C04 - RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA - Zadania do oddania

Parametr k = liczba trzycyfrowa, dwie ostatnie cyfry to dwie ostatnie cyfry numeru indeksu, pierwsza cyfra to pierwsza cyfra liczby liter pierwszego imienia.

Poszczególne zadania oddajemy na oddzielnych kartkach!

Zadanie 1

Niech P(A) = 0,0007·k, P(B) = 0,0008·k, P(A∪B) = 0,0009·k.
Oblicz: a) $P(A \cap B)$, b) $P(A' \cap B)$, c) $P(A' \cap B')$, d) $P(A' \cup B)$, e) $P(A' \cup B')$.

Zadanie 2

Z przedziału <-*k, k*> wybrano losowo liczby *b, c*. Obliczyć prawdopodobieństwo, że równanie $0{,}25kx^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki rzeczywiste.

Zadanie 3

W skrzyni jest k detali wyprodukowanych w zakładzie A, 2k detali wyprodukowanych w zakładzie B i 5k detali wyprodukowanych w zakładzie C. Wadliwość produkcji poszczególnych zakładów wynosi odpowiednio: 0,01k%, 0,05k % i 0,02k %.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany detal okaże się dobry,
b) Wylosowany detal okazał się wadliwy jakie jest prawdopodobieństwo, że wyprodukował go zakład B?

Zadanie 4

Zmienna losowa *X* ma rozkład określony funkcją prawdopodobieństwa:

x_k	-1	0	0,01k
p_k	$\frac{1}{0{,}1k}$	$\frac{0{,}1k-3}{0{,}1k}$	$\frac{2}{0{,}1k}$

a) wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej losowej i naszkicować jej wykres,
b) obliczyć $P(X > 0)$, $P(X \geq 0)$, $P(X < 1)$, $P(|X| \geq 1)$,
c) obliczyć E*X*, D^2X.

Zadanie 5.

X jest zmienną losową o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} c & dla \quad x \in [-0{,}01k-2;\ -0{,}01k-1] \cup [0{,}01k+2;\ \ 0{,}01k+4] \\ 0 & dla \ \ innych \ \ x \end{cases}$$

a) wyznaczyć c,
b) wyznaczyć dystrybuantę,
c) obliczyć $P\left(-0{,}01k - 1{,}5 \leq X \leq 0{,}01k + 3\right)$ i zinterpretować na wykresie gęstości,
d) wyznacz *x*, aby $P\left(X \geq 0{,}25\right)$,
e) obliczyć E*X*, D^2X
f) $Y = -2X + 1$. Oblicz E*Y*, D^2Y.

Zadanie 6

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony tabelą:

Y / X	-1	0
1	$\frac{1}{0,1k}$	$\frac{2}{0,1k}$
0	$\frac{1}{0,1k}$	$\frac{0,1k-4}{0,1k}$

a) Wyznaczyć macierz kowariancji,

b) Obliczyć współczynnik korelacji między tymi zmiennymi.

c) Czy X, Y są skorelowane? Czy X, Y są niezależne?

Zadanie 7

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony tabelą:

Y / X	0	1	2
-1	0	0	$\frac{1}{0,1k}$
0	$\frac{2}{0,1k}$	$\frac{2}{0,1k}$	$\frac{0,1k-8}{0,1k}$
1	$\frac{2}{0,1k}$	0	$\frac{1}{0,1k}$

a) wyznaczyć F(1; 2),

b) obliczyć $P(|X|\geq 1; |Y|\leq 1)$,

c) Wyznacz rozkład zmiennej losowej X.

d) Wyznacz rozkład zmiennej losowej Y.

e) wyznacz rozkładów warunkowych $X \mid Y=1;\ Y \mid X=0$,

f) Obliczyć współczynnik korelacji między tymi zmiennymi.

g) Czy X, Y są skorelowane? Czy X, Y są niezależne?

Zadanie 8

Zmienna losowa (X, Y) ma macierz kowariancji:

$$K=\begin{bmatrix} 4 & -0,005k \\ -0,005k & 16 \end{bmatrix}$$

Ile wynosi współczynnik korelacji między X i Y?

Zadanie 9

Zmienne losowe X_1, X_2 są niezależne. Wiadomo, że $D^2X_1 = k$, $D^2X_2 = 2k$.

Niech $Y = X_1 - 2X_2$, $Z = X_1 + X_2$.

Ile wynosi współczynnik korelacji między Y i Z?

Zadanie 10.

Zmienna losowa X ma gęstość

$$f(x)=\begin{cases} 0,01\cdot ke^{-0,01\cdot kx} & dla\ \ x\geq 0 \\ 0 & dla\ \ x<0 \end{cases}$$

a) wyznaczyć jej funkcję charakterystyczną,

b) za pomocą funkcji charakterystycznej obliczyć EX, D^2X, współczynnik asymetrii i kurtozę.

Zadanie 11.

(X, Y) jest zmienną losową o gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{dla } \; x \in [0;\, 1],\; y \in [x;\, 1 + 0{,}01k] \\ 0 & \text{dla } \; \text{innych } (x, y) \end{cases}$$

a) wyznaczyć c,
b) wyznaczyć F(0,001·k; 0,0005·k),
c) obliczyć $P(0{,}001k \le X \le 1;\, |Y| \le 1)$ i zinterpretować na wykresie gęstości,
d) wyznacz gęstości rozkładów warunkowych $X \mid Y = 1;\; Y \mid X = 0{,}5$,
e) obliczyć cov(*X*, *Y*), czy X, Y są nieskorelowane?
f) czy X, Y są niezależne?

Zadanie 12.

(X, Y) jest zmienną losową o gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{dla } \; (x, y) \in D \\ 0 & \text{dla } \; (x, y) \notin D \end{cases}$$

gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach (-0,01k; 0); (0; -0,01k); (-0,01k; -0,01k).
a) wyznaczyć c,
b) wyznaczyć F(0,0),
c) obliczyć EX, EY, cov(*X*, *Y*). Czy X, Y są nieskorelowane?
d) wyznacz prostą regresji Y względem X,

Zadanie 13.
Prawdopodobieństwo wygrania nagrody na loterii wynosi 0,0001·k. Korzystając z przybliżenia Poissona wyznaczyć prawdopodobieństwo, że wśród 1000 osób grających na tej loterii:
a) żadna nie wygra,
b) wygrają 2 osoby,
c) wygrają co najmniej 3 osoby,

Zadanie 14.
Zmienna losowa *X* ma rozkład *N*(– k; 0,1·k).
Obliczyć:
a) $P(X > -0{,}9 \cdot k)$,
b) $P(X < -0{,}95 \cdot k)$,
c) $P(|X + k| < 0{,}15k)$

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

Zadanie 15.
Zmienna losowa *X* ma rozkład *N*(– k; 0,01·k).
Wyznaczyć x aby:
a) $P(X > x) = 0{,}98$,
b) $P(X < x) = 0{,}01$,
c) $P(|X + k| > x) = 0{,}05$.

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

Należy oddać co najmniej 10 zadań.
Wyniki koniecznie wpisać na załączony arkusz odpowiedzi !

L.Kowalski, 19.02.2009

……………………………
data

Zadania I8

……………………………………… ……………………………………… ……………
Imię Nazwisko grupa

……………………………………… ……………………
nr indeksu **k**

ZAD.	ODPOWIEDZI DO WSKAZANYCH PODPUNKTÓW
1	a) $P(A \cap B)$ = b) $P(A' \cap B)$ = c) $P(A' \cap B')$ = d) $P(A' \cup B)$ = e) $P(A' \cup B')$ =
2	
3	a) b)
4	b) $P(X > 0) =$ $P(X \geq 0) =$ $P(X < 1) =$ $P(\lvert X\rvert \geq 1) =$ c) $\mathrm{E}X =$ $\mathrm{D}^2X =$
5	c = $P(-0{,}01k - 1{,}5 \leq X \leq 0{,}01k + 3) =$ $x =$ $\mathrm{E}X =$ $\mathrm{D}^2X =$ $\mathrm{E}Y =$ $\mathrm{D}^2Y =$
6	K = ρ = Czy X, Y są skorelowane? ……………… Czy X, Y są niezależne? ……………………..
7	F(1; 2) = $P(\lvert X \rvert \geq 1; \lvert Y \rvert \leq 1)$ = ρ = Czy X, Y są skorelowane? ……………… Czy X, Y są niezależne? ……………………..

....

Imię Nazwisko

ZAD.	ODPOWIEDZI DO WSKAZANYCH PODPUNKTÓW
8	$\rho =$
9	$\rho =$
10	$\varphi(t) =$ $EX =$ $D^2X =$ współczynnik asymetrii = kurtoza =
11	c = $F(0{,}001\cdot k;\ 0{,}0005\cdot k) =$ $P(0{,}001k \le X \le 1;\ \lvert Y\rvert \le 1) =$ $\mathrm{cov}(X, Y) =$ Czy X, Y są skorelowane? ……………… Czy X, Y są niezależne? ……………………..
12	c = $F(0,0) =$ EX = EY = $\mathrm{cov}(X, Y) =$ Czy X, Y są skorelowane? ……………… prosta regresji Y względem X
13	$P(X = 0) =$ $P(X = 2) =$ $P(X \ge 3) =$
14	$P(X > -0{,}9\cdot k) =$ $P(X < -0{,}95\cdot k) =$ $P(\lvert X + k\rvert < 0{,}15k) =$
15	$P(X > x) = 0{,}98 =$ $P(X < x) = 0{,}01 =$ $P(\lvert X + k\rvert > x) = 0{,}05 =$