KOMBINATORYKA

Kombinatoryką nazywamy dział matematyki zajmujący się zbiorami skończonymi oraz relacjami między nimi. Kombinatoryka w szczególności zajmuje się wyznaczaniem liczby elementów zbiorów skończonych utworzonych zgodnie z określonymi zasadami. W matematyce szkolnej występuje głównie dzięki klasycznemu rachunkowi prawdopodobieństwa, gdzie ma zastosowanie przy wyznaczaniu ilości zdarzeń.

Oznaczenia.

$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ oznacza **zbiór** o elementach $a_1, a_2, ..., a_n$.

Kolejność wypisania elementów zbioru nie odgrywa roli.

Dwa zbiory o takich samych elementach są równe.

$N = \{1,2,3,...\}$ - zbiór liczb naturalnych.

$(a_1, a_2, ..., a_n)$ oznacza **ciąg** o wyrazach $a_1, a_2, ..., a_n$.

Kolejność ustawienia wyrazów w ciągu jest bardzo ważna. Zmieniając kolejność wyrazów w ciągu otrzymujemy inny ciąg.

Silnia. Symbol $n!$ (czytamy n silnia) oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n.

Zatem $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$,

Przyjmujemy, że $0! = 1$.

Przykład

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Symbol Newtona.

Symbol $\binom{n}{k}$ (czytamy „*n* po *k*” lub „*n* nad *k*”) dla $n, k \in N \cup \{0\}, \quad k \le n$

oznacza liczbę określoną wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ .$$

Przykład

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$$

Własności symbolu Newtona.

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,

3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$,

4. $\binom{n}{k} = \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot.....\cdot n}{(n-k)!}$,

5. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$,

6. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+....+\binom{n}{n}=2^n$.

Przykład

Rozwiązać równanie:

$$\binom{n}{2}-\binom{n}{1}=9$$

Odp. n = 6.

TRÓJKĄT PASCALA

Z symboli Newtona dla kolejnych *n* możemy utworzyć tzw. **trójkąt Pascala**

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

... ...

Po obliczeniu wartości symboli Newtona otrzymamy

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

... ...

Kolejne wiersze tego trójkąta to współczynniki występujące we wzorze dwumianowym Newtona

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{k} a^{n-3} \cdot b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{(n-1)} + b^n$$

Kombinacje

k elementową **kombinacją** zbioru *n* elementowego *A*, $(k \le n)$ nazywamy każdy *k*-elementowy **podzbiór** zbioru *A*.

Dwie kombinacje uważamy za różne, gdy jakiś element występuje w jednej z tych kombinacji, a nie występuje w drugiej.

Liczba k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Przykład

Ile jest możliwych wyników losowania w grze LOTTO (losujemy 6 liczb spośród 49)?

Rozwiązanie:

Kolejność wylosowanych liczb nie jest istotna, zatem

$$C_{49}^{6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13983816$$

Przykład

Z ilu osób składa się klasa, jeśli wiadomo, że dwuosobową delegację można wybrać na 300 sposobów?

Rozwiązanie:

Każda dwuosobowa delegacja jest 2-elementową kombinacją zbioru *n* elementowego, gdzie *n* oznacza ilość uczniów w klasie. Wszystkich kombinacji 2-elementowych zbioru uczniów jest 300. Zatem mamy równanie:

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{(n-1)\cdot n}{2} = 300 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - n - 600 = 0$$

$$\Delta = 1 + 2400 = 2401, \quad \sqrt{\Delta} = 49, \quad n_1 = \frac{1-49}{2} = -24, \quad n_2 = \frac{1+49}{2} = 25$$

$n = -24$ nie może być liczbą osób w klasie, więc jedynym rozwiązaniem jest $n = 25$.

Odp. W klasie jest 25 osób.

Kombinacje z powtórzeniami

k elementową **kombinacją** z powtórzeniami ze zbioru *n* elementowego *A*, nazywamy każdy *k*-elementowy **podzbiór** zbioru *A*, przy czym elementy mogą

się powtarzać (jest to losowanie ze zwracaniem k elementów ze zbioru n elementowego bez uwzględniania kolejności).
Liczba tych kombinacji wyraża się wzorem

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

n – liczba wszystkich różnych elementów zbioru
k – liczba **wybranych** różnych lub nie różniących się elementów zbioru

Przykład
Ile różnych deserów lodowych złożonych z pięciu gałek lodów można zestawić mając do dyspozycji cztery rodzaje lodów (kolejność gałek nie jest istotna)?
Rozwiązanie:

$$\overline{C}_4^5 = \binom{8}{5} = 56$$

Permutacje

Permutacją n elementowego zbioru A nazywamy każdy n wyrazowy **ciąg** utworzony ze wszystkich elementów zbioru A, czyli każde ustawienie wszystkich jego elementów w dowolnej kolejności. Dwie permutacje uważamy za różne, gdy przynajmniej dwa elementy występują w nich na różnych miejscach.

Liczba permutacji zbioru n elementowego wyraża się wzorem:

$$P_n = n!$$

Przykład

Na ile sposobów możemy ustawić 6 osób w kolejce?

Przykład

Ile jest możliwych wyników ukończenia biegu przez 4 zawodników? Zakładamy, że zawodnicy nie dzielą miejsc ex aequo.

Permutacje można utożsamiać z wzajemnie jednoznacznymi odwzorowaniami f:A$\to$ A. Jeśli $A = \{1,2, ... ,n\}$, to permutacja f odpowiada sposobowi ustawienia jego elementów w ciąg (bez powtórzeń) □ $f(1),f(2), ...,f(n)$□. Odwrotnie, każde takie ustawienie w ciąg określa wzajemnie jednoznaczną funkcję f: $f(k)$ to jest k-ty wyraz ciągu. Często wygodnie jest zapisywać permutację f za pomocą tabelki funkcji f:

$$\mathrm{f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ f(1) & f(2) & ... & f(n) \end{pmatrix}$$

Jeśli górny wiersz tabelki jest w naturalnej kolejności, to dolny jest ciągiem, odpowiadającym permutacji f.

Permutacje z powtórzeniami.

Zbiór składający się z n elementów uporządkowanych, wśród których pewne elementy powtarzają się odpowiednio $\mathrm{n}_1,\ \mathrm{n}_2,\ .....,\ \mathrm{n}_k$ razy, nazywamy n - elementową **permutacją z powtórzeniami**. Liczba tych permutacji wyraża się wzorem

$$P_n^{n_1,\ n_2,\ ..,n_k} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ ....\ n_k!}$$

Przykład.

Ile różnych wyrazów, mających sens lub nie, można utworzyć, przestawiając litery w wyrazie "*statystyka*".

Istnieje 10! permutacji utworzonych ze słowa " *statystyka* ". Litery w danym wyrazie powtarzają się: litera *s* - dwa razy, litera *t* trzy razy, litera *a* - dwa razy, litera *y* - dwa razy. Zatem

$$P_{10}^{2,\ 3,2,2} = \frac{10!}{2!\ 3!\,2!\,2!} = 12600$$

Wariacje bez powtórzeń

k wyrazową **wariacją bez powtórzeń** z *n*-elementowego zbioru *A,* $(k \le n)$, nazywamy każdy *k* wyrazowy **ciąg** elementów, którego wyrazy są **różnymi** elementami zbioru *A*.

Liczba *k* wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru *n* elementowego wyraża się wzorem:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k! = n \cdot (n-1) \cdot ..... \cdot (n-k+1)$$

n wyrazowe wariancje bez powtórzeń zbioru *n* elementowego są permutacjami tego zbioru. Zatem zachodzi zależność:

$$V_n^k = P_n$$

Zbiór wszystkich funkcji **różnowartościowych** ze zbioru k-elementowego w zbior n-elementowy można utożsamiać za zbiorem wszystkich *k* wyrazowych **wariacji z powtórzeniami** ze zbioru *n* elementowego.

Przykład

Mamy do dyspozycji 9 drewnianych klocków, na których są pomalowane cyfry od 1 do 9. Ile możemy ułożyć liczb czterocyfrowych, wybierając kolejno bez zwracania 4 klocki?

Rozwiązanie:

$$V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{5!6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$$

W tym zadaniu wybraliśmy wariacje bez powtórzeń, ponieważ kolejność klocków jest ważna i nie mogą się one powtarzać.

Wariacje z powtórzeniami

k wyrazową **wariacją z powtórzeniami** z *n* elementowego zbioru *A* nazywamy każdy *k* wyrazowy **ciąg** elementów tego zbioru.

Liczba *k* wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru *n* elementowego wyraża się wzorem:

$$W_n^k = n^k$$

Zbiór **wszystkich** funkcji ze zbioru k-elementowego w zbior n-elementowy można utożsamiać za zbiorem wszystkich *k* wyrazowych **wariacji z powtórzeniami** ze zbioru *n* elementowego.

Przykład

Dany jest zbiór cyfr {1, 2, 3, ..., 9}.

Ile liczb 4-cyfrowych można utworzyć z elementów tego zbioru?

Rozwiązanie:

Każda liczba 4-cyfrowa jest 4-wyrazową wariacją z powtórzeniami zbioru 9-elementowego, więc ich ilość wynosi:

$$W_9^4 = 9^4 = 6561$$

Reguła mnożenia oraz **reguła dodawania**.

Jeśli jest *m* możliwości wykonania jednej operacji oraz *n* możliwości wykonania drugiej to

- wykonując **jedną i drugą** operację mamy łącznie $m \cdot n$ możliwości

- wykonując **jedną albo drugą** operację mamy łącznie $m + n$ możliwości

Taka sama reguła stosuje sie do operacji wieloetapowych.

Przykład zastosowania reguły mnożenia.

Ile różnych zestawów obiadowych oferuje restauracja, jeżeli ma 7 różnych zup, 6 rodzajów drugich dań i 5 rodzajów deserów? Zakładamy, ze każda potrawa pasuje do każdej.

Zupę wybieramy na 7 sposobów, drugie danie na 6 sposobów a deser na 5 różnych sposobów.

Zatem mamy $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ różnych zestawów.

Zasada szufladkowa

Zasada szufladkowa, zwana też zasadą **Dirichleta**, a w jęz. angielskim ,,Pigeon hole Principle" może być sformułowana następująco. Jeśli n + 1 gołębi przyfrunęło do n gołębników, to w pewnym gołębniku będą przynajmniej dwa gołębie.

Sformułowanie ogólne:

Twierdzenie (Zasada szufladkowa)

Jeżeli $A = A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n$

oraz zbiór A ma co najmniej n + 1 elementów to przynajmniej jeden ze zbiorów $A_1, A_2, ..., A_n$ ma co najmniej dwa elementy.

Zadania

Zadanie 1. Ile możemy ułożyć flag dwukolorowych dysponując 5 kolorami? (układ kolorów na fladze może symbolizować różne kraje. np. flaga biało-czerwona określa Polskę, natomiast flaga czerwono-biała to Indonezja).

Odp. 20

Zadanie 2. W kolejce do kasy stoi 8 osób, wśród nich Pawlak i Kargul. Na ile sposobów można ustawić te osoby w kolejce, aby oni stali obok siebie.

Odp. $7 \cdot 6! \cdot 2 = 2 \cdot 7!$

Zadanie 3. Z talii 52 kart losujemy 5 kart. Ile jest możliwych wyników losowania, w których wylosujemy 3 asy?

Odp. Na 4512 sposobów.