to rozwiązując równanie rekurencyjne

$$z(k) = pz(k+1) + qr(k-1)$$

z warunkami z(0) = 0, z(w) = 1, otrzymujemy

$$z(k) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^w - 1} \qquad \text{gdy} \quad p \neq q$$

oraz $z(k) = \frac{k}{w}$ gdy $p = q = \frac{1}{2}$

Zauważmy, że r(k) + z(k) = 1 co oznacza, że gra musi się skończyć.

Przykład.

Elektron może znajdować się w jednym ze stanów (orbit) 1, 2, ...w zależności od posiadanej energii. Przejście z i - tej do j - tej orbity w ciągu 1 sekundy zachodzi z prawdopodobieństwem $c_i e^{-\alpha|j-i|}$, α > 0 jest dane.

Wyznacz c_i, i macierz P.

Przykład.

Narysuj graf łańcucha Markowa odpowiadający macierzy prawdopodobieństw przejść

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład.

Zapisz macierz P dla łańcuch a Markowa przedstawionego grafem

$$[0] \underset{1/4}{\overset{1}{\rightleftarrows}} [1] \xrightarrow{3/4} [2] \underset{1/2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} [3] \underset{4/5}{\overset{1/2}{\rightleftarrows}} [4] \circlearrowleft 1/5$$

$P(n) = P^n = [p_{ij}(n)]$ - macierz prawdopodobieństw przejść od stanu i do stanu j w n krokach,

Równanie Chapmana, - Kołmogorowa:

$$p_{ij}(k+l) = \sum_m p_{im}(k)\, p_{mj}(l)$$

Własność:

Znając rozkład początkowy i macierz P możemy wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X_n czyli prawdopodobieństwo znalezienia się w poszczególnych stanach po n krokach:

$$(p_0(n), p_1(n), ...) = (p_0(0), p_1(0), ...)P^n.$$

czyli
$$p(n) = p(o)P^n$$

Mamy też własność:
$$p(m + n) = p(m)P^n$$

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa o macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

i rozkładzie początkowym p(0) = (1, 0, 0).

Po pierwszym kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(1) = p(0)P = [1,0,0]\begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} = [0,5;0;0,5]$$

Po drugim kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

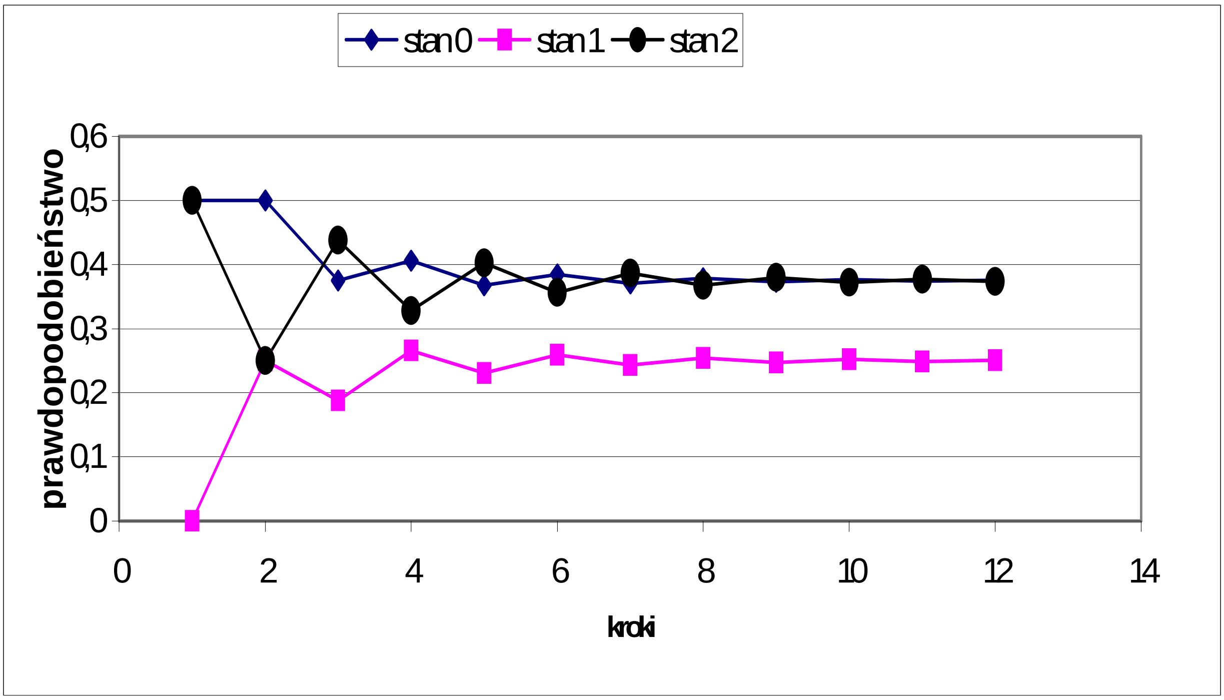
$$p(2) = p(0)P^2 = [1,0,0]\begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,375 & 0,438 & 0,188 \\ 0,25 & 0,125 & 0,625 \end{bmatrix} = [0,5;0,25;0,25]$$

Po trzecim kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(3) = p(0)P^3 = [1,0,0]\begin{bmatrix} 0,375 & 0,188 & 0,438 \\ 0,281 & 0,203 & 0,516 \\ 0,438 & 0,344 & 0,219 \end{bmatrix} = [0,375;\ 0,188;\ 0,438]$$

Obliczając kolejne potęgi macierzy P możemy wyliczone wartości p(n) zestawić dla n = 1, ..., 12 w następującej tabeli i przedstawić na wykresie.

krok	Stan 0	Stan 1	Stan 2
1	0,5	0	0,5
2	0,5	0,25	0,25
3	0,375	0,188	0,438
4	0,406	0,266	0,328
5	0,367	0,23	0,402
6	0,385	0,259	0,356
7	0,371	0,243	0,386
8	0,379	0,254	0,367
9	0,373	0,247	0,38
10	0,376	0,252	0,372
11	0,374	0,249	0,377
12	0,376	0,251	0,374



Zauważmy, że rozpatrywane prawdopodobieństwa stabilizują się na określonym poziomie i dążą do pewnych granic, co związane jest z regularności rozpatrywanej macierzy stochastycznej.

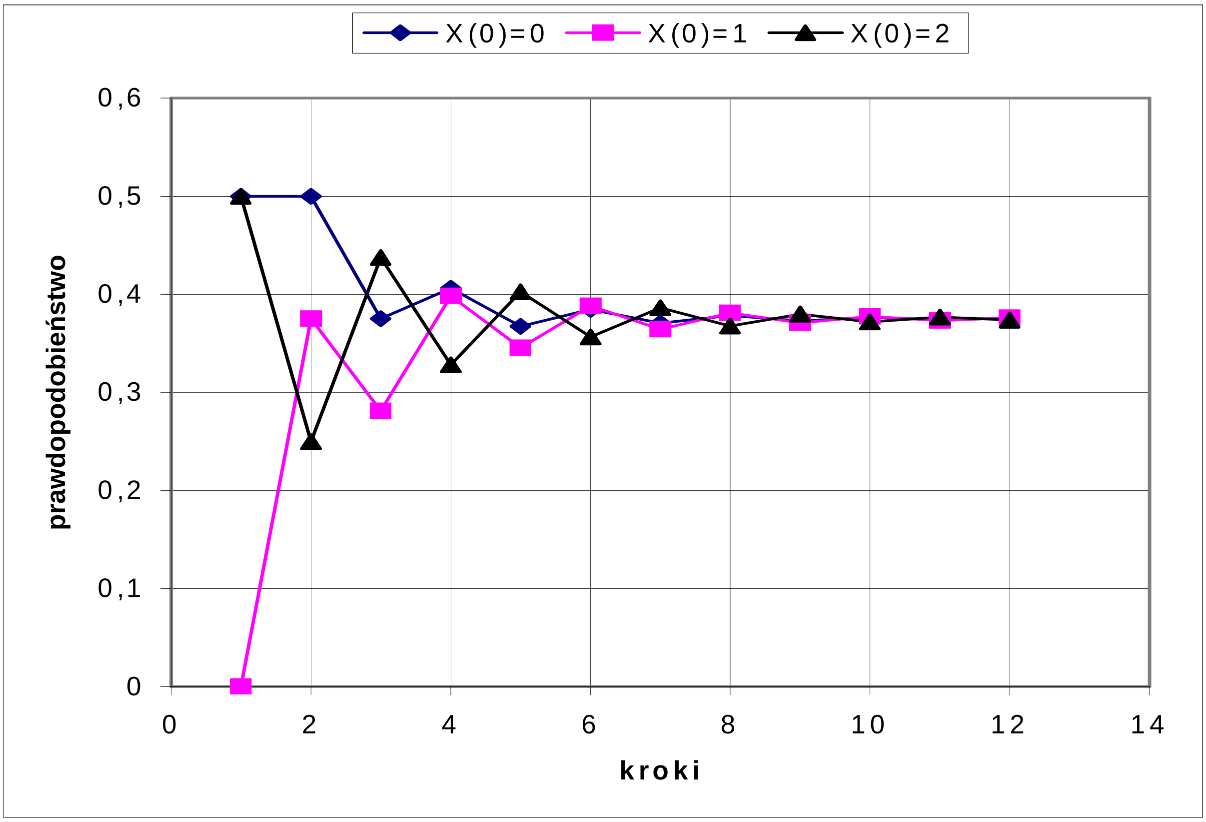
Jak pokażemy wkrótce, istnieją sposoby wyznaczania tych granicznych prawdopodobieństw bez obliczania potęg macierzy P.

Zobaczmy teraz jak zmienia się prawdopodobieństwo znalezienia się w ustalonym stanie w poszczególnych krokach, gdy zmienia się rozkład początkowy.

Rozpatrzmy stan 0 i rozkłady początkowe p(0) = (1, 0, 0), p(0) = (0, 1, 0), p(0) = (0, 0, 1).

Obliczone prawdopodobieństwa (w podobny sposób jak wyżej) zestawiono w tabeli i przedstawiono na wykresie dla $n = 1, ..., 12$.

p(0) \ krok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p(0) = (1, 0, 0)	0,5	0,5	0,375	0,406	0,367	0,385	0,371	0,379	0,373	0,376	0,374	0,376
p(0) = (0, 1, 0)	0	0,375	0,281	0,398	0,346	0,388	0,364	0,381	0,371	0,378	0,373	0,376
p(0) = (0, 0, 1)	0,5	0,25	0,438	0,328	0,402	0,356	0,386	0,367	0,38	0,372	0,377	0,374



Zauważmy, że rozpatrywane prawdopodobieństwo dla dużych n nie zależy od rozkładu początkowego.

Granicę $\Pi = p(\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} p(n)$ (o ile istnieje) nazywamy **rozkładem granicznym** łańcuch Markowa.

$$\Pi = (\Pi_0, \Pi_1, \ \Pi_2, \ldots).$$

Łańcuch Markowa dla którego istnieje rozkład graniczny niezależny od rozkładu początkowego p(0) nazywamy **łańcuchem ergodycznym**.

Twierdzenie.

Rozkład graniczny nie zależy od rozkładu początkowego p(0) wtedy i tylko wtedy gdy wiersze macierzy granicznej $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = E$ są takie same.

Warunek ten jest spełniony dla macierzy P regularnej (jednokrotna wartość własna równa 1).

Uwaga.

Jeśli pewna potęga macierzy przejścia P ma co najmniej jedną kolumnę złożoną wyłącznie z wyrazów dodatnich to rozpatrywany łańcuch jest ergodyczny.

Sposoby wyznaczania rozkładu granicznego:

Sposób I.

Rozkład graniczny Π jest jedynym niezerowym rozwiązaniem układu

$$(P^T - I)\,\Pi^T = 0,$$

spełniającym warunek $\sum_{i=1} \Pi_i = 1$,

Uwaga.

Z powyższej równości wynika, że $\Pi P = \Pi$ co oznacza, że wektor Π jest wektorem własnym macierzy P odpowiadającym wartości własnej równej 1.

Przykład.

Wyznaczyć rozkład ergodyczny łańcucha Markowa o macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Należy rozwiązać równanie jednorodne

$$\begin{bmatrix} -0{,}7 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & -0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jest to układ nieoznaczony z jednym parametrem. Przyjmijmy np. $\Pi_1 = 1$, wtedy $\Pi_2 = 28/24$, $\Pi_3 = 40/24$. Dzieląc te rozwiązania przez ich sumę otrzymamy rozwiązanie unormowane $\Pi = [6/23, 7/23, 10/23]$.

Sposób II.

$$\Pi_j = \frac{A_{jj}}{\sum_k A_{kk}}$$

gdzie A_{kk} to dopełnienia algebraiczne macierzy I - P (wyznacznik macierzy otrzymanej przez skreślenie k-tego wiersza i k-tej kolumny).

Przykład.

Wyznaczyć drugim sposobem rozkład ergodyczny łańcucha z poprzedniego przykładu.

Klasyfikacja stanów łańcucha Markowa.

Niekiedy będziemy utożsamiać stan s_k z liczbą k.

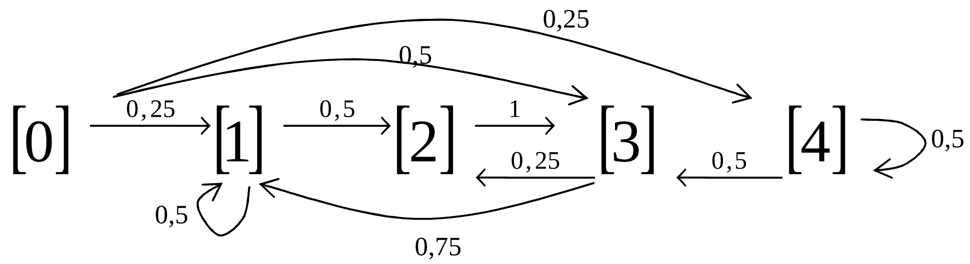
Stan s_k jest **osiągalny** ze stanu s_j jeśli $p_{jk}(n) > 0$ dla pewnego n,

Stany s_k i s_j nazywamy **wzajemnie komunikującymi się** jeśli stan s_k jest osiągalny ze stanu s_j, i odwrotnie.
Relacja wzajemnego komunikowania się określona na zbiorze stanów łańcucha Markowa jest:
- symetryczna,
- przechodnia (z równości Chapmana-Kołmogorowa).

Zbiór stanów C nazywamy **zamkniętym**, jeżeli żaden stan spoza C nie da się osiągnąć wychodząc z dowolnego stanu w C.

Stan s_k jest **stanem nieistotnym (chwilowym)** gdy istnieje stan s_j osiągalny ze stanu s_k a stan s_k nie jest osiągalny ze stanu s_j ,
Stan, który nie jest nieistotny nazywa się **istotny (powracający).**

Przykład.
Rozpatrzmy łańcuch Markowa



Jego macierz P ma postać

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}25 & 0 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Stany 0 i 4 są nieistotne.
Stany 1, 2 i 3 są istotne.
Zbiór stanów {1, 2, 3} jest zamknięty.

Pojedynczy stan zamknięty (musi być $p_{kk} = 1$) nazywamy stanem **pochłaniającym**.
Stan s_k jest **odbijający** gdy $p_{kk} = 0$. Stan odbijający może być zarówno chwilowy jak i powracający.

Łańcuch Markowa jest **nieprzywiedlny**, gdy wszystkie jego stany wzajemnie komunikują się, w przeciwnym przypadku łańcuch jest **przywiedlny**.

Macierz kwadratowa jest **przywiedlna** jeśli istnieje permutacja pewnej liczby wierszy i kolumn o tych samych numerach, która pozwala ją zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ A & P_2 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } P_1, P_2 \text{ to macierze kwadratowe}$$

W przeciwnym przypadku macierz jest **nieprzywiedlna.**

Twierdzenie.
Przestrzeń stanów S łańcucha Markowa można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy:

$$S = T \cup S_1 \cup S_2 \cup .....$$

gdzie T - zbiór stanów chwilowych (nieistotnych),
S_i - nieprzywiedlne zamknięte zbiory stanów powracających (istotnych). Wśród nich mogą być podzbiory jednoelementowe stanów pochłaniających.

Łańcuchy okresowe.
Okresem stanu powracającego j nazywamy liczbę:

$$o(j) = NWD(n\colon p_{jj}(n)>0)$$

jest to największy wspólny dzielnik takich liczb n, że powrót do stanu j może nastąpić po n krokach.

Stan j nazywamy **okresowym** gdy ma okres większy od 1 i **nieokresowym** gdy ma okres 1.

Przykład.
Rozpatrzmy łańcuch Markowa

$$\begin{tikzcd} {[0]} \arrow[r, "1"] & {[1]} \arrow[r, "1"] & {[2]} \arrow[r, "1"] & {[3]} \arrow[lll, bend left, "1"] \end{tikzcd}$$

Jego macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie stany mają okres 4.

Przykład.
Rozpatrzmy łańcuch Markowa

$$[0] \ \underset{0,75}{\overset{1}{\rightleftarrows}}\ [1] \ \underset{0,75}{\overset{0,25}{\rightleftarrows}}\ [2] \ \underset{1}{\overset{0,25}{\rightleftarrows}}\ [3]$$

Jego macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}75 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie stany mają okres 2.

Przykład.
Rozpatrzmy łańcuch Markowa

$$[0] \underset{0,75}{\overset{1}{\rightleftarrows}} [1] \xrightarrow{0,25} [2] \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} [3]$$

Jego macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}75 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie stany mają okres 2.

Twierdzenie.
W skończonym nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa wszystkie stany mają ten sam okres.

Zatem nieprzywiedlny łańcuch Markowa nazywamy okresowym, gdy jego stany mają okres większy od 1, w przeciwnym przypadku łańcuch nazywamy nieokresowym.
Stan, który jest powracający, niezerowy i nieokresowy nazywa się **ergodyczny.**

Łańcuch ergodyczny.
Łańcuch jest **ergodyczny** jeśli istnieje

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j \qquad \sum_j \pi_j = 1 \qquad \Pi = (\Pi_1, \Pi_2, ...)$$

Rozkład Π nazywamy **rozkładem granicznym**.

Twierdzenie Jeśli w łańcuchu Markowa o skończenie wielu stanach, wszystkie stany istotne są nieokresowe i tworzą jedną klasę, to istnieją prawdopodobieństwa ergodyczne, przy czym dla stanów istotnych są one dodatnie, zaś dla stanów chwilowych są one równe 0.

Łańcuch stacjonarny .
Jednorodny łańcuch Markowa jest **stacjonarny** gdy istnieje rozkład Π jego stanów, **zwany rozkładem stacjonarnym**, że

$$\Pi P = \Pi$$

(tzn. Π jest wektorem własnym macierzy P dla wartości własnej 1).
Zatem dla dowolnego n, $\Pi P^n = \Pi$, oznacza to, że jeśli rozkład początkowy jest równy Π, to **rozkład łańcucha po dowolnej liczbie kroków jest taki sam** i równy Π.

Jeśli macierz P łańcucha jest nierozkładalna to rozkład stacjonarny jest dokładnie jeden. Jeśli macierz P łańcucha jest rozkładalna to rozkładów stacjonarnych jest więcej niż jeden.

W łańcuchu ergodycznym rozkład stacjonarny (graniczny) nie zależy od rozkładu początkowego.

Uwaga.

ergodyczny $\Rightarrow$ **stacjonarny**

Odwrotna implikacja nie musi zachodzić.

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa

$$\begin{tikzcd} {[0]} \arrow[r, "1"] & {[1]} \arrow[r, "1"] & {[2]} \arrow[ll, bend left, "1"] \end{tikzcd}$$

Jego macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie stany mają okres 3.

Zauważmy, że wielomian charakterystyczny tej macierzy ma postać

$$W(\lambda) = \lambda^3 - 1$$

i jej wartości własne są równe: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Ponieważ wszystkie wartości własne maja moduł 1 i $\lambda_1 = 1$ jest jednokrotną wartością własną to rozpatrywana macierz jest nierozkładalna i cykliczna.

Łańcuch ten jest stacjonarny, jego rozkładem stacjonarnym jest (1/3, 1/3, 1/3).

Rozkład ten można wyznaczyć I lub II sposobem obliczania rozkładów granicznych.

Kolejne potęgi macierzy P są równe

$$P^2 = P^{3n+2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ P^3 = P^{3n+3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ P^4 = P = P^{3n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

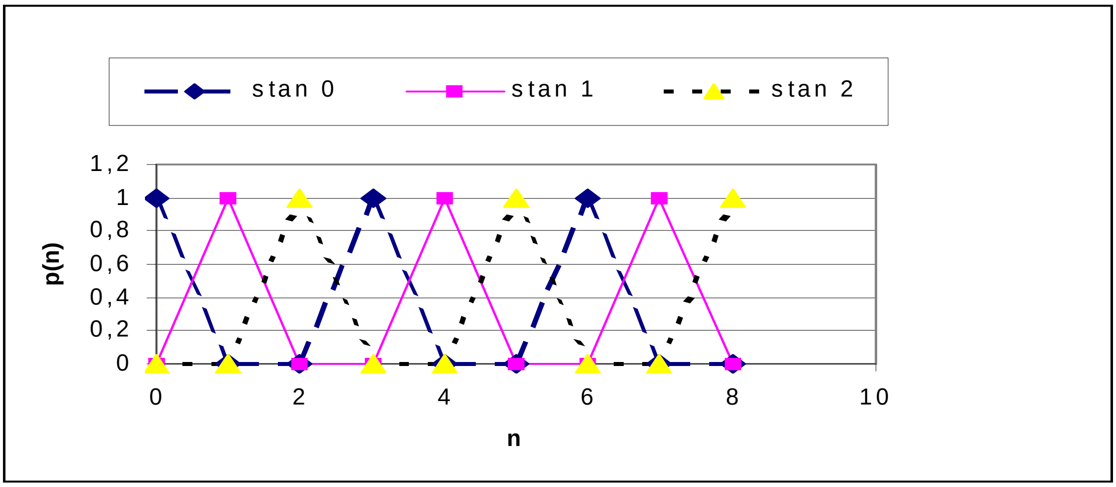
dla n = 0, 1, 2, ...

Zauważmy, że żadna kolumna P^n nie składa się wyłącznie z elementów dodatnich.

Rozkład graniczny nie istnieje.

Weźmy np. rozkład początkowy p(0) = (1, 0, 0).

Obliczone prawdopodobieństwa p(0) zestawiono w tabeli i przedstawiono na wykresie dla



n = 0, ..., 8.

p(n) \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Stan 0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
Stan 1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
Stan 2	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Jak widać $\lim_{n\to\infty} p\ (n)$ nie istnieje dla żadnej współrzędnej (dla żadnego stanu).

Wniosek.
Istnienie rozkładu stacjonarnego nie implikuje, że łańcuch jest ergodyczny.
Każdy łańcuch o skończonej liczbie stanów jest stacjonarny.

Przykład.
Rozpatrzmy łańcuch o macierzy P równej

$$p = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Łańcuch ten nie jest ergodyczny. Zauważmy, że rozkłady (1/2, 1/2, 0, 0); (0, 0, 1/2, 1/2); (1/4, 1/4, 1/4, 1/4) są stacjonarne (rozkładów stacjonarnych może być więcej niż jeden bo rozpatrywana macierz jest rozkładalna).

Przykład.
Rozpatrzmy łańcuch o macierzy P równej

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie stany są okresowe (mają okres 2).

Przykład.
Rozpatrzmy łańcuch o macierzy P równej

$$p = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznacz graf tego łańcucha.
Jakie są domknięte klasy tego łańcucha?, Czy jest to łańcuch nieprzywiedlny?
Czy łańcuch ten ma stany okresowe? Czy wszystkie stany są okresowe ?.
Sprawdź, że $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$ nie istnieje i żadna kolumna P^n nie składa się wyłącznie z elementów dodatnich.

Przykład.
Rzucamy symetryczną czworościenną kostką (na ściankach liczby 1, 2, 3, 4). Rozpatrujemy łańcuch Markowa X_n określony jako ciąg maksymalnych wyników spośród rzutów 1,2,3,...,n.
Sprawdź, że łańcuch ten ma macierz P równą

$$p = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wyznacz graf tego łańcucha. Czy łańcuch ten ma stany okresowe?

Przykład.
Gracze A i B rozpoczynają grę z kapitałem 2zł każdy. W każdej partii gracz A wygrywa z prawdopodobieństwem 0,6, gracz B wygrywa z prawdopodobieństwem 0,4. Po każdej partii przegrywający płaci wygrywającemu 1 zł.

a) jakie jest prawdopodobieństwo, że gra zakończy się po 2 partiach ?
b) jakie jest prawdopodobieństwo, że po 4 partiach kapitał każdego gracza wyniesie 2 zł?
c) Ile wynosi wartość oczekiwana kapitału gracza A po 2 partiach?

Przyjmijmy, że stany procesu to kapitał w posiadaniu gracza A czyli {0, 1, 2, 3, 4}.
Macierz P ma postać

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stany 0 i 1 są pochłaniające (osiągnięcie któregoś z tych stanów oznacza bankructwo jednego z graczy). Do jakiej klasy należą pozostałe stany? Narysuj odpowiedni graf.
Rozkład początkowy p(0) = [0, 0, 1, 0, 0].
Ad. a) $p(2) = p(0)P^2$ = [0,16; 0, 0,48, 0, 0,36], zatem prawdopodobieństwo zakończenia gry po 2 partiach wynosi $p_0(2) + p_4(2) = 0,16 + 0,36 = 0,52$.
Ad. b) $p(4) = p(0)P^4$ = [0,2368; 0, 0,2304, 0, 0,5328), zatem prawdopodobieństwo, że każdy z graczy ma po 2 zł po 4 partiach wynosi $p_2(4) = 0,2304$.
Ad. c) na podstawie p(2) = [0,16; 0, 0,48, 0, 0,36], obliczamy wartość oczekiwaną kapitału gracza A po 2 partiach: 0,48·2zł + 0,36·4zł = 2,4zł.
Zatem gdyby gracze wielokrotnie rozegrali po 2 partie mając początkowo po 2 zł, to przeciętna wygrana gracza A wynosiłaby 40 gr.

Przykład.
Jeśli ciąg zmiennych losowych

$$X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots$$

jest łańcuchem Markowa o macierzy P, to ciąg zmiennych losowych

$$X_0, X_2, X_4, \ldots$$

jest łańcuchem Markowa o macierzy P^2.
Wskazówka. Należy skorzystać z równości Chapmana-Kołmogorowa.

ZADANIA

Zadanie 1.

Wyznaczyć wartości własne macierzy a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Czy odpowiedni łańcuch Markowa jest ergodyczny. Narysować graf tego łańcucha.

Sprawdzić, czy dla tego łańcucha istnieje rozkład graniczny.

Zadanie 2.

Wyznaczyć kolejne potęgi macierzy $P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Czy odpowiedni łańcuch Markowa jest ergodyczny. Narysować graf tego łańcucha.

Porównać wiersze macierzy P^n (n = 4, 8, 16) i składowe wektora rozkładu granicznego.

Oblicz $m(\infty)$, $D^2(\infty)$.

Odp. np. $P^6 = \begin{bmatrix} 0,671875 & 0,328125 \\ 0,65625 & 0,34375 \end{bmatrix}$ Π = [2/3, 1/3]

Zadanie 3.

Łańcuch Markowa ma dwa stany i rozkład graniczny [p, q]. Wyznaczyć macierz P tego łańcucha.

Zadanie 4.

Rozkład początkowy łańcucha Markowa określonego macierzą prawdopodobieństw przejść

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

wyraża się wektorem

a) (1, 0, 0),

b) (0,5; 0; 0,5),

Wyznaczyć prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach tego łańcucha po

1) dwóch etapach, Oblicz $m(2)$, $D^2(2)$.

2) trzech etapach, Oblicz $m(3)$, $D^2(3)$.

3) nieskończenie wielu etapach. Oblicz $m(\infty)$, $D^2(\infty)$.

Zadanie 5.

Rozkład początkowy łańcucha Markowa określonego macierzą prawdopodobieństw przejść

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wyraża się wektorem (1, 0, 0).

Wyznaczyć prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach tego łańcucha po kolejnych etapach. Czy łańcuch ten ma określone prawdopodobieństwa graniczne?

Zadanie 6.

Podaj przykład łańcucha, którego rozkłady graniczne zależą od rozkładu początkowego.

Zadanie 7.

Uzasadnij własność: Jeśli łańcuch Markowa ma dwa różne rozkłady stacjonarne to nie może to być łańcuch ergodyczny.

Zadanie 8.

Wyznaczyć rozkłady graniczne łańcuchów wyznaczonych przez macierze

a) $$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) $$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Narysuj odpowiednie grafy. Oblicz $m(\infty)$, $D^2(\infty)$.

Odp. a) [6/17, 7/17, 2/17, 2/17] b) [1/12, 3/12, 5/12, 1/12, 2/12]

Zadanie 9.

Rzucamy symetryczną czworościenną kostką (na ściankach liczby 1, 2, 3, 4). Rozpatrujemy łańcuch Markowa X_n określony jako ciąg maksymalnych wyników spośród rzutów 1,2,3,...,n. Sprawdź, że łańcuch ten ma macierz P równą

$$p = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wyznacz graf tego łańcucha. Czy łańcuch ten ma stany okresowe?

Zadanie 10.

Dany jest łańcuch Markowa o macierzy przejścia

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Wyznacz macierze prawdopodobieństw przejść po dwóch i po trzech krokach. Sporządź graf łańcucha. Które stany łańcucha są istotne? Które stany łańcucha są okresowe? Czy łańcuch jest ergodyczny? Oblicz prawdopodobieństwa graniczne.

Oblicz $m(\infty)$, $D^2(\infty)$.

L.Kowalski 20.11.2009