

E2 - PROBABILISTYKA - Zadania do oddania

Parametr k = liczba trzycyfrowa, dwie ostatnie cyfry to dwie ostatnie cyfry numeru indeksu, pierwsza cyfra to pierwsza cyfra liczby liter pierwszego imienia.

Poszczególne zadania oddajemy na oddzielnych kartkach!

Zadanie 1

W skrzyni jest k detali wyprodukowanych w zakładzie A, $2k$ detali wyprodukowanych w zakładzie B i $5k$ detali wyprodukowanych w zakładzie C. Wadliwość produkcji poszczególnych zakładów wynosi odpowiednio: $0,01k\%$, $0,05k\%$ i $0,02k\%$.

- Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany detal okaże się dobry,
- Wylosowany detal okazał się wadliwy jakie jest prawdopodobieństwo, że wyprodukował go zakład B?

Zadanie 2

Zmienna losowa X ma rozkład określony funkcją prawdopodobieństwa:

x_k	-1	0	$0,01k$
p_k	$\frac{1}{0,1k}$	$\frac{0,1k-3}{0,1k}$	$\frac{2}{0,1k}$

- wyznaczyć dystrybucję tej zmiennej losowej i narysować jej wykres,
- obliczyć $P(X > 0)$, $P(X \geq 0)$, $P(X < 1)$, $P(|X| \geq 1)$,
- obliczyć EX , D^2X .

Zadanie 3.

X jest zmienną losową o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{dla } x \in [-0,01k-2; -0,01k-1] \cup [0,01k+2; 0,01k+4] \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases}$$

- wyznaczyć c ,
- wyznaczyć dystrybucję,
- obliczyć $P(-0,01k-1,5 \leq X \leq 0,01k+3)$ i zinterpretować na wykresie gęstości,
- obliczyć EX , D^2X .

Zadanie 4

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony tabelą:

Y	-1	0
X		
1	$\frac{1}{0,1k}$	$\frac{2}{0,1k}$
0	$\frac{1}{0,1k}$	$\frac{0,1k-4}{0,1k}$

- Wyznaczyć macierz kowariancji,
- Obliczyć współczynnik korelacji między tymi zmiennymi.
- Czy X , Y są skorelowane? Czy X , Y są niezależne?

Zadanie 5

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony tabelą:

Y X	0	1	2
-1	0	0	$\frac{1}{0,1k}$
0	$\frac{2}{0,1k}$	$\frac{2}{0,1k}$	$\frac{0,1k - 8}{0,1k}$
1	$\frac{2}{0,1k}$	0	$\frac{1}{0,1k}$

- wyznaczyć $F(1; 2)$,
- obliczyć $P(|X| \geq 1; |Y| \leq 1)$,
- Wyznacz rozkład zmiennej losowej X .
- Wyznacz rozkład zmiennej losowej Y .
- wyznacz rozkładów warunkowych $X|Y=1; Y|X=0$,
- Obliczyć współczynnik korelacji między tymi zmiennymi.
- Czy X, Y są skorelowane? Czy X, Y są niezależne?

Zadanie 6

Zmienna losowa (X, Y) ma macierz kowariancji:

$$K = \begin{bmatrix} 4 & -0,005k \\ -0,005k & 16 \end{bmatrix}$$

Ile wynosi współczynnik korelacji między X i Y ?

Zadanie 7.

(X, Y) jest zmienną losową o gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{dla } x \in [0; 1], y \in [x; 1 + 0,01k] \\ 0 & \text{dla innych } (x, y) \end{cases}$$

- wyznaczyć c ,
- wyznaczyć $F(0,001k; 0,0005k)$,
- obliczyć $P(0,001k \leq X \leq 1; |Y| \leq 1)$ i zinterpretować na wykresie gęstości,
- wyznacz gęstości rozkładów warunkowych $X|Y=1; Y|X=0,5$,
- obliczyć $\text{cov}(X, Y)$, czy X, Y są niezależne?

Zadanie 8.

Zmienna losowa X ma rozkład $N(-k; 0,1k)$.

Obliczyć:

- $P(X > -0,9k)$,
- $P(X < -0,95k)$,
- $P(|X + k| < 0,15k)$

Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresie gęstości.

Zadanie 9.

- a) Zmienna losowa X ma rozkład $N(k; 0,1 \cdot k)$. Obliczyć $P(0,9k < \bar{X}_9 < 0,95k)$,
 - b) Zmienna losowa X ma rozkład $N(m; 0,01 \cdot k)$. Obliczyć $P(S_{10}^2 < 0,02k)$,
 - c) Zmienna losowa X ma rozkład $N(k; 0,01 \cdot k)$. Obliczyć $P(S_{10}^{0,2} > 0,03k)$,
 - d) Zmienna losowa X ma rozkład $N(-0,1k; \sigma)$. $S_{10}^2 = 25$. Obliczyć $P(\bar{X}_{10} < 0,85k)$.
- Otrzymane wyniki zinterpretować na wykresach odpowiednich gęstości.

Zadanie 10A.

Cecha X ma rozkład $N(m; \sigma)$. Dokonano 10 pomiarów tej cechy i obliczono, że $\bar{x} = k$, $s = 0,1 \cdot k$. Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0,98$

- a) Oszacować przedziałem ufności parametr m ,
- b) Wyznaczyć błąd względny tego oszacowania,
- c) Jak liczna powinna być próba aby błąd względny wynosił $0,01 \cdot k\%$?

Zadanie 10B.

Cecha X ma rozkład $N(m; 0,1 \cdot k)$. Dokonano 9 pomiarów tej cechy i obliczono, że $\bar{x} = k$. Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0,9 + 0,0001 \cdot k$

- a) Oszacować przedziałem ufności parametr m ,
- b) Wyznaczyć błąd względny tego oszacowania,
- c) Jak liczna powinna być próba aby błąd względny wynosił $0,01 \cdot k\%$?

Zadanie 10C.

Dokonano 120 pomiarów badanej cechy X i obliczono, że $\bar{x} = k$, $s = 0,5 \cdot k$. Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 1 - 0,0001 \cdot k$

- a) Oszacować przedziałem ufności parametr m ,
- b) Wyznaczyć błąd względny tego oszacowania,
- c) Jak liczna powinna być próba aby błąd względny wynosił $0,01 \cdot k\%$?

Zadanie 10D.

W losowo wybranej próbie $100 + |k - 500|$ wyborców, $10 + |k - 500|$ osób zadeklarowało udział w zbliżających się wyborach. Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0,94$

- a) Oszacować przedziałem ufności procent wszystkich uprawnionych osób, które wezmą udział w zbliżających się wyborach,
- b) Wyznaczyć błąd względny tego oszacowania,
- c) Jak liczna powinna być próba aby błąd względny wynosił 3% ?

Zadanie 11.

Cecha X ma rozkład $N(m; \sigma)$. Dokonano 10 pomiarów tej cechy i obliczono, że $s = 0,01 \cdot k$. Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0,95$
Oszacować przedziałem ufności parametr σ ,

Zadanie 12A.

W losowo wybranej próbie $100 + |k - 500|$ wyborców, $10 + |k - 500|$ osób zadeklarowało udział w zbliżających się wyborach.

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,04$ sprawdzić hipotezę, że 50,1% ogółu wyborców weźmie udział w zbliżających się wyborach.
- Błąd którego rodzaju możemy popełnić podejmując decyzję dotyczącą rozpatrywanych hipotez,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności,

Zadanie 12B.

Cecha X ma rozkład $N(m; 0,1k)$. Dokonano 9 pomiarów tej cechy i obliczono, że $\bar{x} = k$.

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,0001 \cdot k$ sprawdzić hipotezy $H_0(m = 0,94 \cdot k)$, $H_1(m > 0,94 \cdot k)$
- Błąd którego rodzaju możemy popełnić podejmując decyzję dotyczącą powyższych hipotez,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności,

Zadanie 12C.

Cecha X ma rozkład $N(m; \sigma)$. Dokonano 10 pomiarów tej cechy i obliczono, że $\bar{x} = k$, $s = 0,1 \cdot k$.

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,02$ sprawdzić hipotezy $H_0(m = 0,94 \cdot k)$, $H_1(m \neq 0,94 \cdot k)$
- Błąd którego rodzaju możemy popełnić podejmując decyzję dotyczącą powyższych hipotez,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności,

Zadanie 12D.

Dokonano 120 pomiarów badanej cechy X i obliczono, że $\bar{x} = k$, $s = 0,5 \cdot k$.

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,0001 \cdot k$ sprawdzić hipotezy $H_0(m = 1,05 \cdot k)$, $H_1(m < 1,05 \cdot k)$
- Błąd którego rodzaju możemy popełnić podejmując decyzję dotyczącą powyższych hipotez,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności,

Zadanie 12E.

Cecha X ma rozkład $N(m; \sigma)$. Dokonano 10 pomiarów tej cechy i obliczono, że $s^2 = 0,01 \cdot k + 1$.

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ sprawdzić hipotezy $H_0(\sigma^2 = 0,01 \cdot k)$, $H_1(\sigma^2 > 0,01 \cdot k)$,
- Błąd którego rodzaju możemy popełnić podejmując decyzję dotyczącą powyższych hipotez,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności,

Zadanie 13A.

Badano wydatki na oświatę (w zł) dorosłych mieszkańców Warszawy i Krakowa.

Dokonano 120 pomiarów badanej cechy w Krakowie i obliczono, że $\bar{x} = 0,95k$, $s = 0,5 \cdot k$.

Dokonano 180 pomiarów badanej cechy w Warszawie i obliczono, że $\bar{x} = 1,05k$, $s = 0,5 \cdot k$.

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,0001 \cdot k$ sprawdzić czy wydatki na oświatę dorosłych ogółu mieszkańców Warszawy i Krakowa są takie same,
- Błąd którego rodzaju możemy popełnić podejmując decyzję dotyczącą powyższych hipotez,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności,

Zadanie 13B.

Badano poparcie osób dorosłych dla wprowadzenia kary śmierci w Polsce i w Czechach. W losowo wybranych próbach liczących po $100 + |k - 500|$ osób dorosłych w tych krajach, $10 + |k - 500|$ osób w Polsce i $15 + |k - 500|$ w Czechach zadeklarowało takie poparcie.

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,0001 \cdot k$ sprawdzić czy poparcie ogółu osób dorosłych dla wprowadzenia kary śmierci w Polsce i w Czechach jest takie samo.
- Błąd którego rodzaju możemy popełnić podejmując decyzję dotyczącą powyższych hipotez,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności,

Zadanie 14.

Przez k dni rejestrowano w pewnym mieście liczbę zabójstw:

Liczba zabójstw	0	1	2	3	4
Liczba dni	$k - 80$	55	15	8	2

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ sprawdzić hipotezę, że dobową liczbę zabójstw w tym mieście ma rozkład Poissona,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności,

Zadanie 15.

Pewien produkt można wytworzyć dwiema metodami produkcji. Wysłano hipotezę, że wydajność produkcji nie zależy od metody produkcji. Wylosowano niezależnie próbę k sztuk wyrobu i otrzymano następujące wyniki badania jakości dla poszczególnych metod:

JAKOŚĆ	METODA PRODUKCJI	
	I	II
DOBRA	40	20
ZŁA	10	$k - 70$

- Na poziomie istotności $\alpha = 0,1$ sprawdzić hipotezę o niezależności jakości produkcji od metody produkcji,
- Wyznaczyć krytyczny poziom istotności.

Uwaga.

Z zadań 10 A, B, C, D wybieramy tylko jedno.

Z zadań 12 A, B, C, D, E wybieramy tylko jedno.

Z zadań 13 A, B wybieramy tylko jedno.

Z serii zadań 1 – 8 należy oddać przynajmniej 5 zadań.

Z serii zadań 9 – 15 należy oddać przynajmniej 5 zadań.